

# **ESTRUCTURAS**

# **ISOSTÁTICAS**

## **Problemas resueltos**

Edición revisada

# **2D**

Ortiz David  
Molina Marcos  
Martínez Hugo  
J. Bernal Elan  
Hernández Daniel  
García Pascual  
Berruecos Sergio





# **ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS**

## **Problemas resueltos**

### **2D**





# **ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS**

## **Problemas resueltos**

### **2D**

**Ortiz David   Martínez Hugo   Hernández Daniel   Berruecos Sergio**  
Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura

**Molina Marcos**  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ingeniería

**J. Bernal Elan   García Pascual**  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Estudios Superiores Aragón

Colaboración Internacional:  
**Hernan Manuel Anchapuri Rodríguez**  
Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann  
Facultad de Ingeniería Civil, Arquitectura y Geotecnia

**Alex Henry Palomino Encinas**  
Universidad Nacional de Cajamarca  
Facultad de Ingeniería

Revisión Técnica Internacional:  
**Ph. D. Genner Villarreal Castro**  
Universidad de San Martín de Porres  
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas  
Universidad Privada Antenor Orrego

Revisión Técnica Nacional:  
**Ing. Carlos Magdaleno Domínguez**  
ESIA Zacatenco IPN

Diseño de Portada y Contraportada:  
**Elizabeth Dorantes Soto**  
FES Aragón UNAM

Datos de catalogación bibliográfica

**Ortiz, D., Molina, M., Martínez, H., et al.**

**Estructuras isostáticas en 2D: Problemas resueltos**

Primera edición

INDEPENDIENTE, México, 2014

Distribuidora virtual oficial: CivilGeeks

Número de Registro de Obra 03-2015-111312301900-01

Área: Ingeniería

Formato: Carta 21.6 cm x 27.9 cm

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, con fines lucrativos.

Obra inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, SEP, INDAUTOR, por los autores.

Impreso en México

## **DEDICATORIAS**

### **Ortiz David**

Dedico de manera especial este libro a Dios, mis padres Clara y Antonio, así como a mis hermanos José Carlos y Antonio.

A mis abuelas Paulina Ramírez y Juana Marín.

He sido bendecido por el apoyo y afecto que me ha brindado cada uno de los miembros de mi familia a lo largo de mi vida, lo cual les agradezco infinitamente, incluyendo aquellos que se han adelantado (abuelos Rafael y Antonio, y tía Lucía).

Con toda sinceridad, les doy las gracias a todos mis amigos(as), compañeros(as), profesores(as) y colegas que siempre me han respaldado.

A todas las personas de México y del extranjero que directa o indirectamente me han apoyado y/o han depositado su confianza en mí.

A todo aquel que con los puños en alto sigue luchando por un mundo más justo (estudiantes, profesionistas honestos, obreros, campesinos, jornaleros y demás). Somos el pueblo trabajador, los siempre condicionados y reprimidos.

### **Molina Marcos**

La presente obra está dedicada al ingeniero Hernández Pérez Rómulo quien fue mi principal mentor en la ingeniería estructural, pues hizo que diera los primeros pasos en el análisis y diseño estructural, así mismo, esta dedicatoria la extiendo al gran y maravilloso, pero genio, Dr. Esteban Flores Méndez quien me brindó grandes conocimientos en el modelo matemático puro aplicado a las estructuras y que de manera personal es el físico y estructurista más brillante del país y de los mejores a nivel mundial, por lo que le agradezco su tiempo y apoyo.

Doy las gracias y dedico puramente este libro al público en general, particularmente a la comunidad de ingenieros civiles, físicos y matemáticos, y por su puesto a todos los estudiantes de ingeniería y ciencias fisicomatemáticas.

### **Martínez Hugo**

A mis padres y hermanos, por su apoyo incondicional.

A mis amigos, que siempre han estado a mi lado en todo momento.

### **J. Bernal Elan**

Agradezco a toda mi familia, en especial a mis padres Angélica y Cruz y abuelos Silverio, Jovita y Epifanía quienes han creído en mí y tengo apoyo incondicional desde que empecé mis estudios.

A la Facultad de Estudios Superiores Aragón UNAM que es donde he recibido mi formación académica en la Carrera de Ing. Civil y de la cual me siento muy orgulloso.

## DEDICATORIAS

A mis profesores del área de Estructuras: Molina Elvira Marcos, García Cuevas Pascual, Hernández Sánchez Vicente, Jiménez Villegas Gustavo Adolfo, Heras Cruz Ricardo, Ortiz Soto David y Martínez Hugo.

A mis amigos y a los lectores.

### **Hernández Daniel**

Doy gracias a Dios, mis padres Alfredo y Nazaria, mis hermanos, demás familiares y amigos.

### **García Pascual**

A mi familia y a mis amigos.

### **Berruecos Sergio**

A Dios:

Por estar conmigo en cada momento, permitirme desarrollarme como persona y obtener nuevos conocimientos.

A mi familia:

Por su apoyo incondicional a lo largo de mi vida y sus sabios consejos que me han enseñado a superarme.

A mis amigos:

Por su compañía en todo momento y por sus palabras de aliento cuando las he necesitado.

Al Instituto Politécnico Nacional y a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI-ESIA-UZ) por brindarme la oportunidad de formarme profesionalmente.

*“El genio se compone del dos por ciento de talento y del noventa y ocho por ciento de perseverante aplicación.”*

*Ludwig van Beethoven*

## AGRADECIMIENTOS

Expresamos nuestro agradecimiento a las instituciones y personas que han contribuido directa o indirectamente en la elaboración y/o difusión de este texto.

El Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Zacatenco y la Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Estudios Superiores Aragón y Facultad de Ingeniería, son las universidades en las que nos hemos formado académicamente a nivel de licenciatura y posgrado, incluso nos han brindado la oportunidad a algunos de nosotros de impartir determinadas asignaturas de las áreas estructuras y matemáticas.

Le hacemos un reconocimiento especial al Ph. D. Genner Villarreal Castro por haber efectuado la revisión técnica internacional de este libro, su inmensa calidad humana y su impresionante trayectoria como investigador han sido una gran inspiración y motivación. Su filosofía de vida “Una educación universal, de calidad y al alcance de todos”, los conocimientos que nos ha ofrecido de Ingeniería Estructural a través de sus libros y videos tutoriales, entre otros aportes, y sus célebres frases como “México y Perú unidos por un conocimiento sin fronteras” nos han marcado. De igual forma, le rendimos un homenaje al revisor técnico nacional, el Ing. Carlos Magdalena Domínguez (docente de la ESIA Zacatenco IPN). Su brillante trayectoria y los libros que ha escrito de Ingeniería Estructural representan una fuerte influencia para nosotros.

Estamos muy agradecidos con los colaboradores internacionales de este texto, los peruanos Alex Henry Palomino Encinas y Hernan Manuel Anchapuri Rodríguez.

Valoramos el esfuerzo que han hecho los creadores y sus colaboradores de diversos blogs, grupos y páginas de Facebook de ingeniería para apoyarnos. Gracias a John Rojas de CivilGeeks: La web del ingeniero civil, a Luis Aguilar de Ing. Civil FREE, a los creadores de Ingeniería Civil 21, Descarga libros de Ingeniería Civil, Ayuda a Estudiantes de Ing. Civil, Material de apoyo para el estudiante de Ing. Civil, Ingeniería Civil Aragón, todos los ESIA Zacatenco, entre otros. Desde luego, los miembros y visitantes de estas páginas han desempeñado un papel trascendental.

Agradecemos a los miembros directivos y demás personal de las universidades que nos han abierto y nos abrirán un espacio para presentarnos en los auditorios.

A la Doctora Rajeswari Narayanasamy de la India por toda la solidaridad mostrada hacia nosotros y por invitarnos a participar en el Simposio de Investigación en Sistemas Constructivos, Computacionales y Arquitectónicos (SISCCA) 2014 con

## AGRADECIMIENTOS

sede en la Universidad Juárez del Estado de Durango, evento en el cual presentamos de manera oficial por primer vez el presente libro.

Los creadores de SEPITIC, Frank Damián y Said Franco, nos han permitido difundir nuestro escrito en SEPITIC Estructuras, además de que en el programa de radio Ingeniería en Marcha 860 AM abordaron sobre nuestra literatura.

Gracias también a los conductores de Ingenio Civil, principalmente a Estefanía Bárcenas y Diana Mancera, y a todos los de Nuestra Voz Radio: ¡La Voz del Pueblo Organizado!, por las invitaciones que nos han hecho a tal programa.

A nuestros profesores por todos los conocimientos que nos han transmitido, a los directivos y personal administrativo de las instituciones mencionadas al inicio.

A todos aquellos que se han unido a nuestra página oficial de Facebook de Biblioteca y/o la han recomendado.

A la gran cantidad de amigos(as) que nos han apoyado en todo momento desde nuestras cuentas personales de Facebook.

De igual forma, a los distintos Capítulos Estudiantiles de la ESIA Zacatenco. A Eduardo Caltenco, Víctor Carbajal, Juan Carlos Barrera, Rubén Domínguez y en general a todos los integrantes por su inmenso respaldo con nuestra publicación.

Finalmente, agradecemos al Ing. Napoleón Franklin Cueva Guerra de Perú por su apoyo incondicional y sus buenos deseos hacia cada uno de los que hemos trabajado en la realización de este libro.

Dedicamos este escrito a todos y cada uno de los lectores, con la esperanza de que sea de su agrado y utilidad. No sólo pretendemos contribuir en la aportación de conocimientos en el área de estructuras, también buscamos transmitirles mensajes de tipo social.

**LOS AUTORES**

## **NUESTRA FILOSOFÍA**

El libro lo hemos escrito integrantes de dos de las instituciones con mayor historia en México: La UNAM y el IPN, particularmente de las unidades Facultad de Ingeniería, FES Aragón y ESIA Zacatenco, las cuales durante mucho tiempo se han considerado equívocamente antagónicas desde nuestro punto de vista, sobre todo en el ámbito estudiantil a nivel medio superior y nivel superior. Con esta obra, los autores queremos mostrar que podemos trabajar en conjunto haciendo los prejuicios a un lado, por lo que proponemos un llamado a la unidad, no sólo entre estas universidades, sino global, ya que respetamos y admiramos la calidad de cada una de las instituciones existentes tanto en México como en otros países.

Por otra parte, no estamos de acuerdo con las ofensas que se emiten entre las distintas carreras, pues pensamos que el respeto debe imperar, así que dirigimos este texto a las personas vinculadas con las Licenciaturas en Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica, Arquitectura o alguna otra afín, incluso, nos es indistinto que carrera cursen quienes gusten leer el texto, pues es una realidad que todos tenemos derecho a aprender lo que queramos.

Hemos puesto para su libre descarga este libro, porque venimos siguiendo una ideología, bajo nuestra frase “la información no es sólo para el que la paga, es para todos”, ponemos al alcance de ustedes con toda humildad nuestra producción intelectual, ya que perseguimos un mundo más justo, más equitativo, con oportunidades para todos por igual, porque como dice nuestro gran amigo el Ph. D. Genner Villarreal “la educación es un derecho y no un privilegio”. Escribimos siempre pensando paralelamente en el apoyo a los demás, dándole un fuerte golpe a la desigualdad, todo como una respuesta a las injusticias. Puesto que realmente no existen fronteras ni banderas para el conocimiento, hablamos de países por simple contexto cultural.

Tenemos como objetivo recorrer sino todas, casi todas las universidades de México en las que se imparte Ingeniería Civil, con la consigna de presentar este material a los estudiantes y que ejemplares impresos del mismo estén disponibles para su consulta en las bibliotecas. Nunca es ni será nuestra intención presumir nuestro estilo, sólo nos gusta compartir lo poco que sabemos.

**LOS AUTORES**



## **CONTACTO**

**David Ortiz M en I**

<https://www.facebook.com/davidortizMenI>

### **Página de la Biblioteca**

Se les hace la amable invitación a unirse a la página oficial de Facebook de la Biblioteca; para localizarla, se les sugiere teclear en el buscador las palabras [Problemario de Análisis de Estructuras en 2D Y 3D](#).

Si buscas un sitio donde se haga válido el supuesto derecho que todos tenemos de "La educación es gratuita y no un privilegio", la Biblioteca citada es uno de los lugares indicados, pues toda la información que elaboramos (Libros, Tesis, Vídeos Tutoriales y Manuales) profesionistas de México, Perú, Bolivia y Ecuador es de libre descarga. Si necesitas una dosis de entretenimiento, ahí la encontrarás. Siempre serás bienvenido al lugar donde a través de la expresión artística manifestamos nuestra inconformidad ante un sistema injusto y carente de oportunidades para todos por igual. Es en la literatura de Ingeniería más combativa que jamás hayas visto donde podrás notar que pintamos las banderas de un solo color, pues todos(as) tienen cabida, y los egos y las envidias no existen. Que disfruten de nuestra producción intelectual: es la novel propuesta del siglo XXI.



## PREFACIO

El libro se ha escrito con la finalidad de contribuir en el apoyo a profesores, estudiantes y todos los interesados en general en la enseñanza y el aprendizaje de las estructuras isostáticas, las cuales en conjunto representan un apartado trascendental en la disciplina denominada análisis estructural. Ésta última constituye uno de los pilares más importantes de la carrera de Ingeniería Civil y de otras como Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica y Arquitectura.

Una estructura es el conjunto de elementos resistentes, convenientemente vinculados entre sí, que accionan y reaccionan bajo los efectos de las cargas; su finalidad es resistir y transmitir cargas a otros elementos y a los apoyos, y de ese modo garantizar su correcto funcionamiento. Los requisitos o exigencias básicas que una estructura debe cumplir son: equilibrio y estabilidad.

Se entiende por análisis de una estructura al proceso sistemático que concluye con el conocimiento de las características de su comportamiento bajo un cierto estado de cargas; se incluye, habitualmente, bajo la denominación genérica de estudio del comportamiento tanto el estudio del análisis de los estados tensional y deformacional alcanzados por los elementos y componentes físicos de la estructura como la obtención de conclusiones sobre la influencia recíproca con el medio ambiente o sobre sus condiciones de seguridad. Es entonces el objetivo del análisis de una estructura, la predicción de su comportamiento bajo las diferentes acciones para las que se postule o establezca que debe tener capacidad de respuesta.

Las estructuras se clasifican, de acuerdo a los métodos de análisis, en isostáticas o estáticamente determinadas, en hiperestáticas o estáticamente indeterminadas, y en hipostáticas. Las primeras son aquellas que se pueden analizar empleando solamente las ecuaciones de equilibrio de la estática y en las que la supresión de cualquiera de sus ligaduras conduce al colapso, o sea, se pueden determinar las fuerzas cortantes y normales, y los momentos flexionantes y torsionantes, con base en condiciones de equilibrio únicamente. De una forma un poco más técnica podemos decir que una estructura isostática posee igual número de ecuaciones que de incógnitas, por lo cual, se puede resolver mediante un simple sistema de ecuaciones lineales. Las segundas son aquellas que desde el punto de vista estático se encuentran en equilibrio, sin embargo, las ecuaciones que expone la estática no son suficientes para conocer las incógnitas que poseen, así que, para analizarlas es necesario plantear, además de las ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de compatibilidad de deformaciones entre los miembros de la estructura o entre los miembros y apoyos. Por último, las estructuras hipostáticas tienen un grado de indeterminación estática menor a cero. En este caso, el número de ecuaciones de equilibrio es excesivo ya que supera al número de incógnitas, entonces, son inestables y no oponen resistencia a estímulos de movimientos externos.

## PREFACIO

El énfasis de este libro es resolver, de manera minuciosa y clara, una gran variedad de ejercicios sobre estructuras isostáticas. Específicamente, en este texto se analizan cuatro tipos de estructuras: vigas, marcos rígidos, armaduras y arcos. Las cargas que se tratan son lo más variadas posibles, desde las más comunes como puntuales, uniformes distribuidas, triangulares, trapezoidales y momentos de par, hasta las más atípicas como las distribuidas irregularmente, parabólicas, trigonométricas, enjutas elípticas, polinómicas, radicales, exponenciales, entre otras.

El solucionar un gran número de problemas, tiene como objetivo desarrollar en el lector tal habilidad, pues ello conllevará a que comprenda de una mejor forma cómo se transmiten las cargas a través de una estructura y a que tenga una idea más acertada de la manera en que se deforma la estructura. Así mismo, al dominar los principios que se aplican aquí, será más susceptible a entender métodos más avanzados del análisis estructural, los cuales brindan un medio para comprobar los resultados obtenidos en los programas de cómputo disponibles hoy en día, en vez de limitarse simplemente a confiar en los resultados generados.

A continuación se proporciona el enfoque seguido en este libro. La obra se divide en cuatro capítulos; en cada uno de ellos se resuelven ejercicios de un solo tipo de estructura. En el capítulo 1 se analizan vigas. Para los primeros ejemplos se calculan el grado de indeterminación, las reacciones en los soportes y empleando el método de las secciones, las funciones de las fuerzas cortante y normal, y de momento flexionante. Para las vigas subsecuentes, se explica el trazo de los diagramas de las acciones internas, además de que se incluyen los métodos más usuales de deflexión, tales como el trabajo virtual, la integración doble y en el último tema, el de Castigliano. En el capítulo 2 se estudian los mismos temas a excepción del método de integración doble, pero aplicado a marcos. El capítulo 3 se enfoca a la resolución de armaduras; nuevamente, los principios usados son los mismos, sólo que aquí deben calcularse las fuerzas en las barras y no las funciones de las acciones internas; para esto último, se usa el método de los nodos. Finalmente, en el capítulo 4 se explican detalladamente las formas de calcular las reacciones en los soportes y de determinar las funciones de las acciones internas en arcos tanto parabólicos como circulares.

## CONTENIDO

|  |            |
|--|------------|
| <b>CAPÍTULO 1. ANÁLISIS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS</b> .....  | <b>1</b>   |
| 1.1. REACCIONES EN LOS SOPORTES Y FUNCIONES DE FUERZA CORTANTE,<br>DE FUERZA NORMAL Y DE MOMENTO .....                                       | 1          |
| 1.2. DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO. TRABAJO VIRTUAL.<br>PENDIENTE Y CURVA ELÁSTICA CON EL MÉTODO DE LA DOBLE<br>INTEGRACIÓN..... | 50         |
| 1.3. TEOREMA DE CASTIGLIANO .....  | 134        |
| <br>   |            |
| <b>CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE MARCOS ESTÁTICAMENTE DETERMINADOS</b> .....   | <b>149</b> |
| 2.1. REACCIONES EN LOS SOPORTES Y FUNCIONES DE LAS FUERZAS NORMAL<br>Y CORTANTE, Y DEL MOMENTO FLECTOR .....                                 | 149        |
| 2.2. DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE, DE FUERZA NORMAL Y DE MOMENTO<br>FLECTOR .....  | 184        |
| 2.3. MÉTODO DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL.....   | 210        |
| 2.4. TEOREMA DE CASTIGLIANO .....  | 283        |
| <br>   |            |
| <b>CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE ARMADURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS</b> .....  | <b>301</b> |
| 3.1. REACCIONES EN LOS SOPORTES Y DETERMINACIÓN DE LAS FUERZAS<br>AXIALES POR EL MÉTODO DE LOS NODOS .....                                   | 301        |
| 3.2. MÉTODO DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL.....   | 317        |
| 3.3. TEOREMA DE CASTIGLIANO .....  | 333        |
| <br>   |            |
| <b>CAPÍTULO 4. RESOLUCIÓN DE ARCOS ISOSTÁTICOS</b> .....   | <b>341</b> |
| 4.1. ARCOS PARABÓLICOS .....   | 341        |
| 4.2. ARCOS CIRCULARES.....   | 359        |
| <br>   |            |
| <b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....  | <b>367</b> |

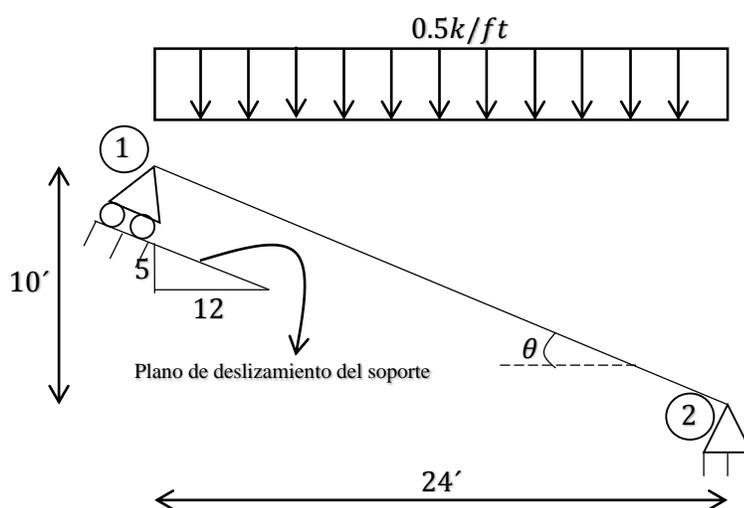


## CAPÍTULO 1

### ANÁLISIS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

#### 1.1 REACCIONES EN LOS SOPORTES Y FUNCIONES DE FUERZA CORTANTE, DE FUERZA NORMAL Y DE MOMENTO

**Ejercicio 1.1** Determine las reacciones en los apoyos de la estructura mostrada en la figura 1-1a producidas por las cargas indicadas. Use el método de las secciones para deducir las expresiones algebraicas que describen la variación de los elementos mecánicos.



(a)

Figura 1-1

### SOLUCIÓN

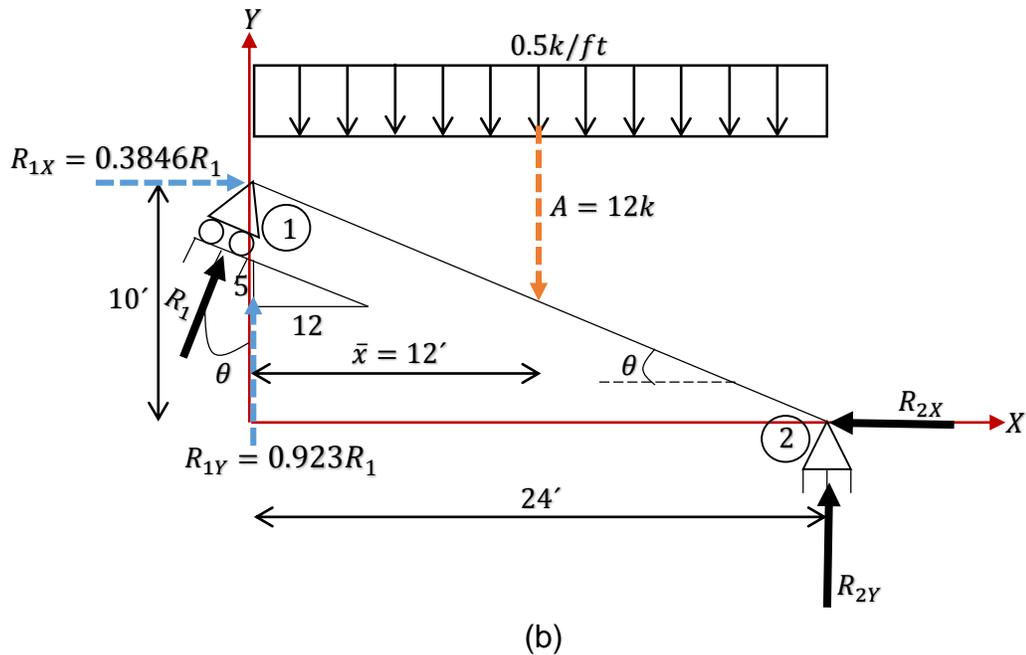
#### Verificación del grado de indeterminación

Se identifican las fuerzas reactivas en los apoyos (soportes); el soporte 1 es un rodillo, por lo que la reacción  $R_1$  es perpendicular al plano de deslizamiento del apoyo, mientras que el soporte 2 es articulado y en él se generan dos reacciones, una horizontal ( $R_{2X}$ ) y una vertical ( $R_{2Y}$ ). Como hay tres incógnitas de reacción,  $r = 3$ , tres ecuaciones de equilibrio ( $\sum FX = 0, \sum FY = 0, \sum M = 0$ ),  $n = 3$ , y ninguna ecuación de condición (no existe articulación (rótula) ni conexión cortante intermedia),  $c = 0$ , se concluye que la viga es isostática o estáticamente determinada debido a que se cumple que  $r = n + c$ , puesto que  $3 = 3 + 0$ .

Si  $r > (n + c)$ , entonces la viga es estáticamente indeterminada, o bien, en caso de que  $r < (n + c)$ , se infiere que la viga es inestable.

### Cálculo de las reacciones en los apoyos

**Diagrama de cargas.** Este diagrama se muestra en la figura 1-1b. El sentido de cada reacción ha sido supuesto arbitrariamente debido a que las fuerzas reactivas no son conocidas. Para la carga distribuida se tienen que determinar: a) la carga concentrada equivalente, es decir, la magnitud de la fuerza resultante de la carga, que es igual al área bajo la curva de carga (en este caso, por ser carga uniforme es el área del rectángulo) y b) el centroide de dicha área a través del cual pasa la línea de acción de la resultante, o sea, se halla el punto de aplicación de la resultante (para una carga rectangular, el centroide se localiza a la mitad de la longitud de la base).

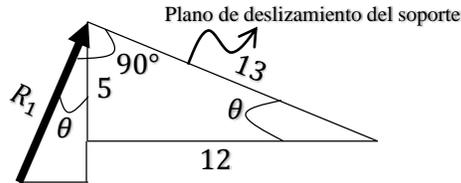


Por otra parte, se han establecido en sus cuadrantes positivos a los ejes coordenados  $X$  y  $Y$  más convenientes para aplicar las ecuaciones de equilibrio en la estructura; esto último hace que sea necesario descomponer a  $R_1$  en sus componentes rectangulares horizontal y vertical, las cuales han sido etiquetadas como  $R_{1X}$  y  $R_{1Y}$  respectivamente.

La fuerza resultante de la carga uniforme distribuida y su punto de aplicación son

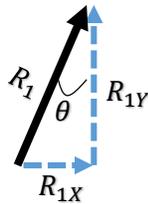
$$A = (0.5k/ft)(24ft) = 12k \quad \bar{x} = \frac{1}{2}(24') = 12'$$

De acuerdo a las figuras 1-1c y 1-1d, las componentes rectangulares de la reacción  $R_1$  en el plano  $X - Y$  son



$$\theta = \tan^{-1} \frac{5}{12} = 22.6198^\circ$$

(c)



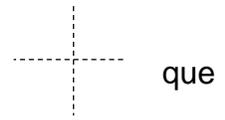
$$R_{1X} = R_1 \sin \theta = R_1 \cdot \sin 22.6198^\circ = 0.3846R_1$$

$$R_{1Y} = R_1 \cos \theta = R_1 \cdot \cos 22.6198^\circ = 0.923R_1$$

(d)

**Ecuaciones de equilibrio.** Se aplican al diagrama de cargas para calcular las reacciones en los apoyos; la convención de signos que se adopta es arbitraria. En caso de que la solución de las ecuaciones de equilibrio proporcione una magnitud negativa para una fuerza reactiva, su sentido propuesto debe ser invertido.

Tomando momentos alrededor del punto 2 considerando los ejes que pasan por tal punto, se puede despejar directamente el valor de  $R_1$ .



$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow R_{1X}(10) + R_{1Y}(24) - 12(12) = 0$$

$$(0.3846R_1)(10) + (0.923R_1)(24) - 144 = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{144}{26} = 5.5385$$

$$\therefore R_1 = 5.5385k \uparrow$$

Los valores de las componentes rectangulares de  $R_1 = 5.5385k$  son

$$R_{1X} = 0.3846R_1 = 0.3846(5.5385k) = 2.13k \rightarrow$$

$$R_{1Y} = 0.923R_1 = 0.923(5.5385k) = 5.112k \uparrow$$

Finalmente, las reacciones  $R_{2X}$  y  $R_{2Y}$  se obtienen al plantear las dos ecuaciones de equilibrio restantes, es decir, las de fuerzas.

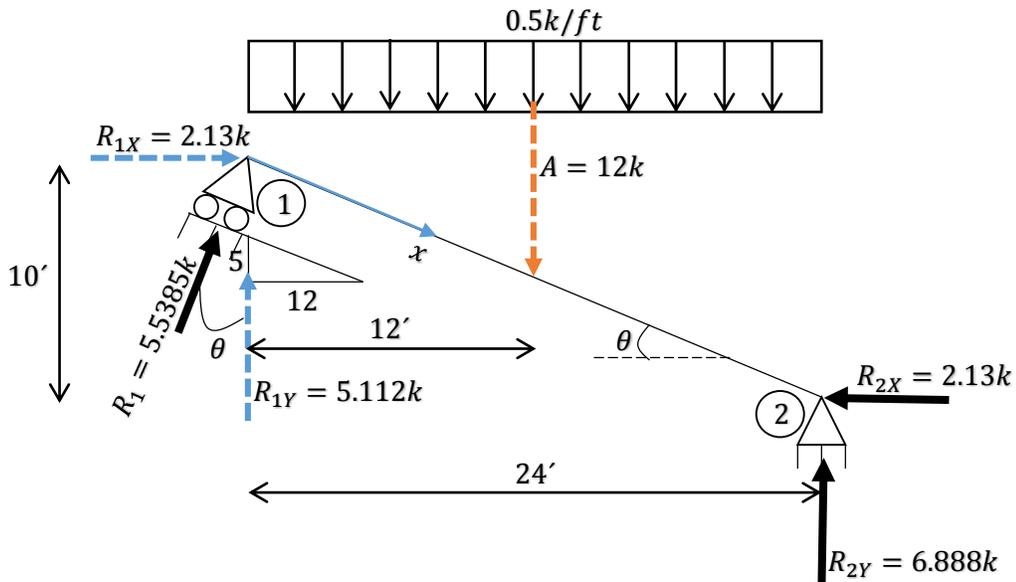
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{1X} - R_{2X} = 0 \Rightarrow 2.13 - R_{2X} = 0 \Rightarrow R_{2X} = 2.13$$

$$\therefore R_{2X} = 2.13k \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{1Y} - U_R + R_{2Y} = 0 \Rightarrow 5.112 - 12 + R_{2Y} = 0 \Rightarrow R_{2Y} = 6.888$$

$$\therefore R_{2Y} = 6.888k \uparrow$$

### Funciones de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento



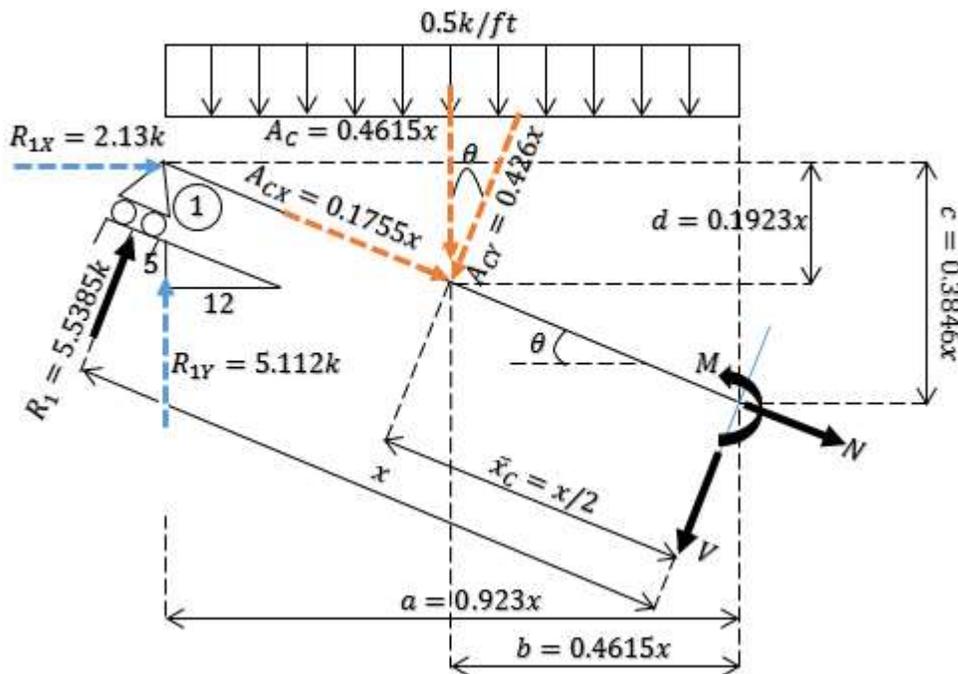
(e)

En la figura 1-1e se visualizan los valores de las reacciones en los soportes con sus correspondientes sentidos adecuados. A continuación se aplica el método de las secciones (cortes). La distribución de la carga actuante no presenta discontinuidad, así que sólo será necesario efectuar un corte perpendicular al eje longitudinal de la viga para definir los elementos mecánicos, también llamados acciones internas, que

corresponden a la fuerza axial o normal  $N$ , la cual actúa en la misma dirección que la del eje longitudinal de la viga, la fuerza cortante  $V$  que es perpendicular a  $N$  y el momento flexionante  $M$ ; se considera como origen del sistema coordenado al punto 1, así que la coordenada  $x$  es positiva hacia la derecha y hacia abajo, y es válida para la región 1 – 2 ( $0 \leq x \leq 26'$ ), debido a que la longitud de la viga es  $L = \sqrt{(24')^2 + (10')^2} = 26'$ . Se secciona la viga en un punto arbitrario (intermedio en el segmento 1 – 2) a una distancia  $x$  del punto 1.

En la figura 1-1f se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud  $x$ . El área  $A_c$  bajo el rectángulo y su centroide  $\bar{x}_c$  deben determinarse. Las acciones internas aparecen actuando en sus direcciones positivas de acuerdo a la convención de signos más usual y sus funciones se deducen aplicando las ecuaciones de equilibrio cuya convención de signos si puede ser indistinta en el diagrama mencionado.

$$0 \leq x \leq 26'$$



(f)

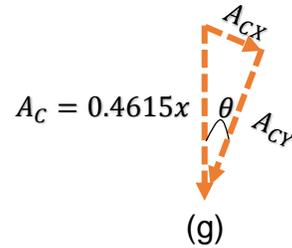
La carga concentrada equivalente de la carga distribuida uniforme del corte y su punto de aplicación son, respectivamente

$$A_C = (0.5)(0.923x) = 0.4615x \quad \bar{x}_c = \frac{1}{2}(x) = \frac{x}{2}$$

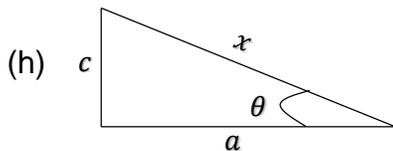
Con base en la figura 1-1g se determinan las componentes rectangulares de la fuerza resultante  $A_C$  cuyas líneas de acción coinciden con las de  $N$  y  $V$ , es decir, las componentes que actúan en forma paralela y perpendicular al eje longitudinal de la viga.

$$A_{Cx} = A_C \sin \theta = 0.4615x(0.3846) = 0.1775x$$

$$A_{Cy} = A_C \cos \theta = 0.4615x(0.923) = 0.426x$$



Las distancias auxiliares  $a, b, c$  y  $d$  se deducen a partir del triángulo rectángulo que se observa en la figura 1-1h.



$$c = x \sin \theta = 0.3846x$$

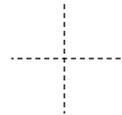
$$a = x \cos \theta = 0.923x$$

$$b = \frac{a}{2} \quad d = \frac{c}{2}$$

Si tomamos momentos alrededor del punto del corte, puede obtenerse directamente el momento  $M$  en función de  $x$ .

$$\sum M_{\text{corte}} = 0$$

- Opción 1

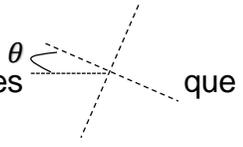
Usando los momentos de las fuerzas con respecto a los ejes  que pasan por el punto del corte se tiene

$$R_{1Y}(a) + R_{1X}(c) - A_C(b) - M = 0$$

$$5.112(0.923x) + 2.13(0.3846x) - (0.4615x)(0.4615x) - M = 0$$

$$M = -0.213x^2 + 5.538x$$

- Opción 2

Considerando los momentos de las fuerzas con respecto a los ejes  que pasan por el punto del corte obtenemos

$$R_1(x) - A_{CY} \left( \frac{x}{2} \right) - M = 0 \Rightarrow 5.5385(x) - (0.426x) \left( \frac{x}{2} \right) - M = 0$$

$$M = -0.213x^2 + 5.5385x$$

De la suma de fuerzas en la dirección perpendicular al eje longitudinal de la viga igual a cero, se puede obtener una solución directa para la fuerza cortante  $V$ .

$$\nearrow + \sum F_Y = 0 \Rightarrow R_1 - A_{CY} - V = 0 \Rightarrow 5.5385 - 0.426x - V = 0$$

$$V = 5.5385 - 0.426x$$

También,  $V$  es resultado de

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}(-0.213x^2 + 5.5385x) = 5.5385 - 0.426x$$

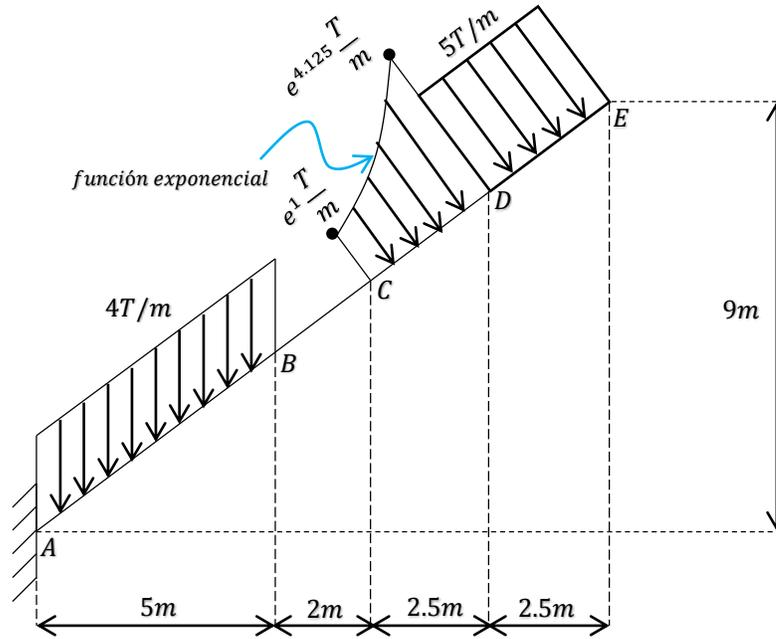
Lo anterior se debe a que la pendiente del diagrama de momento ( $dM/dx$ ) es igual a la intensidad de la fuerza cortante  $V$  en ese punto. Por otra parte, se establece que la pendiente del diagrama de fuerza cortante, en un punto ( $dV/dx$ ) es igual a la intensidad de la carga distribuida  $w(x)$  en ese punto.

$$w = \frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}(5.5385 - 0.426x) = -0.426$$

Al plantear la ecuación que establece que la suma de fuerzas en la dirección del eje longitudinal de la viga es equivalente a cero, es posible despejar el valor de la fuerza normal  $N$ .

$$\rightarrow + \sum F_X = 0 \Rightarrow A_{CX} + N = 0 \Rightarrow 0.1775x + N = 0 \Rightarrow N = -0.1775x$$

**Ejercicio 1.2** Determine las funciones de las acciones internas de la viga en voladizo que se muestra en la figura 1-2a cuyos tramos  $A - B$ ,  $C - D$  y  $D - E$  soportan una carga uniformemente repartida gravitacional de  $4T/m$ , una carga cuya intensidad varía en forma exponencial desde  $e^1 T/m$  en el punto  $C$  hasta  $e^{4.125} T/m$  en el punto  $D$  y una carga distribuida uniforme de  $5T/m$  ortogonal al eje de la viga, de forma respectiva.



(a)

Figura 1-2

### SOLUCIÓN

#### Cálculo de las reacciones en los apoyos

**Diagrama de cargas.** En primera instancia, construiremos una función de tipo exponencial que ajuste a los dos puntos conocidos de la carga cuya intensidad varía de ese modo. Para ello, es indispensable determinar el valor de la longitud de la viga ( $L$ ) y las distancias  $a$  y  $b$  a las cuales se encuentran posicionadas las intensidades de presión  $w_1$  y  $w_2$  respecto de  $A$ .

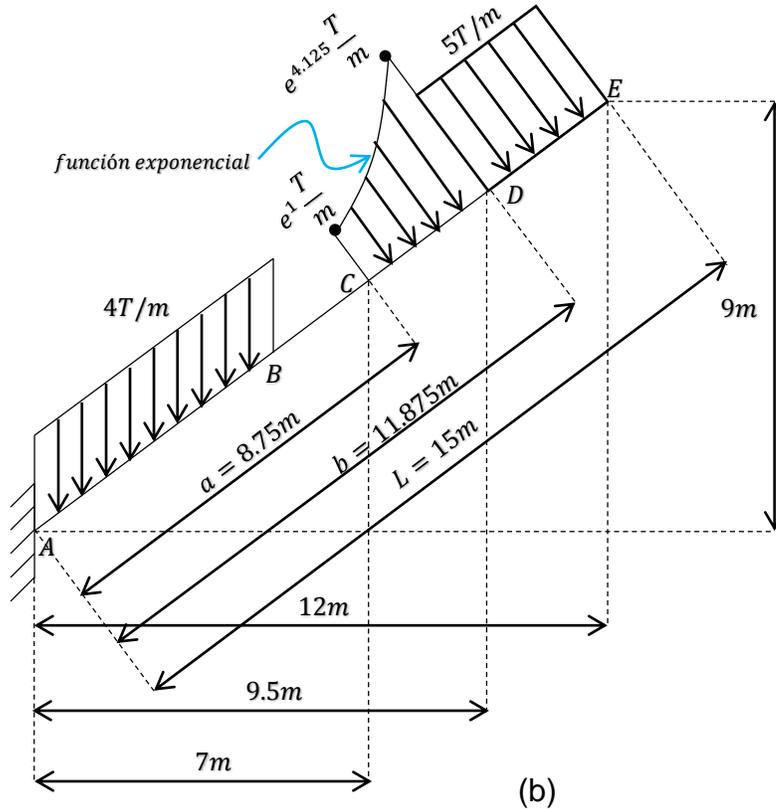
Por trigonometría, figura 1-2b, se tiene

$$L = \sqrt{(12m)^2 + (9m)^2} = 15m$$

$$\frac{L}{12m} = \frac{a}{7m} \Rightarrow a = \frac{(7m)(15m)}{12m} = 8.75m \quad \frac{L}{12m} = \frac{b}{9.5m} \Rightarrow b = \frac{(9.5m)(15m)}{12m} = 11.875m$$

Luego, proponemos una función para la presión descrita por la curva en forma de función exponencial del siguiente modo:

$$y = Ae^{Bx} \text{ --- (1)}$$



De la figura 1-2b, tomando como origen al punto A, obsérvese que

$$\text{en } x = a = 8.75m, y = e^1 T/m = 2.71828T/m$$

$$\text{en } x = b = 11.875m, e^{4.125} T/m = 61.86781T/m$$

Sustituyendo tales puntos conocidos en la ecuación (1) se tiene

$$2.71828 = Ae^{8.75B} \text{ --- (2)}$$

$$61.86781 = Ae^{11.875B} \text{ --- (3)}$$

Las incógnitas A y B pueden ser halladas resolviendo el sistema simultáneo de ecuaciones (2) y (3) usando cualquier método que sea válido; en este caso, se aplicará el método de igualación.

Despejando A de las ecuaciones (2) y (3) respectivamente, tenemos

$$A = \frac{2.71828}{e^{8.75B}} \text{ --- (4)}$$

$$A = \frac{61.86781}{e^{11.875B}} \text{ --- (5)}$$

Al igualar la ecuación (4) con la ecuación (5) y despejar  $B$  resulta

$$\frac{2.71828}{e^{8.75B}} = \frac{61.86781}{e^{11.875B}} \Rightarrow e^{11.875B-8.75B} = \frac{61.86781}{2.71828}$$

$$\ln(e^{3.125B}) = \ln \frac{61.86781}{2.71828} \Rightarrow B = \frac{\ln \frac{61.86781}{2.71828}}{3.125} = 1 \text{ --- (6)}$$

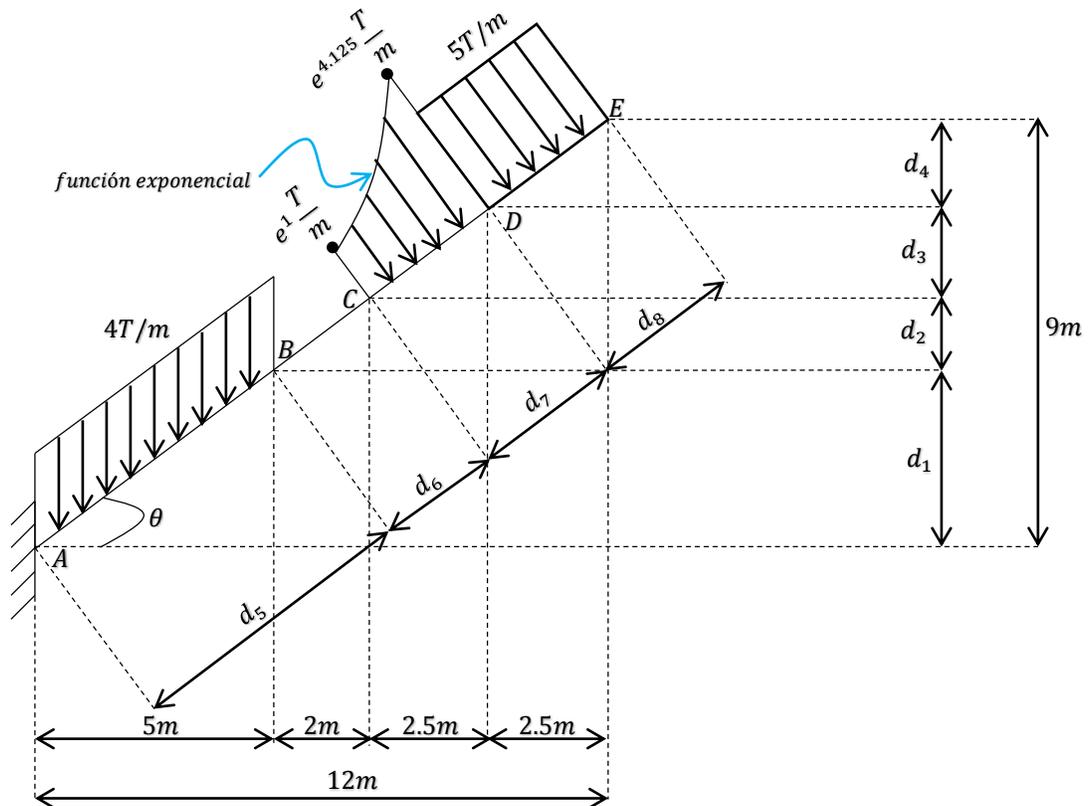
Sustituyendo la ecuación (6) en la ecuación (5) da

$$A = \frac{61.86781}{e^{11.875(1)}} \cong 0.0004307 \text{ --- (7)}$$

Si se combinan las ecuaciones (6) y (7) con la ecuación (1), obtenemos

$$y = 0.0004307e^x$$

El esquema de la figura 1-2c es útil para calcular algunas distancias que serán necesarias al efectuar el análisis restante de la viga.



(c)

Por triángulos semejantes, se deduce que

$$\frac{9}{12} = \frac{d_1}{5} \Rightarrow d_1 = \frac{9(5)}{12} = 3.75m \quad \frac{9}{12} = \frac{d_2}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{9(2)}{12} = 1.5m$$

$$\frac{9}{12} = \frac{d_3}{2.5} \Rightarrow d_3 = \frac{9(2.5)}{12} = 1.875m \quad \frac{9}{12} = \frac{d_4}{2.5} \Rightarrow d_4 = \frac{9(2.5)}{12} = 1.875m$$

Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene

$$d_5 = \sqrt{5^2 + 3.75^2} = 6.25m \quad d_6 = \sqrt{2^2 + 1.5^2} = 2.5m$$

$$d_7 = \sqrt{2.5^2 + 1.875^2} = 3.125m \quad d_8 = d_7 = 3.125m$$

Usando la definición de las funciones trigonométricas resulta

$$\theta = \tan^{-1} \frac{9}{12} = 36.87^\circ \quad \sin \theta = \frac{9}{15} = 0.6 \quad \cos \theta = \frac{12}{15} = 0.8$$

Se calculan las fuerzas resultantes  $A_i$  de las cargas distribuidas y sus puntos de aplicación  $\bar{x}_i$ .

- Carga distribuida uniforme gravitacional.

$$A_1 = (4T/m)(6.25m) = 25T \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{2}(6.25m) = 3.125m$$

- Carga cuya intensidad varía en forma exponencial.

La ecuación para determinar el área bajo la curva es

$$A_2 = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx$$

donde

$L_1$  =limite inferior.

$L_2$  =limite superior.

$y$  =ecuación de la curva.

En consecuencia,

$$A_2 = \int_{8.75}^{11.875} 0.0004307 e^x dx$$

Al resolver la integral de forma indefinida da

$$\int 0.0004307 e^x dx = 0.0004307 \int e^x dx = 0.0004307 e^x$$

Por lo tanto,

$$A_2 = \int_{8.75}^{11.875} 0.0004307 e^x dx = 0.0004307 [e^{11.875} - e^{8.75}] \cong 59.1437T$$

La expresión matemática que permite calcular el centroide del área es

$$\bar{x}_2 = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} x y dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx}$$

Por consiguiente,

$$\bar{x}_2 = \frac{\int_{8.75}^{11.875} (x)(0.0004307e^x)dx}{\int_{8.75}^{11.875} 0.0004307e^x dx}$$

Se procede a resolver la integral del numerador en forma indefinida.

$$\int (x)(0.0004307e^x)dx = 0.0004307 \int xe^x dx$$

$$\text{Sea } u = x \quad dv = e^x dx$$

$$\text{Entonces } du = dx \quad \int dv = v = \int e^x dx = e^x$$

Al integrar por partes tendremos  $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x - 1)$$

Por lo tanto,

$$\int_{8.75}^{11.875} (x)(0.0004307e^x)dx = 0.0004307\{[e^{11.875}(11.875 - 1)] - [e^{8.75}(8.75 - 1)]\} = 651.681$$

Obsérvese que el denominador ya fue resuelto. Finalmente,

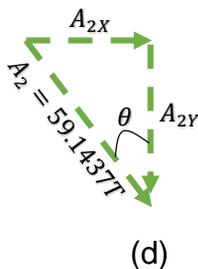
$$\bar{x}_2 = \frac{651.681}{59.1437} \cong 11.0186m$$

- Carga distribuida uniforme ortogonal al eje de la viga.

$$A_3 = (5T/m)(3.125m) = 15.625T \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{2}(3.125m) = 1.5625m$$

Se determinan las componentes rectangulares de las fuerzas resultantes  $A_2$  y  $A_3$  para el plano  $X - Y$ , figuras 1-2d y 1-2e.

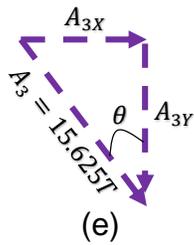
- Para  $A_2 = 59.1437T$



$$\sin \theta = \frac{A_{2X}}{A_2} \Rightarrow A_{2X} = A_2 \sin \theta = 59.1437T(0.6) = 35.4862T$$

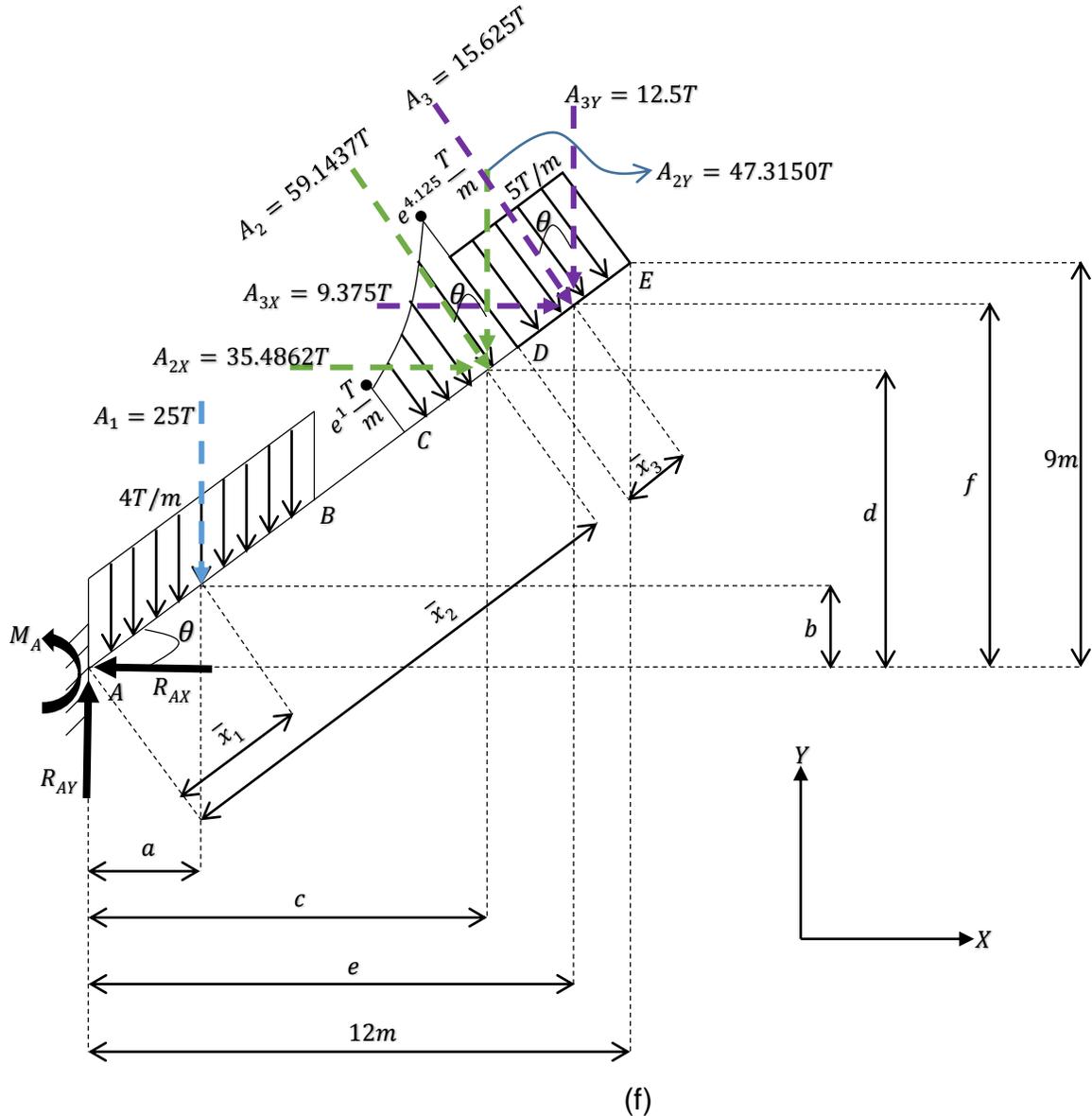
$$\cos \theta = \frac{A_{2Y}}{A_2} \Rightarrow A_{2Y} = A_2 \cos \theta = 59.1437T(0.8) = 47.3150T$$

- Para  $A_3 = 15.625T$



$$\sin \theta = \frac{A_{3X}}{A_3} \Rightarrow A_{3X} = A_3 \sin \theta = 15.625T(0.6) = 9.375T$$

$$\cos \theta = \frac{A_{3Y}}{A_3} \Rightarrow A_{3Y} = A_3 \cos \theta = 15.625T(0.8) = 12.5T$$

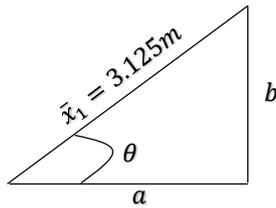


El soporte en A es un empotre y tiene por lo tanto tres incógnitas de reacción, una horizontal ( $R_{AX}$ ), una vertical ( $R_{AY}$ ) y una de momento ( $M_A$ ), las cuales deben ser

debidamente identificadas y cuyos correspondientes sentidos tienen que proponerse arbitrariamente debido a que se desconocen; de cualquier modo, si la magnitud de alguna de ellas resultará negativa al resolver las ecuaciones de equilibrio, esto indicará que el sentido de la fuerza o momento es opuesto al que se supuso.

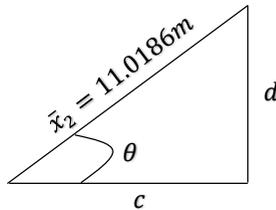
Todo lo expuesto anteriormente puede ser resumido en el diagrama de cargas de la viga, figura 1-2f.

A continuación se calculan las distancias  $a, b, c, d, e, f$  y  $g$  que serán útiles para la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, a partir de aplicar la definición de las funciones trigonométricas en los triángulos rectángulos de la izquierda, figura 1-2g.



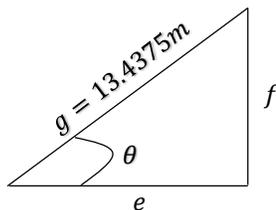
$$b = \bar{x}_1 \sin \theta = (3.125m)(0.6) = 1.875m$$

$$a = \bar{x}_1 \cos \theta = (3.125m)(0.8) = 2.5m$$



$$d = \bar{x}_2 \sin \theta = (11.0186m)(0.6) = 6.6112m$$

$$c = \bar{x}_2 \cos \theta = (11.0186m)(0.8) = 8.8149m$$



$$g = \overline{AD} + \bar{x}_3 = 11.875m + 1.5625m = 13.4375m$$

$$f = g \sin \theta = (13.4375m)(0.6) = 8.0625m$$

$$e = g \cos \theta = (13.4375m)(0.8) = 10.75m$$

(g)

**Ecuaciones de equilibrio.** Se aplican al diagrama de cargas para calcular las incógnitas  $M_A, R_{AX}$  y  $R_{EX}$  utilizando una convención de signos arbitraria.

Tomando momentos alrededor del punto  $A$  considerando los ejes  que pasan por tal punto, se obtiene directamente el valor de  $M_A$ .

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + A_1(a) + A_{2X}(d) + A_{2Y}(c) + A_{3X}(f) + A_{3Y}(e) = 0$$

$$-M_A + 25(2.5) + 35.4862(6.6112) + 47.315(8.8149) + 9.375(8.0625) + 12.5(10.75) = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 924.144T.m \curvearrowright$$

De la suma de fuerzas en cualquier dirección igual a cero, se plantean las dos siguientes ecuaciones de equilibrio para determinar  $R_{AX}$  y  $R_{AY}$ , respectivamente.

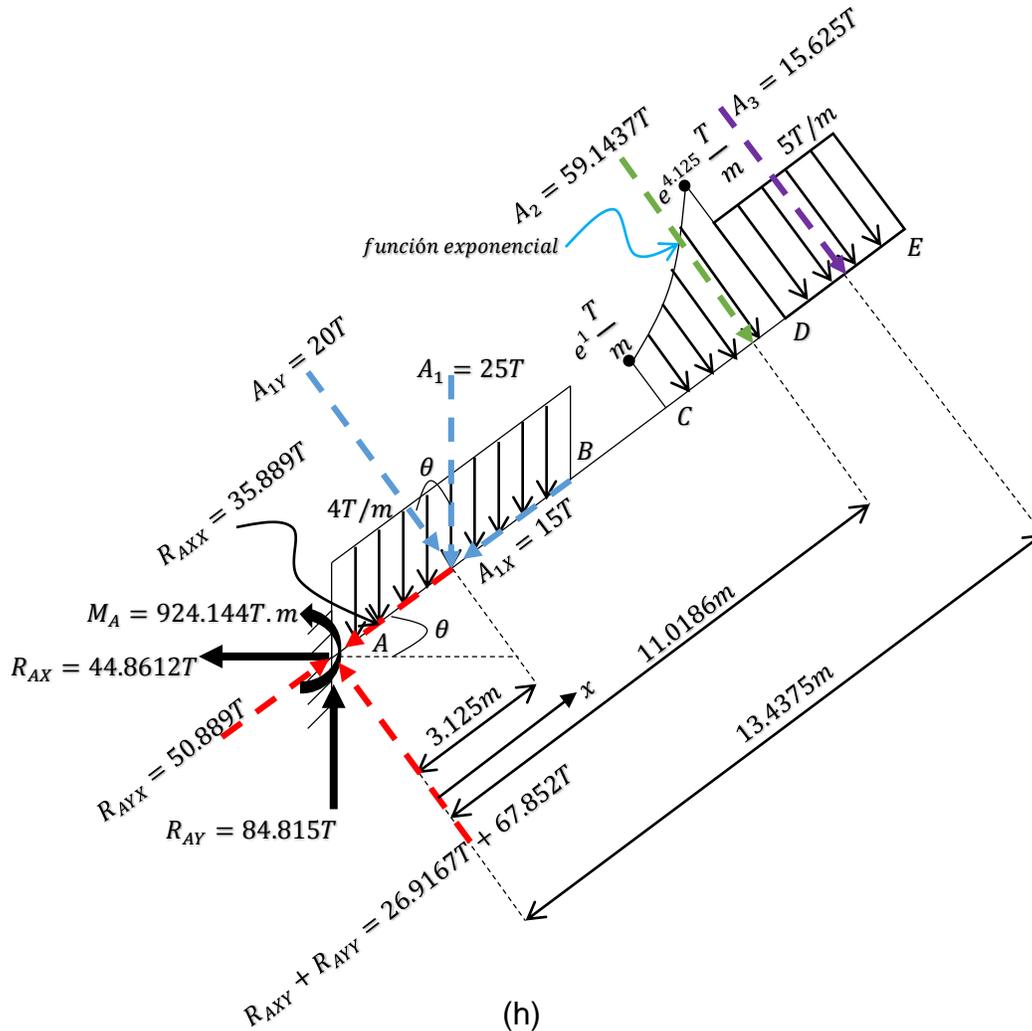
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{AX} + A_{2X} + A_{3X} = 0 \Rightarrow -R_{AX} + 35.4862 + 9.375 = 0$$

$$\therefore R_{AX} = 44.8612T \leftarrow$$

$$\uparrow + \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - A_1 - A_{2Y} - A_{3Y} = 0 \Rightarrow R_{AY} - 25 - 47.3150 - 12.5 = 0$$

$$\therefore R_{AY} = 84.815T \uparrow$$

### Funciones de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento



Los resultados obtenidos se muestran en la figura 1-2h.

Las variaciones de la fuerza cortante  $V_i$ , la fuerza normal  $N_i$  y el momento  $M_i$  en función de la posición  $x$  de un punto arbitrario a lo largo de la viga pueden obtenerse mediante el método de las secciones (efectuando cortes).

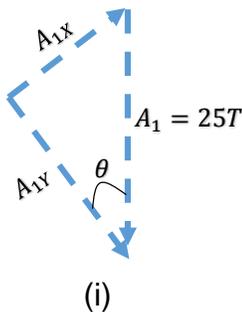
La función de la fuerza cortante será discontinua en los puntos donde el tipo o la magnitud de la carga distribuida cambia, o bien donde se apliquen fuerzas concentradas. La función del momento flector, será discontinua, además de lo anterior, en los puntos donde se apliquen momentos de par. En ambos casos, la carga distribuida y la fuerza concentrada, o una de sus componentes, actúan perpendicularmente al eje de la viga. Por su parte, la función de la fuerza normal será discontinua en los puntos donde se aplique una carga puntual o donde el tipo o la magnitud de la carga distribuida cambia, pero ahora todas estas cargas, o una de sus componentes, actúan en la dirección del eje de la viga.

La distribución de la carga actuante sobre la viga presenta discontinuidades en los puntos  $B, C$  y  $D$ ; por lo tanto, para obtener expresiones algebraicas que definan la variación de las acciones internas (o elementos mecánicos) es necesario cortar a la estructura perpendicularmente a su eje a través de secciones arbitrarias en los tramos  $A - B, B - C, C - D$  y  $E - D$ .

Se ha definido una sola coordenada  $x$  para toda la viga, por lo que es válida para toda la región  $A - D$  ( $0 \leq x \leq 15m$ ), su origen ha sido asociado en  $A$ , y es positiva hacia la derecha y hacia arriba, sobre el eje de la estructura.

Como podrá observarse más adelante en cada diagrama de cuerpo libre surgido al realizar algún corte, el equilibrio se efectuará utilizando los ejes que coinciden con las líneas de acción de las fuerzas cortante y normal. Por tal motivo, la carga concentrada equivalente  $A_1$  y las reacciones  $R_{AX}$  y  $R_{AY}$  son descompuestas en sus componentes rectangulares para los ejes que coinciden con las líneas de acción de la fuerza cortante y de la fuerza normal, figuras 1-2i, 1-2j y 1-2k.

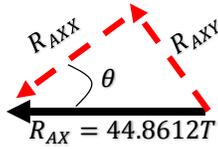
- Para  $A_1 = 25T$



$$\sin \theta = \frac{A_{1X}}{A_1} \Rightarrow A_{1X} = A_1 \sin \theta = 25T(0.6) = 15T$$

$$\cos \theta = \frac{A_{1Y}}{A_1} \Rightarrow A_{1Y} = A_1 \cos \theta = 25T(0.8) = 20T$$

- Para  $R_{AX} = 44.8612T$

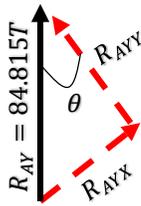


(j)

$$\cos \theta = \frac{R_{AXX}}{R_{AX}} \Rightarrow R_{AXX} = R_{AX} \cos \theta = 44.8612T(0.8) = 35.8890T$$

$$\sin \theta = \frac{R_{AXY}}{R_{AX}} \Rightarrow R_{AXY} = R_{AX} \sin \theta = 44.8612T(0.6) = 26.9167T$$

- Para  $R_{AY} = 84.815T$



(k)

$$\sin \theta = \frac{R_{AYX}}{R_{AY}} \Rightarrow R_{AYX} = R_{AY} \sin \theta = 84.815T(0.6) = 50.889T$$

$$\cos \theta = \frac{R_{AYY}}{R_{AY}} \Rightarrow R_{AYY} = R_{AY} \cos \theta = 84.815T(0.8) = 67.852T$$

Tome en cuenta además, que las líneas de acción de las fuerzas resultantes  $A_2$  y  $A_3$  al ser perpendiculares al eje de la viga coinciden con la línea de acción de la fuerza cortante, así que sus componentes rectangulares para los ejes  $X - Y$  se vuelven innecesarias a partir de ahora en el análisis restante de este ejercicio y por ello han sido omitidas en el diagrama de cargas, aunque bien pudieron haberse dejado.

Para una mayor facilidad en los cálculos, se determinan las componentes rectangulares  $F_Y$  y  $F_X$  de la resultante, cuyas líneas de acción coinciden con las de la fuerza cortante  $V_1$  y la fuerza normal  $N_1$ , respectivamente, del sistema de fuerzas concurrentes  $R_{AY}$  y  $R_{AX}$ , al sumar las componentes rectangulares de dichas fuerzas concurrentes vectorialmente, es decir,

$$F_X = R_{AYX} - R_{AXX} = 50.889T - 35.889T = 15T \quad \nearrow$$

$$F_Y = R_{AXY} + R_{AYY} = 26.9167T + 67.852T = 94.7687T \quad \searrow$$

A continuación se aplica el método de las secciones.

Corte en el tramo ① ( $A - B$ ). Se secciona la viga en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $A - B$ ) a una distancia  $x$  del punto  $A$ . En la figura 1-2l se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud  $x$ .

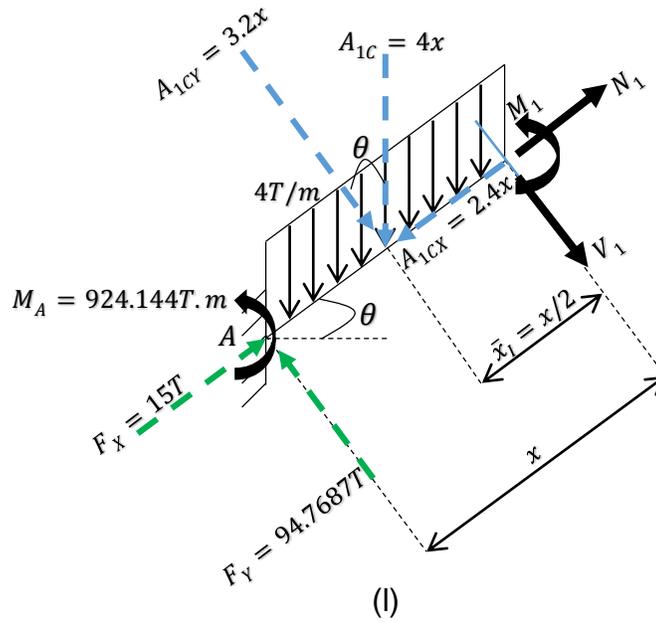
$$0 \leq x \leq 6.25m$$

La fuerza resultante de la carga uniforme distribuida gravitacional del corte es

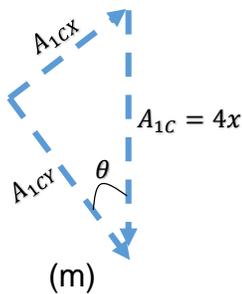
$$A_{1C} = (4T/m)(x) = 4x$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_I = \frac{1}{2}(x) = \frac{x}{2}$$



Con base en la figura 1-2m, las componentes rectangulares de la carga concentrada equivalente  $A_{1C}$  cuyas líneas de acción coinciden con las de  $N_1$  y  $V_1$  son



$$\sin \theta = \frac{A_{1CX}}{A_{1C}} \Rightarrow A_{1CX} = A_{1C} \sin \theta = 4x(0.6) = 2.4x$$

$$\cos \theta = \frac{A_{1CY}}{A_{1C}} \Rightarrow A_{1CY} = A_{1C} \cos \theta = 4x(0.8) = 3.2x$$

El equilibrio estático del cuerpo libre implica que

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-924.144 + 94.7687(x) - 3.2x\left(\frac{x}{2}\right) - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = 94.7687x - 1.6x^2 - 924.144$$

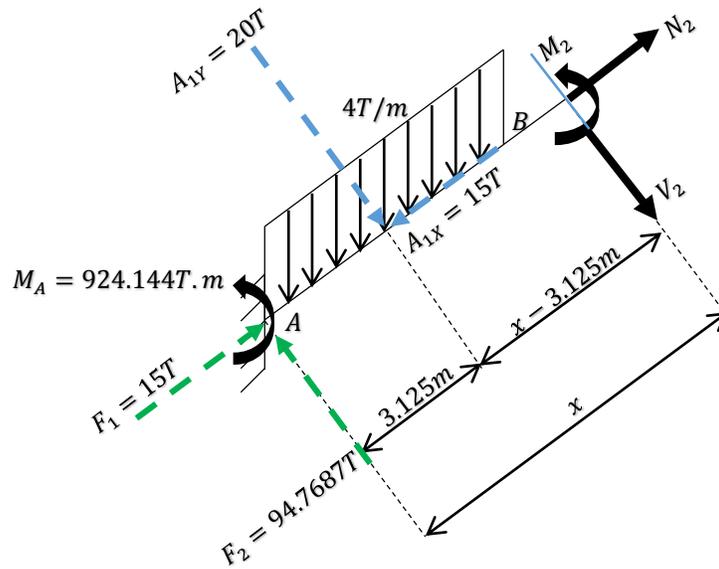
en  $x = 0, M_1 = -924.144T.m$ ; en  $x = 6.25m, M_1 = -394.3396T.m$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = \frac{d(94.7687x - 1.6x^2 - 924.144)}{dx} = 94.7687 - 3.2x$$

$$\nearrow + \sum FX = 0 \Rightarrow 15 - 2.4x + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = 2.4x - 15$$

Corte en el tramo ②(B - C). En la figura 1-2n se muestra un diagrama de cuerpo libre de la sección cortada. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$6.25m \leq x \leq 8.75m$$



(n)

$$\curvearrowright + \sum M_{corte} = 0$$

$$-924.144 + 94.7687(x) - 20(x - 3.125) - M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = 74.7687x - 861.644$$

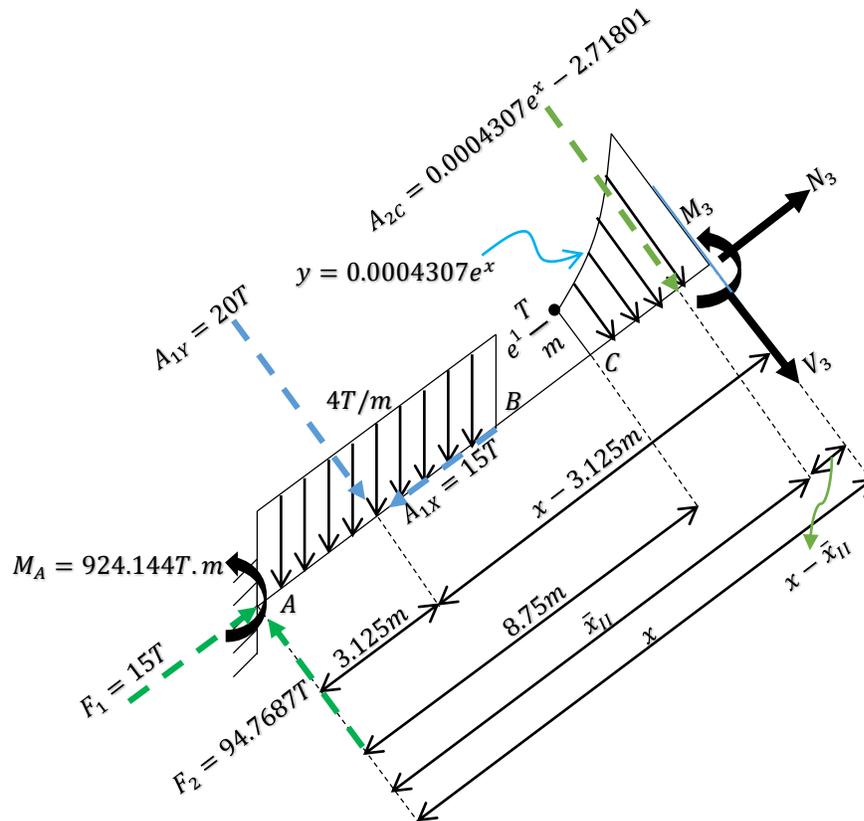
en  $x = 6.25m, M_2 = -394.3396T.m$ ; en  $x = 8.75m, M_2 = -207.4179T.m$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{d(74.7687x - 861.644)}{dx} = 74.7687$$

$$\nearrow + \sum FX = 0 \Rightarrow 15 - 15 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = 0$$

Corte en el tramo ③(C – D). En la figura 1-2ñ se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento inferior de la viga que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo C – D.

$$8.75m \leq x \leq 11.875m$$



(ñ)

La carga concentrada equivalente de la presión del corte cuya intensidad es descrita por la función exponencial es

$$A_{2c} = \int_{8.75}^x 0.0004307e^x dx = 0.0004307(e^x - e^{8.75}) = 0.0004307e^x - 2.71801$$

y su línea de acción está localizada a una distancia de

$$\bar{x}_{II} = \frac{\int_{8.75}^x (x)(0.0004307e^x) dx}{\int_{8.75}^x 0.0004307e^x dx}$$

Resolviendo el numerador se tiene

$$\int_{8.75}^x (x)(0.0004307e^x)dx = 0.0004307\{[e^x(x-1)] - [e^{8.75}(8.75-1)]\}$$

$$= 0.0004307xe^x - 0.0004307e^x - 21.0646$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_{II} = \frac{0.0004307xe^x - 0.0004307e^x - 21.0646}{0.0004307e^x - 2.71801}$$

El equilibrio estático del cuerpo libre requiere que

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$-924.144 + 94.7687(x) - 20(x - 3.125) - (0.0004307e^x - 2.71801)$$

$$\left(x - \frac{0.0004307xe^x - 0.0004307e^x - 21.0646}{0.0004307e^x - 2.71801}\right) - M_3 = 0$$

$$M_3 = -0.0004307e^x + 77.4867x - 882.7086$$

en  $x = 8.75m, M_3 = -207.418T.m$ ; en  $x = 11.875m, M_2 = -24.4157T.m$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = \frac{d(-0.0004307e^x + 77.4867x - 882.7086)}{dx} = -0.0004307e^x + 77.4867$$

$$\nearrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_3 = 0$$

Corte en el tramo ④ ( $D - E$ ). Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $D - E$ ) a una distancia  $x$  de  $A$ ; en la figura 1-2o se ofrece el diagrama de cuerpo libre que representa la porción de la estructura ubicada por debajo del corte.

La fuerza resultante de la carga uniforme distribuida ortogonal al eje de la viga del corte es

$$A_{3C} = (x - 11.875)(5) = 5x - 59.375$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_{III} = \frac{1}{2}(x - 11.875) = \frac{1}{2}x - 5.9375$$

Las acciones internas entre los puntos  $D$  y  $E$  se definen como

$$11.875m \leq x \leq 15m$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$-924.144 + 94.7687(x) - 20(x - 3.125) - 59.1437(x - 11.0186)$$

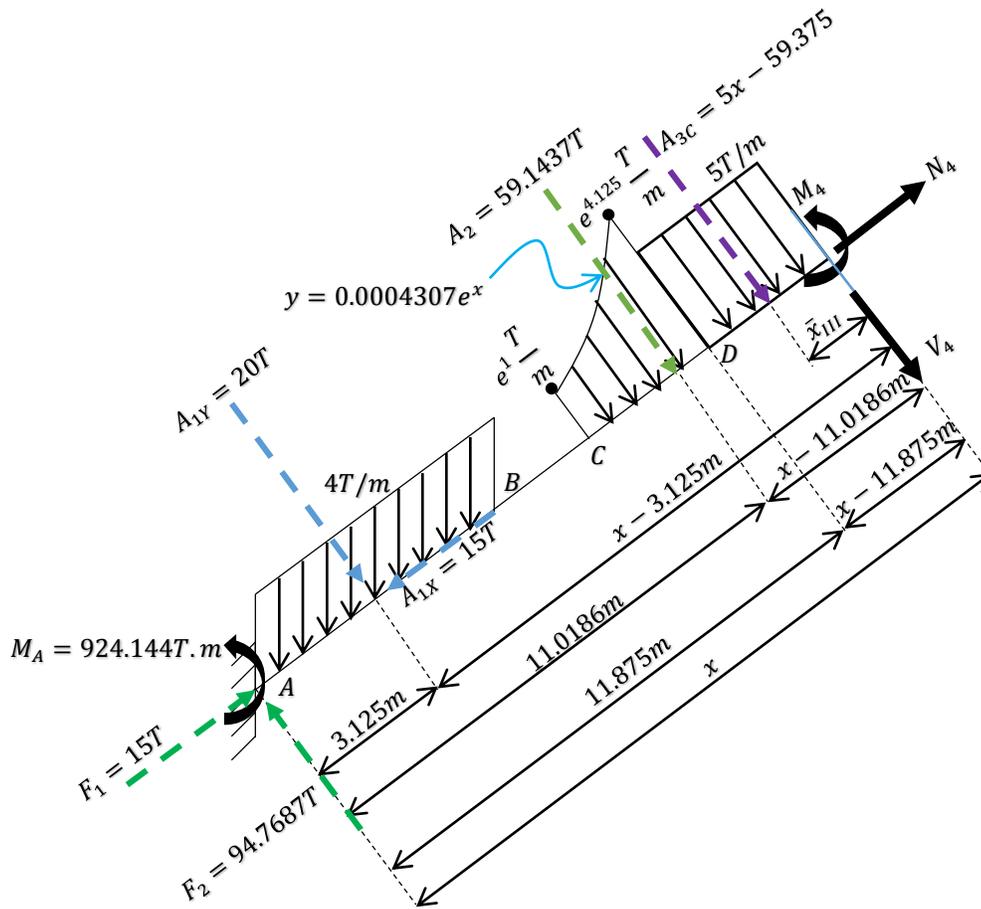
$$-(5x - 59.375) \left( \frac{1}{2}x - 5.9375 \right) - M_4 = 0$$

$$M_4 = -2.5x^2 + 75x - 562.50299$$

en  $x = 11.875m$ ,  $M_4 = -24.416T \cdot m$ ; en  $x = 15m$ ,  $M_4 = 0$

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx} = \frac{d(-2.5x^2 + 75x - 562.50299)}{dx} = -5x + 75$$

$$\nearrow + \sum FX = 0 \Rightarrow N_4 = 0$$



(o)

**Ejercicio 1.3** Calcule las fuerzas reactivas en los soportes y determine las funciones del momento flector y de las fuerzas cortante y normal de la viga isostática mostrada en la figura 1-3a. Obsérvese que en los extremos izquierdo y derecho están aplicadas cargas puntuales de  $7T$  con una pendiente de 3:4 y de  $5T$  con una pendiente de 1:1 respectivamente; sobre la región  $B - D$  se extiende una carga cuya intensidad varía linealmente desde 0 en el punto  $B$  hasta  $3T/m$  en el punto  $D$  y sobre la región  $D - F$  la estructura soporta una carga distribuida irregularmente en la que se conocen seis puntos de intensidad de carga cuyos valores son indicados.

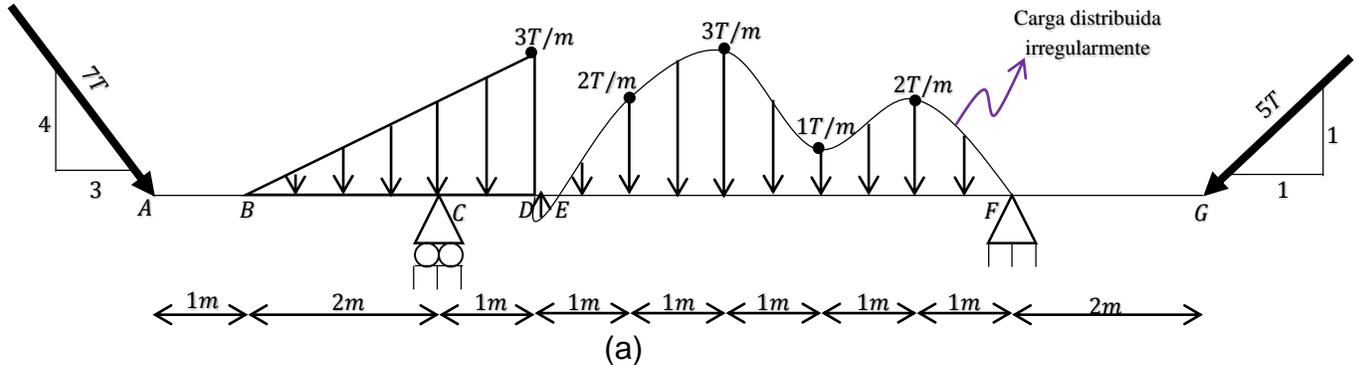


Figura 1-3

**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los apoyos**

**Diagrama de cargas.** En primer lugar, construiremos una función polinomial que ajuste a los puntos conocidos de la carga distribuida irregularmente; como se tienen seis datos, se propone una función polinómica de grado cinco ( $n_{\text{datos}} - 1$ ) de la siguiente forma:

$$y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \text{ --- (I)}$$

Tomando como origen al punto  $A$  se sabe que

$$\text{en } x = 4m, y = 0; \text{ en } x = 5m, y = 2T/m; \text{ en } x = 6m, y = 3T/m$$

$$\text{en } x = 7m, y = 1T/m; \text{ en } x = 8m, y = 2T/m; \text{ en } x = 9m, y = 0$$

Si sustituimos los valores anteriores en la ecuación (I), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = a(4)^5 + b(4)^4 + c(4)^3 + d(4)^2 + e(4) + f$$

$$0 = 1024a + 256b + 64c + 16d + 4e + f \text{ --- (1)}$$

$$2 = a(5)^5 + b(5)^4 + c(5)^3 + d(5)^2 + e(5) + f$$

$$2 = 3125a + 625b + 125c + 25d + 5e + f \text{ --- (2)}$$

$$3 = a(6)^5 + b(6)^4 + c(6)^3 + d(6)^2 + e(6) + f$$

$$3 = 7776a + 1296b + 216c + 36d + 6e + f \text{ --- (3)}$$

$$1 = a(7)^5 + b(7)^4 + c(7)^3 + d(7)^2 + e(7) + f$$

$$1 = 16807a + 2401b + 343c + 49d + 7e + f \text{ --- (4)}$$

$$2 = a(8)^5 + b(8)^4 + c(8)^3 + d(8)^2 + e(8) + f$$

$$2 = 32768a + 4096b + 512c + 64d + 8e + f \text{ --- (5)}$$

$$0 = a(9)^5 + b(9)^4 + c(9)^3 + d(9)^2 + e(9) + f$$

$$0 = 59049a + 6561b + 729c + 81d + 9e + f \text{ --- (6)}$$

Expresando el sistema simultáneo de ecuaciones en forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ --- (7)}$$

Resolviendo el sistema (7) resulta

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.166667 \\ 5.333333 \\ -66.83333 \\ 409.167 \\ -1221.5 \\ 1422 \end{pmatrix}$$

Si se reemplazan los resultados obtenidos en la ecuación (I), entonces la función polinomial que describe la intensidad de la carga distribuida irregularmente es

$$y = -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422$$

Se calculan las cargas concentradas equivalentes  $A_i$  de las presiones, así como su punto de aplicación  $\bar{x}_i$ .

- Carga cuya intensidad varía en forma lineal.

$$A_1 = \frac{(3T/m)(3m)}{2} = 4.5T \quad \bar{x}_1 = \frac{2}{3}(3m) = 2m$$

- Carga distribuida irregularmente.

Para esta carga se conocían seis puntos de intensidad inicialmente; realmente no se sabía el comportamiento exacto de la curva que describe la carga distribuida hasta que se calculó la ecuación y se graficó. Fue así como se pudo observar que

una pequeña porción de la carga distribuida, específicamente la que se extiende de 4m a 4.45m, actúa hacia arriba; lógicamente en  $x = 4.45m, y = 0$ .

La fuerza resultante para esta porción de carga distribuida es

$$A_2 = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx$$

$$A_2 = \int_4^{4.45} \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$A_2 = \left[ -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x \right]_4^{4.45}$$

$$A_2 = -\frac{1}{36}(4.45^6 - 4.00^6) + \frac{16}{15}(4.45^5 - 4.00^5) - \frac{401}{24}(4.45^4 - 4.00^4) + \frac{136389}{1000}(4.45^3 - 4.00^3) - \frac{2443}{4}(4.45^2 - 4.00^2) + 1422(4.45 - 4.00) \approx -0.12 T$$

El signo negativo indica que la resultante  $A_2$  actúa hacia arriba. Su punto de aplicación es

$$\bar{x}_2 = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\int_4^{4.45} (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}{\int_4^{4.45} \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}$$

Resolviendo el numerador se tiene

$$\int_4^{4.45} (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$= \int_4^{4.45} \left( -\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x \right) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 \right]_4^{4.45}$$

$$= -\frac{1}{42}(4.45^7 - 4.00^7) + \frac{8}{9}(4.45^6 - 4.00^6) - \frac{401}{30}(4.45^5 - 4.00^5) + \frac{409167}{4000}(4.45^4 - 4.00^4) - \frac{2443}{6}(4.45^3 - 4.00^3) + 711(4.45^2 - 4.00^2) \approx -0.49$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_2 = \frac{-0.49}{-0.12} \approx 4.083m$$

Ahora se analiza la parte de la carga distribuida que actúa hacia abajo, es decir, la que se extiende de 4.45m a 9m. La fuerza resultante es

$$A_3 = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx$$

$$A_3 = \int_{4.45}^9 \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x \right]_{4.45}^9$$

$$= -\frac{1}{36}(9^6 - 4.45^6) + \frac{16}{15}(9^5 - 4.45^5) - \frac{401}{24}(9^4 - 4.45^4)$$

$$+ \frac{136389}{1000}(9^3 - 4.45^3) - \frac{2443}{4}(9^2 - 4.45^2) + 1422(9 - 4.45) = 8.87 T$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_3 = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\int_{4.45}^9 (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}{\int_{4.45}^9 \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}$$

Resolviendo el numerador se tiene

$$\int_{4.45}^9 (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$= \int_{4.45}^9 \left( -\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x \right) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 \right]_{4.45}^9$$

$$= -\frac{1}{42}(9^7 - 4.45^7) + \frac{8}{9}(9^6 - 4.45^6) - \frac{401}{30}(9^5 - 4.45^5) + \frac{409167}{4000}(9^4 - 4.45^4)$$

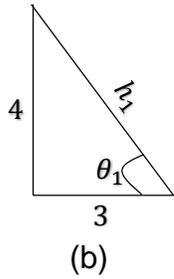
$$- \frac{2443}{6}(9^3 - 4.45^3) + 711(9^2 - 4.45^2) = 59.3$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_3 = \frac{59.3}{8.87} \approx 6.685m$$

Luego, se resuelven las fuerzas puntuales  $F_1 = 7T$  y  $F_2 = 5T$  en sus componentes rectangulares  $X - Y$ , figuras 1-3b, 1-3c y 1-3d, 1-3e, respectivamente.

- Para  $F_1 = 7T$

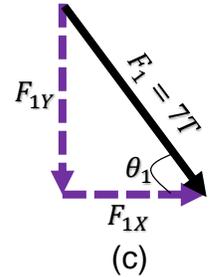


$$h_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

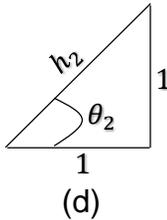
$$\sin \theta_1 = \frac{4}{5}; \cos \theta_1 = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{F_{1X}}{7T} \Rightarrow F_{1X} = 7T(\cos \theta_1) = 7T\left(\frac{3}{5}\right) = 4.2T$$

$$\sin \theta_1 = \frac{F_{1Y}}{7T} \Rightarrow F_{1Y} = 7T(\sin \theta_1) = 7T\left(\frac{4}{5}\right) = 5.6T$$



- Para  $F_2 = 5T$

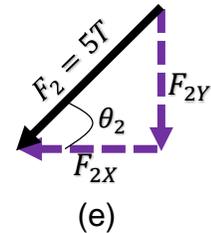


$$h_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

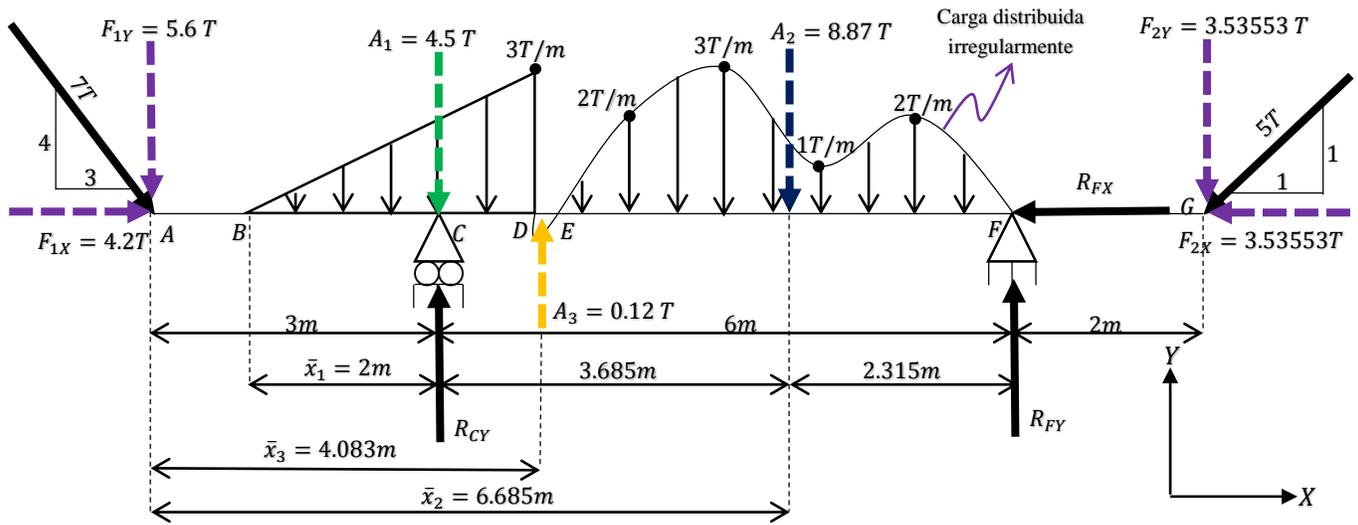
$$\sin \theta_2 = \cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{F_{2Y}}{5T} \Rightarrow F_{2Y} = 5T(\sin \theta_2) = 5T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3.53553T$$

$$\cos \theta_2 = \frac{F_{2X}}{5T} \Rightarrow F_{2X} = 5T(\cos \theta_2) = 5T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3.53553T$$



El soporte  $C$  es un rodillo, por lo que se genera una fuerza reactiva vertical  $R_{CY}$ , mientras que el soporte  $F$  es un pasador y tiene dos incógnitas de reacción, una horizontal ( $R_{FX}$ ) y una vertical ( $R_{FY}$ ). En consecuencia, el diagrama de cargas de la viga, figura 1-3f, es



(f)

**Ecuaciones de equilibrio.** Se aplican al diagrama de cargas para calcular las incógnitas  $R_{CY}$  y  $R_{EY}$  y  $R_{EX}$  usando una convención de signos arbitraria.

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 4.2 - R_{EX} - 3.53553 = 0 \Rightarrow \therefore R_{EX} = 0.66447T \leftarrow$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MC = 0 &\Rightarrow -5.6(3) - 0.12(1.083) + 8.87(3.685) - R_{FY}(6) + 3.53553(8) = 0 \Rightarrow \\ &\therefore R_{FY} = 7.34T \uparrow \end{aligned}$$

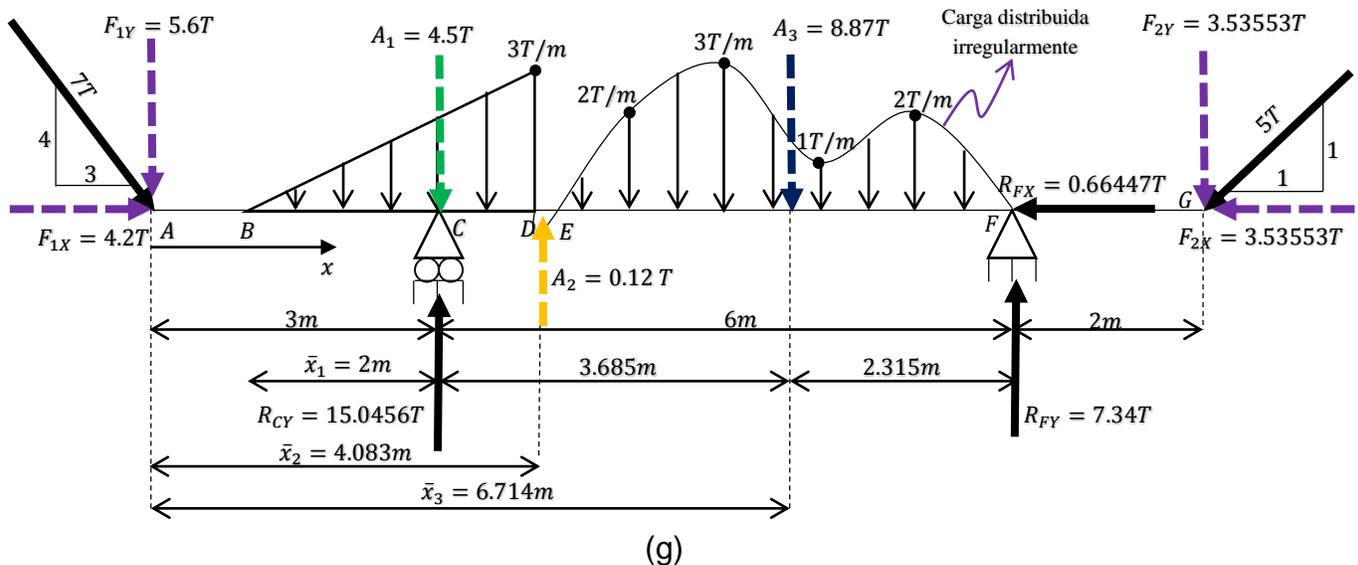
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - 4.5 + R_{CY} + 0.12 - 8.87 + 7.34 - 3.53553 = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 15.0456T \uparrow$$

La fuerza reactiva vertical del soporte en  $C$  también se puede obtener tomando momentos alrededor de  $F$ .

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum ME = 0 &\Rightarrow 3.53553(2) - 8.87(2.315) - 4.5(6) + 0.12(4.917) + R_{CY}(6) - 5.6(9) = 0 \\ &\therefore R_{CY} = 15.0455T \uparrow \end{aligned}$$

### Funciones de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento

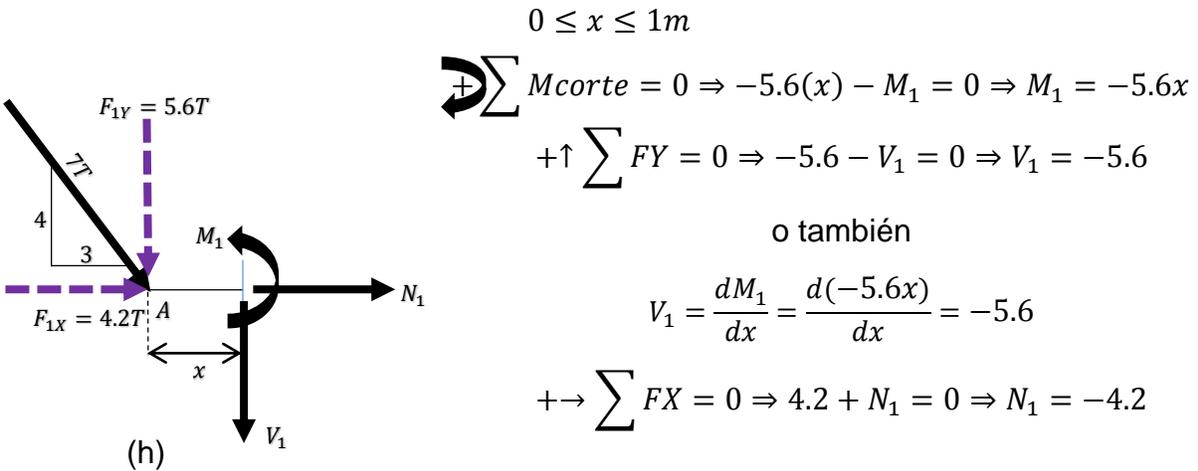
En la figura 1-3g se muestran los resultados obtenidos.



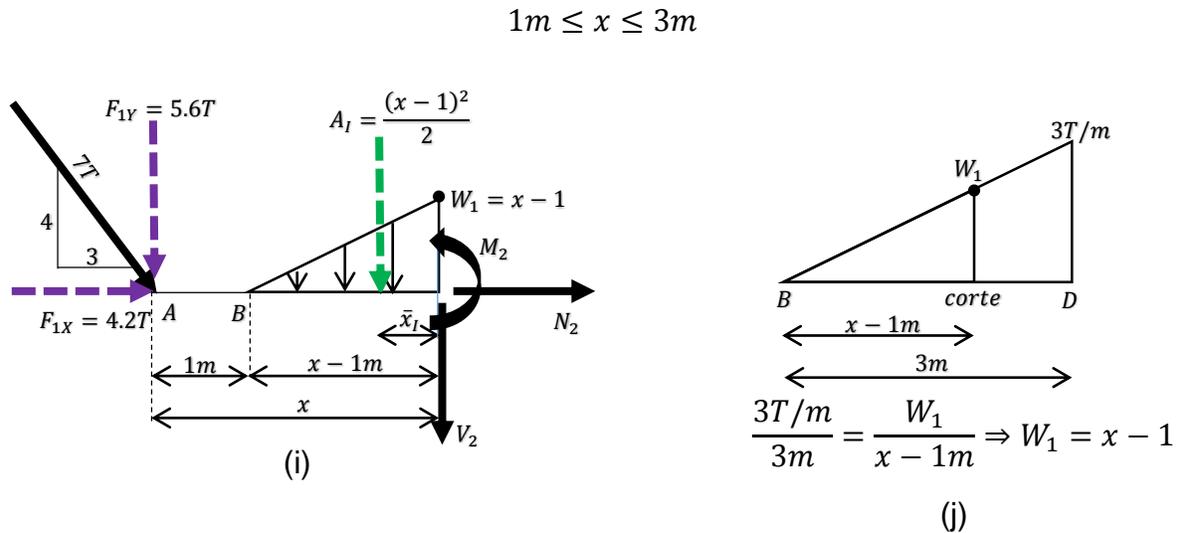
La distribución de la carga que actúa sobre la viga presenta discontinuidades en los puntos  $B, C, D, E$  y  $F$ ; así que, para obtener expresiones algebraicas que definan la variación de los elementos mecánicos es necesario cortar a la estructura perpendicularmente a su eje a través de secciones arbitrarias en los tramos  $A - B, B - C, C - D, D - E$  y  $F - G$ .

Se ha definido una sola coordenada  $x$  para toda la viga, por lo que es válida para toda la región  $A - G$  ( $0 \leq x \leq 11m$ ), su origen ha sido asociado en  $A$ , y es positiva hacia la derecha.

Corte en el tramo ① ( $A - B$ ). Se secciona la viga en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $(A - B)$ ) a una distancia  $x$  del punto  $A$ . En la figura 1-3h se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud  $x$ . Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene



Corte en el tramo ② ( $B - C$ ). En la figura 1-3i se muestra un diagrama de cuerpo libre de la sección cortada. A la derecha, figura 1-3j, se proporciona un esquema para determinar el valor en función de  $x$  de la intensidad  $W_1$ .



La fuerza resultante de la carga triangular cortada es

$$A_I = \frac{(x-1)(x-1)}{2} = \frac{(x-1)^2}{2}$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_l = \frac{1}{3}(x - 1)$$

Por lo tanto,

$$\curvearrowleft \sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -5.6x - \frac{(x-1)^2}{2} \left[ \frac{1}{3}(x-1) \right] - M_2 = 0$$

$$M_2 = -5.6x - \frac{1}{6}(x-1)^3 = -5.6x - \frac{1}{6}[(x)^3 - 3(x)^2(1) + 3(1)^2(x) - (1)^3]$$

$$= -5.6x - \frac{1}{6}[x^3 - 3x^2 + 3x - 1] = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6.1x + \frac{1}{6}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - \frac{(x-1)^2}{2} - V_2 = 0$$

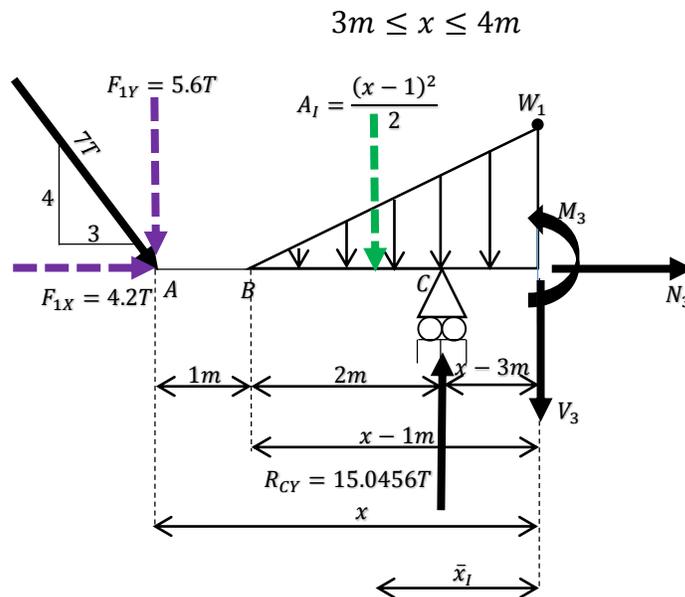
$$V_2 = -5.6 - \frac{(x)^2 - 2(x)(1) + (1)^2}{2} = -5.6 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + x - 6.1$$

o también

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6.1x + \frac{1}{6}\right)}{dx} = -\frac{1}{2}x^2 + x - 6.1$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_2 = -4.2$$

Corte en el tramo ③(C-D). Se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento izquierdo de la estructura que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo C-D, figura 1-3k. El equilibrio estático del cuerpo libre implica que



$$+\circlearrowleft \sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -5.6x + 15.0456(x - 3) - \frac{(x - 1)^2}{2} \left[ \frac{1}{3}(x - 1) \right] - M_3 = 0$$

$$M_3 = -5.6x + 15.0514x - 45.1542 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$$

$$M_3 = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 8.9456x - 44.9701$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -5.6 - \frac{(x - 1)^2}{2} + 15.0456 - V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 8.9456$$

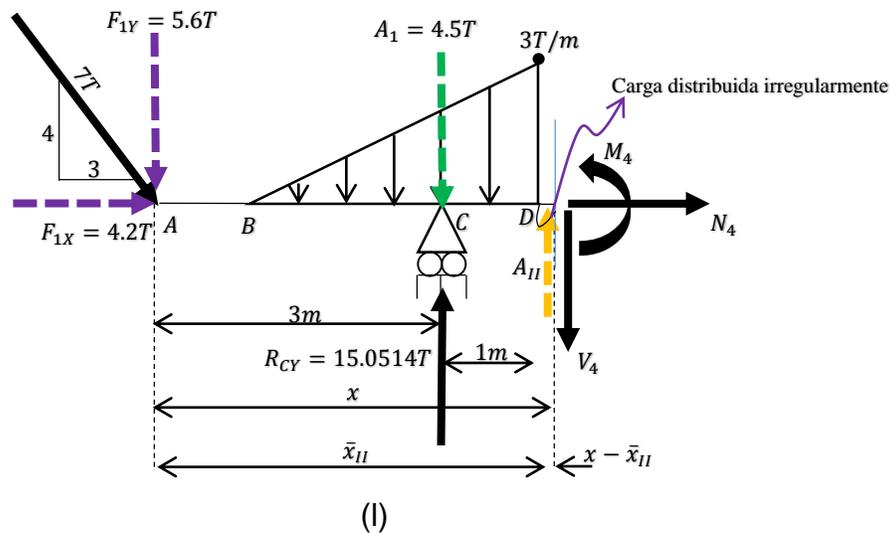
o también

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = \frac{d\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 8.9456x - 44.9701\right)}{dx} = -\frac{1}{2}x^2 + x + 8.9456$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow N_3 = -4.2$$

Corte en el tramo ④ (D - E). Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento (D - E) a una distancia  $x$  de A; a continuación se ofrece el diagrama de cuerpo libre que representa la porción de la estructura ubicada a la izquierda del corte, figura 1-3I.

$$4m \leq x \leq 4.45m$$



La carga concentrada equivalente de la carga distribuida irregularmente cortada es

$$A_{II} = \int_4^x \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1346.05$$

y su línea de acción está localizada a una distancia de

$$\bar{x}_{II} = \frac{\int_4^x (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}{\int_4^x \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}$$

Resolviendo el numerador tenemos

$$\int_4^x (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx$$

$$\int_4^x \left( -\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x \right) dx$$

$$= -\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1067.35$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_I = \frac{-\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1067.35}{-\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1346.05}$$

Las acciones internas entre los puntos  $D$  y  $E$  quedan definidas como

$$\begin{aligned} & \sum \curvearrowright M_{corte} = 0 \\ & -5.6x - 4.5(x - 3) + 15.0456(x - 3) + A_{1c}(x - \bar{x}_I) - M_4 = 0 \\ M_4 = & -\frac{1}{252}x^7 + \frac{8}{45}x^6 - \frac{401}{120}x^5 + \frac{136389}{4000}x^4 - \frac{2443}{12}x^3 + 711x^2 - 1341.1044x \\ & + 1035.7132 \\ & + \uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - 4.5 + 15.0456 + A_{1c} - V_4 = 0 \end{aligned}$$

$$V_4 = -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1346.1044$$

o también

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx}$$

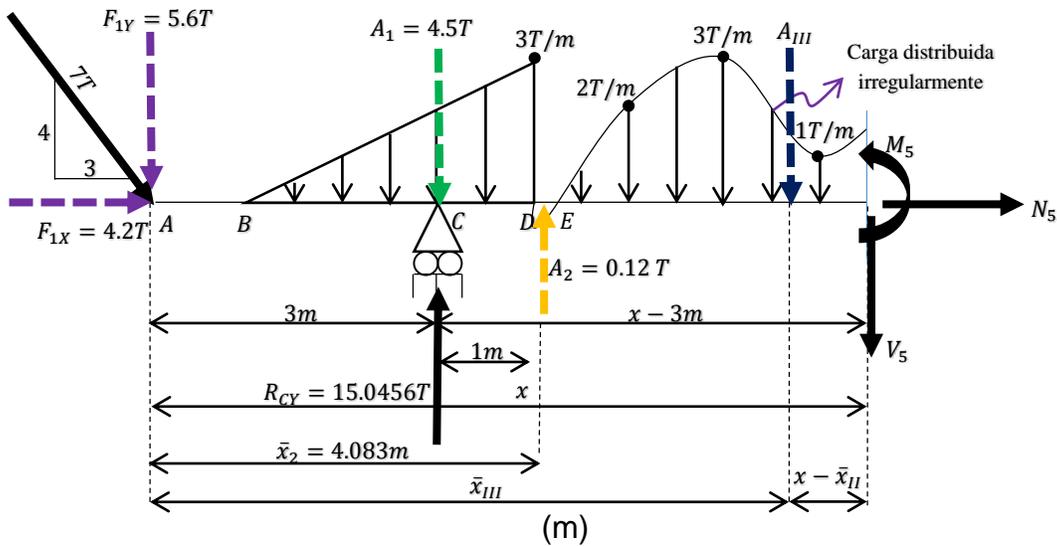
$$= \frac{d\left(-\frac{1}{252}x^7 + \frac{8}{45}x^6 - \frac{401}{120}x^5 + \frac{136389}{4000}x^4 - \frac{2443}{12}x^3 + 711x^2 - 1341.1044x + 1035.7132\right)}{dx}$$

$$V_4 = -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1346.1044$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_4 = -4.2$$

Corte en el tramo ⑤ (E – F). Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento (E – F) a una distancia  $x$  de A; en la figura 1-3m se representa el diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo de la viga. En consecuencia,

$$4.45m \leq x \leq 9m$$



La carga concentrada equivalente de la carga distribuida irregularmente cortada es

$$A_{III} = \int_{4.45}^x \left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422\right) dx$$

$$= -\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1345.935$$

y su línea de acción está localizada a una distancia de

$$\bar{x}_{III} = \frac{\int_{4.45}^x (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}{\int_{4.45}^x \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx}$$

Resolviendo el numerador tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{4.45}^x (x) \left( -\frac{1}{6}x^5 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{401}{6}x^3 + 409.167x^2 - 1221.5x + 1422 \right) dx \\ & \int_{4.45}^x \left( -\frac{1}{6}x^6 + \frac{16}{3}x^5 - \frac{401}{6}x^4 + 409.167x^3 - 1221.5x^2 + 1422x \right) dx \\ & -\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1066.85875 \end{aligned}$$

El denominador ya fue resuelto. Por lo tanto,

$$\bar{x}_{III} = \frac{-\frac{1}{42}x^7 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{401}{30}x^5 + \frac{409167}{4000}x^4 - \frac{2443}{6}x^3 + 711x^2 - 1066.85875}{-\frac{1}{36}x^6 + \frac{16}{15}x^5 - \frac{401}{24}x^4 + \frac{136389}{1000}x^3 - \frac{2443}{4}x^2 + 1422x - 1345.935}$$

Las acciones internas entre los puntos *D* y *E* quedan definidas como

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$-5.6x - 4.5(x - 3) + 15.0456(x - 3) + 0.12(x - 4.083) - A_{2c}(x - \bar{x}_{III}) - M_4 = 0$$

$$M_5 = \frac{1}{252}x^7 - \frac{8}{45}x^6 + \frac{401}{120}x^5 - \frac{136389}{4000}x^4 + \frac{2443}{12}x^3 - 711x^2 + 1351.0006x - 1098.9855$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - 4.5 + 15.0456 + 0.12 - A_{c2} - V_4 = 0$$

$$V_5 = \frac{1}{36}x^6 - \frac{16}{15}x^5 + \frac{401}{24}x^4 - \frac{136389}{1000}x^3 + \frac{2443}{4}x^2 - 1422x + 1351.0006$$

o también

$$V_5 = \frac{dM_5}{dx}$$

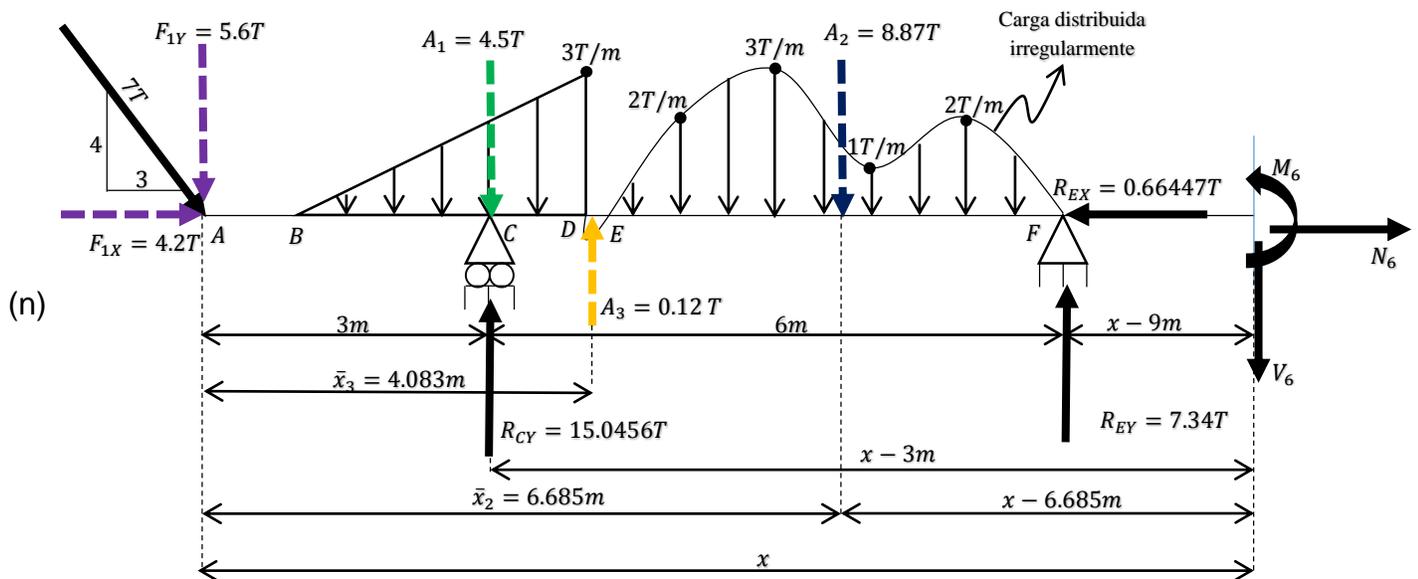
$$= \frac{d \left( \frac{1}{252}x^7 - \frac{8}{45}x^6 + \frac{401}{120}x^5 - \frac{136389}{4000}x^4 + \frac{2443}{12}x^3 - 711x^2 + 1351.0006x - 1098.9855 \right)}{dx}$$

$$V_5 = \frac{1}{36}x^6 - \frac{16}{15}x^5 + \frac{401}{24}x^4 - \frac{136389}{1000}x^3 + \frac{2443}{4}x^2 - 1422x + 1351.0006$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_5 = -4.2$$

Corte en el tramo ⑤ ( $F - G$ ). Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $E - F$ ) a una distancia  $x$  de  $A$ ; en la figura 1-3n se representa el diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo de la viga. Por consiguiente,

$$9m \leq x \leq 11m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-5.6x - 4.5(x - 3) + 15.0456(x - 3) + 0.12(x - 4.083) - 8.87(x - 6.685) + 7.34(x - 9) - M_6 = 0$$

$$M_6 = 3.5356x - 38.89074$$

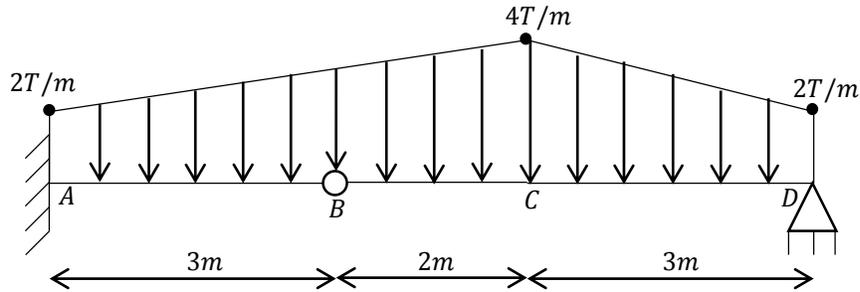
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -5.6 - 4.5 + 15.0456 + 0.12 - 8.87 + 7.34 - V_6 = 0 \Rightarrow V_6 = 3.5356$$

o también

$$V_6 = \frac{dM_6}{dx} = \frac{d(3.5356x - 38.89074)}{dx} = 3.5356$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 4.2 - 0.66447 + N_6 = 0 \Rightarrow N_6 = -3.53553$$

**Ejercicio 1.4** Determine las reacciones en los soportes y las ecuaciones de las acciones internas de la viga que se muestra en la figura 1-4a, la cual está sometida a cargas distribuidas de variación lineal y tiene una rótula (articulación) en  $B$ .



(a)

**Figura 1-4**

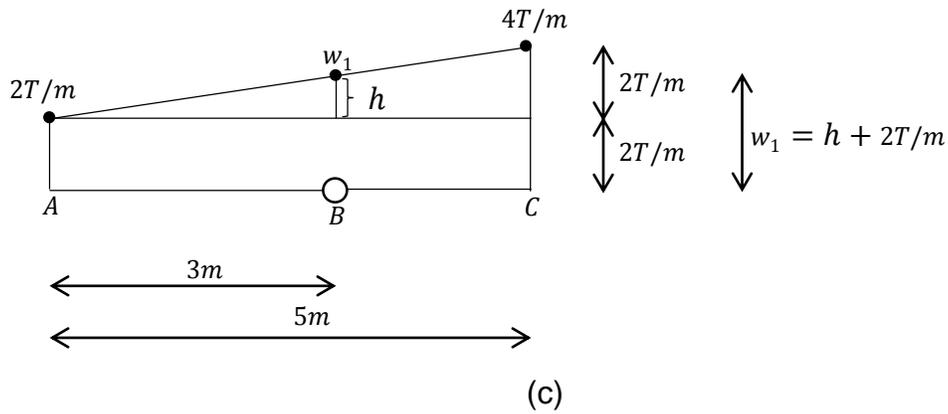
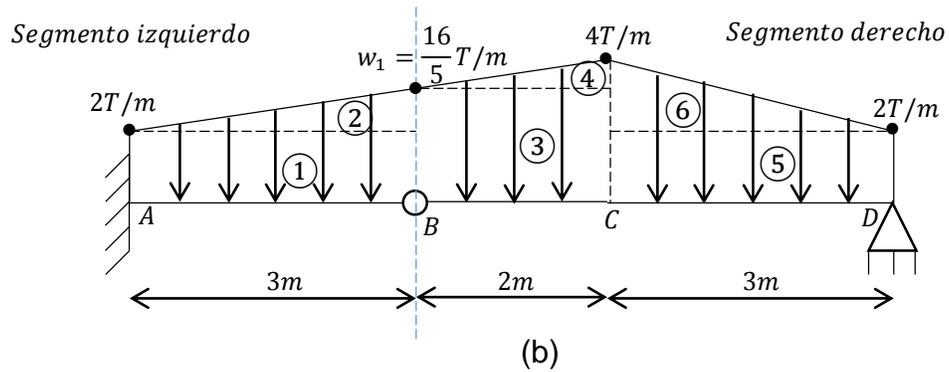
## SOLUCIÓN

### Verificación del grado de indeterminación

Para esta viga se tienen cinco reacciones de apoyo, de las cuales tres ( $R_{AX}, R_{AY}, M_A$ ) corresponden al empotramiento en  $A$  y las otras dos ( $R_{DX}, R_{DY}$ ) al apoyo articulado  $D$ , y existen tres ecuaciones de equilibrio ( $\sum FX = 0, \sum FY = 0, \sum M = 0$ ). Sin embargo, como la carga axial es insignificante, de  $\sum FX = 0$  se establece que tanto  $R_{AX}$  como  $R_{DX}$  son nulas. Siendo así, se puede decir que hay  $r = 3$  incógnitas de reacción,  $n = 2$  ecuaciones de equilibrio y además una ecuación de condición, es decir,  $c = 1$ , debido a que el momento flexionante en la articulación  $B$  vale cero. Entonces, al cumplirse  $n + c = r$ , ya que  $2 + 1 = 3$ , se infiere que la viga es estáticamente determinada.

### Cálculo de las reacciones en los apoyos

**Diagrama de cargas.** La figura 1-4b indica el diagrama de cargas para esta viga. Se traza una línea imaginaria que pase por la articulación  $B$ , de tal forma que la viga quede dividida en dos partes. Luego, en ambos segmentos deben determinarse las fuerzas resultantes de las cargas distribuidas y el punto donde se aplican. Para una mayor facilidad en los cálculos, conviene subdividir las cargas trapezoidales distribuidas extendidas en  $A - B$  y  $D - B$ , en cargas más simples como lo son las triangulares y las rectangulares. Observe que es forzoso conocer el valor del punto de intensidad de carga  $w_1$ ; para ello, se hace uso de la trigonometría, tal y como se observa en la figura 1-4c.



De la última figura, por triángulos semejantes, se tiene

$$\frac{2T/m}{5m} = \frac{h}{3m} \Rightarrow h = \frac{6}{5}T/m$$

En consecuencia,

$$w_1 = 2T/m + \frac{6}{5}T/m = \frac{16}{5}T/m$$

Se calculan las áreas bajo los rectángulos y los triángulos, según sea el caso, y el centroide de cada área.

$$A_1 = (3m)(2T/m) = 6T \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{2}(3m) = 1.5m$$

$$A_2 = \frac{(3m) \left( \frac{16}{5}T/m - 2T/m \right)}{2} = \frac{9}{5}T \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{3}(3m) = 1m$$

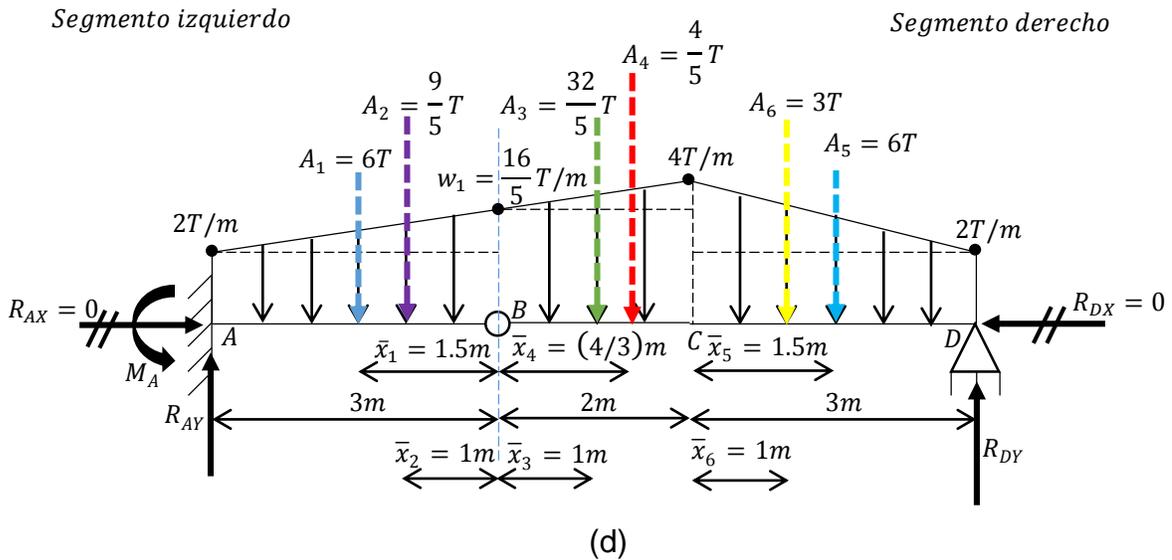
$$A_3 = (2m) \left( \frac{16}{5} T/m \right) = \frac{32}{5} T \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{2} (2m) = 1m$$

$$A_4 = \frac{(2m) \left( 4T/m - \frac{16}{5} T/m \right)}{2} = \frac{4}{5} T \quad \bar{x}_4 = \frac{2}{3} (2m) = \frac{4}{3} m$$

$$A_5 = (3m) (2T/m) = 6T \quad \bar{x}_5 = \frac{1}{2} (3m) = 1.5m$$

$$A_6 = \frac{(3m) \left( 4T/m - 2T/m \right)}{2} = 3T \quad \bar{x}_6 = \frac{1}{3} (3m) = 1m$$

Como es difícil establecer por inspección el sentido adecuado de cada reacción, todos se suponen de forma arbitraria. Finalmente, el diagrama de cargas, figura 1-4d, es



**Ecuaciones de equilibrio.** Recuerde que si al aplicar las ecuaciones de la estática, la magnitud de una fuerza o momento desconocido resulta negativo(a), tal sentido supuesto debe invertirse.

En primer lugar se calcula el valor de  $R_{DY}$  con base en la ecuación de condición. Para ello, se establece que la suma de momentos respecto de la rótula B para el segmento derecho es igual a cero; de ese modo, la única incógnita es la reacción  $R_{DY}$ . Aunque la suma de momentos alrededor de B para la porción izquierda también debe ser nula, por ahora no es conveniente usar tal planteamiento, ya que de hacerlo aparecerán dos incógnitas de reacción,  $M_A$  y  $R_{AY}$ . Aquí, hemos considerado

que los momentos horarios sean positivos, pero igual se pudo haber considerado una convención en la que los momentos antihorarios fueran los positivos. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum \curvearrowright MB_{der} = 0 &\Rightarrow \left(\frac{32}{5}\right)(1) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{3}\right) + (3)(2+1) + (6)(2+1.5) - R_{DY}(5) = 0 \\ &\therefore R_{DY} = 7.4933T \uparrow \end{aligned}$$

Una vez que se ha calculado  $R_{DY}$ , podemos aplicar en toda la viga la ecuación que enuncia que la suma de fuerzas verticales es nula, y así determinar directamente  $R_{AY}$ . En consecuencia,

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 6 + \frac{9}{5} + \frac{32}{5} + \frac{4}{5} + 3 + 6 - 7.4933 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 16.5067T \uparrow$$

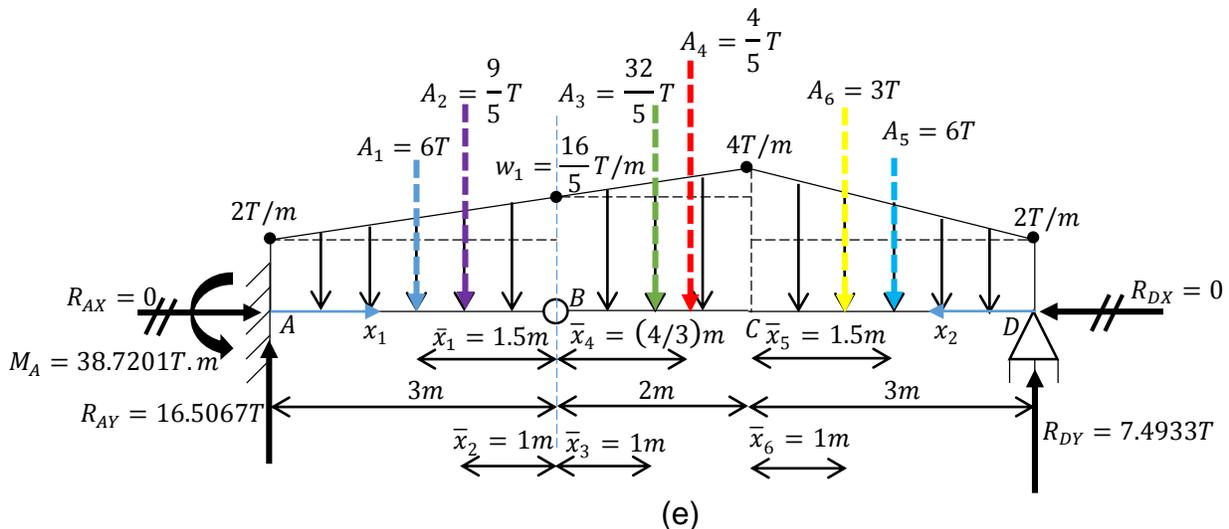
La reacción desconocida faltante  $M_A$  se puede obtener si para toda la viga igualamos a cero la suma de momentos respecto de  $A$  o  $D$ , puntos que corresponden a la ubicación del empotramiento y del apoyo articulado respectivamente; sin embargo, una forma más sencilla de conocer el valor de  $M_A$  radica en tomar momentos alrededor de  $B$  para el segmento izquierdo empleando el resultado de  $R_{AY}$  previamente obtenido. Por consiguiente,

$$\sum \curvearrowright MB_{izq} = 0 \Rightarrow -M_A + (16.5067)(3) - 6(1.5) - \left(\frac{9}{5}\right)(1) = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 38.7201T.m \curvearrowright$$

Por otra parte, existe una forma alterna para calcular todas reacciones en los soportes, consistente en un proceso que engloba el cálculo de las reacciones en la articulación. Se opta por explicar tal proceso más adelante, cuando se resuelve un marco triarticulado.

### Funciones de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento

Se muestran los resultados en la figura 1-4e.

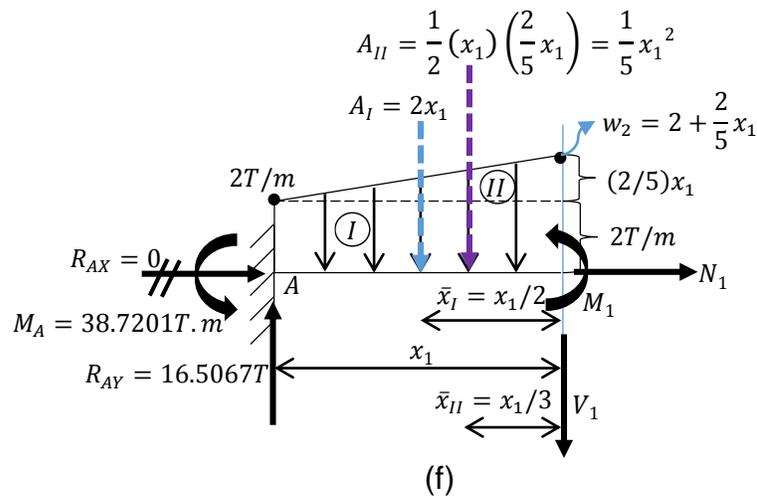


Es evidente que al no haber cargas horizontales en la estructura, la fuerza normal  $N_i$  (axial) será igual a cero a lo largo de toda la viga.

Es importante recalcar que las ecuaciones de las acciones internas no presentan discontinuidad alguna en el punto donde se localiza una articulación. En cambio, las funciones de la fuerza cortante  $V_i$  y del momento flector  $M_i$  son discontinuas en el punto  $C$ ; la razón es obvia, pues ahí la carga distribuida con variación lineal sufre un cambio de pendiente. Por lo tanto, pueden distinguirse dos regiones distintas en la viga, una que va desde  $A$  hasta  $C$  y otra que va de  $D$  a  $C$ . Esto conlleva a que dos cortes perpendiculares al eje de la viga sean necesarios de efectuar, uno en cada tramo citado, dado que las funciones de las acciones internas no son iguales entre los segmentos  $A - C$  y  $D - C$ .

Una sola coordenada  $x$  capaz de cubrir toda la longitud de la viga puede ser establecida; su origen bien puede asociarse en  $A$  o  $D$ . Sin embargo, los cálculos se simplificarán bastante si se elige una coordenada  $x$  diferente para cada región. Entonces, se emplean las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ , cuyos orígenes se definen en  $A$  y  $D$ , y que abarcan las regiones  $A - B$  y  $D - B$ , de forma respectiva. El origen de ambas coordenadas bien puede ser establecido en el punto  $C$ , pero esto elevaría el grado de dificultad de las deducciones. A continuación se aplica el método de secciones

Corte en la región  $A - C$ . Se secciona la viga en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $A - C$ ) a una distancia  $x_1$  del punto  $A$ , sin importar que esta sea mayor o menor a la distancia que hay entre  $A$  y la articulación  $B$ . En la figura 1-4f se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud  $x_1$ .



El valor de la intensidad de carga  $w_2$  en función de  $x_1$  se determina de forma análoga a como se hizo con  $w_1$ .

$$w_2 = 2T/m + \left( \frac{2T/m}{5m} (x_1) \right) = 2 + \frac{2}{5} x_1$$

La carga trapezoidal seccionada se sustituye por una distribución rectangular y una triangular. En el diagrama se indican la fuerza resultante de cada carga distribuida y el brazo de palanca que les corresponde. El equilibrio estático del cuerpo libre es

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -38.7201 + 16.5067(x_1) - 2x_1 \left( \frac{x_1}{2} \right) - \left( \frac{1}{5} x_1^2 \right) \left( \frac{x_1}{3} \right) - M_1 = 0$$

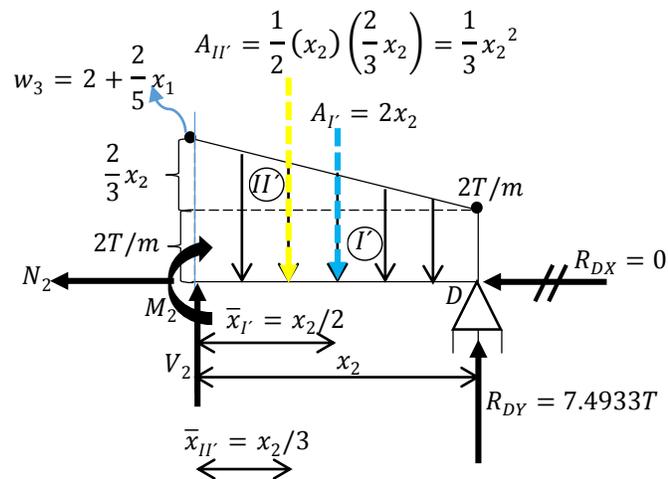
$$M_1 = -38.7201 + 16.5067x_1 - x_1^2 - \frac{1}{15} x_1^3$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow 16.5067 - 2x_1 - \frac{1}{5} x_1^2 - V_1 = 0$$

$$V_1 = 16.5067 - 2x_1 - \frac{1}{5} x_1^2$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow N_1 = 0$$

Corte en la región  $D - C$ . A continuación, en la figura 1-4g se muestra un diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga que surge al seccionarla en un sitio intermedio al tramo  $D - C$ . Para definir el momento y el cortante en esta región se sigue el procedimiento acostumbrado.



(g)

El valor de la intensidad de carga  $w_3$  en función de  $x_2$  se obtiene de

$$w_3 = 2T/m + \left( \frac{2T/m}{3m}(x_2) \right) = 2 + \frac{2}{3}x_2$$

Por lo tanto,

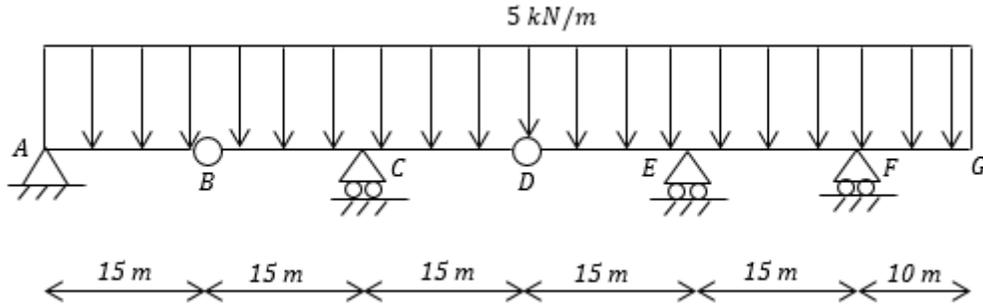
$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -7.4933(x_2) + 2x_2\left(\frac{x_2}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}x_2^2\right)\left(\frac{x_2}{3}\right) + M_2 = 0$$

$$M_2 = 7.4933x_2 - x_2^2 - \frac{1}{9}x_2^3$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 7.4933 - 2x_2 - \frac{1}{3}x_2^2 + V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = -7.4933 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_2^2$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_2 = 0$$

**Ejercicio 1.5** Determine las reacciones en los soportes y las funciones de los elementos mecánicos de la viga gerber que se muestra en la figura 1-5a, en la que se tienen articulaciones en  $B$  y  $D$ .



(a)  
**Figura 1-5**

### SOLUCIÓN

#### Verificación del grado de indeterminación

Si en el apoyo articulado  $A$  se generan dos fuerzas reactivas (una horizontal y una vertical) y en cada uno de los rodillos  $C$ ,  $E$  y  $F$  ocurre una reacción vertical, entonces se tienen cinco incógnitas de reacción. Las ecuaciones de la estática en el plano son tres. El problema se reduce de entrada si consideramos que la reacción horizontal es nula, lo cual es evidente, ya que la suma de fuerzas horizontales es igual a cero y la viga no está sometida a alguna carga en tal dirección. De ese modo, ahora sólo hay  $r = 4$  incógnitas de reacción ( $R_{AY}, R_{CY}, R_{EY}, R_{FY}$ ),  $n = 2$  ecuaciones de equilibrio ( $\sum F_Y = 0, \sum M = 0$ ) y  $c = 2$  ecuaciones de condición, debido a que no existe momento flector en las rótulas  $B$  y  $D$ . Al satisfacerse  $n + c = r$ , puesto que  $2 + 2 = 4$ , se concluye que la viga es estáticamente determinada.

#### Cálculo de las reacciones en los apoyos

Recuerde que la suma de los momentos respecto del punto de ubicación de una rótula, de las fuerzas situadas ya sea a la izquierda o a la derecha de la sección, es igual a cero.

El valor de  $R_{AY}$  se obtiene de hacer nula la sumatoria de momentos alrededor de  $B$  para el segmento izquierdo.

$$\sum M_{B \text{ izq}} = 0 \Rightarrow -R_{AY}(15) + 5(15)\left(\frac{15}{2}\right) = 0 \Rightarrow R_{AY} = 37.5 \text{ kN} \uparrow$$

Si se calcula el momento flexionante en la sección  $D$  como la suma de los momentos de las fuerzas situadas a la izquierda de la sección, se iguala a cero dicho momento, y se emplea el resultado de  $R_{AY}$  calculado previamente, se infiere directamente  $R_{CY}$ .

$$\curvearrowleft \sum MD_{izq} = 0 \Rightarrow -37.5(45) - R_{CY}(15) + 5(45)\left(\frac{45}{2}\right) = 0 \Rightarrow R_{CY} = 225 \text{ kN} \uparrow$$

Ahora observe como no hay otra opción más que resolver un sistema simultáneo de ecuaciones para calcular las reacciones restantes. No importa respecto de que soporte se tomen momentos, siempre se llegará a una ecuación con dos incógnitas:  $R_{EY}$  y  $R_{FY}$ . Lo mismo ocurre al tomar la suma de momentos alrededor de la articulación  $D$  para la parte derecha o al plantear que la sumatoria de las fuerzas verticales para la viga completa es cero. Entonces, se utilizan las últimas dos opciones por ser las menos laboriosas.

$$\curvearrowleft \sum MD_{der} = 0 \Rightarrow R_{EY}(15) + R_{FY}(30) - 5(40)(20) = 0$$

$$3R_{EY} + 6R_{FY} - 800 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad 37.5 + 225 + R_{EY} + R_{FY} - 5(85) = 0$$

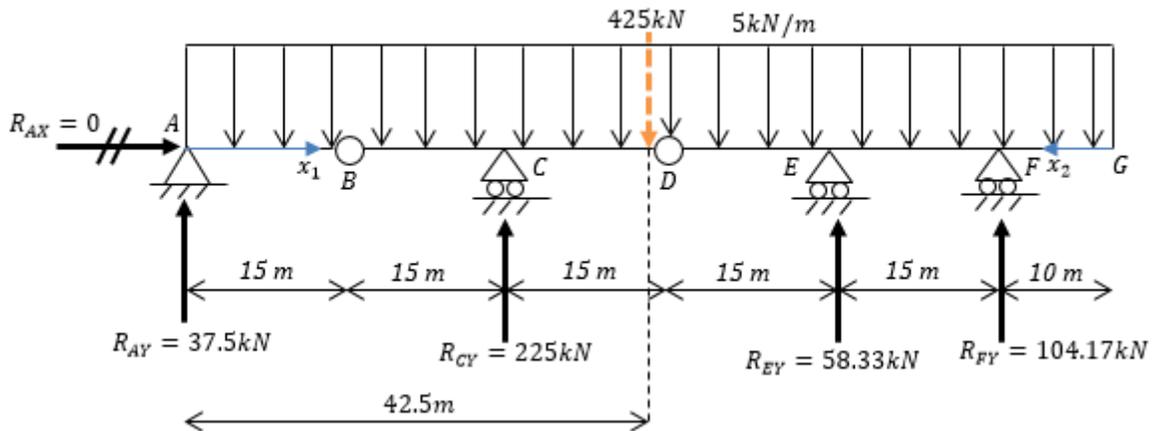
$$R_{EY} + R_{FY} - 162.5 = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones (1) y (2) resulta

$$R_{EY} = 58.33 \Rightarrow R_{EY} = 58.33 \text{ kN} \uparrow \quad R_{FY} = 104.17 \Rightarrow R_{FY} = 104.17 \text{ kN} \uparrow$$

### Funciones de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento

En la figura 1-5b se muestran los resultados obtenidos.



(b)

Las funciones de momento flector y de fuerza cortante son discontinuas en los puntos  $C, E$  y  $F$ , ya que en ellos se encuentran aplicadas de forma respectiva las fuerzas concentradas  $R_{CY}, R_{EY}$  y  $R_{FY}$ . La viga debe cortarse perpendicularmente a su eje en secciones arbitrarias localizadas en las regiones  $A - C, C - E, E - F$  y  $G - F$  para poder definir las acciones internas a lo largo de ella. Se opta por emplear dos coordenadas  $x$ ;  $x_1$  y  $x_2$  con orígenes establecidos en  $A$  y  $G$ , cubren las regiones  $A - F$  y  $G - F$ , respectivamente.

Así, al aplicar el método de las secciones, con base en las figuras 1-5c, 1-5d, 1-5e y 1-5f, se tiene

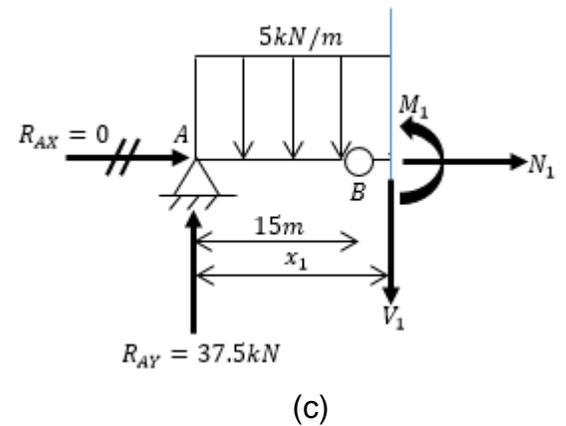
$$0 \leq x_1 \leq 30m$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 + 37.5(x_1) - 5(x_1)\left(\frac{x_1}{2}\right) = 0$$

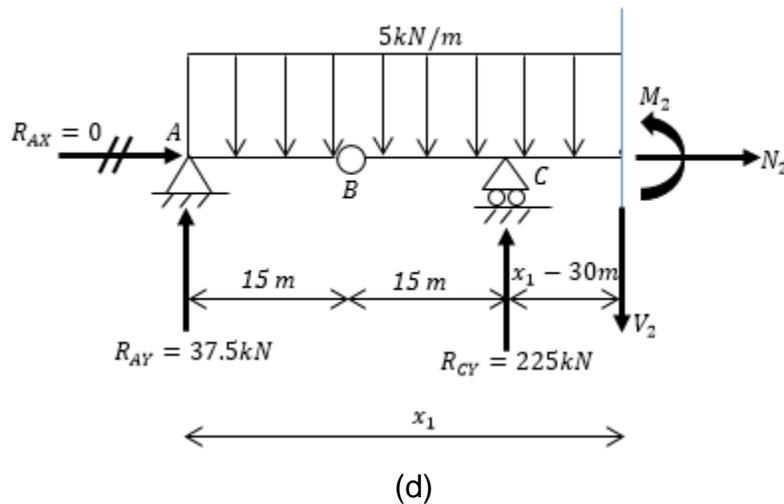
$$M_1 = 37.5x_1 - \frac{5(x_1)^2}{2}$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = 37.5 - 5x_1$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_1 = 0$$



$$30m \leq x_1 \leq 60m$$



$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_2 + 37.5(x_1) + 225(x_1 - 30) - 5(x_1)\left(\frac{x_1}{2}\right) = 0$$

$$M_2 = -\frac{5x_1^2}{2} + 262.5x_1 - 6750$$

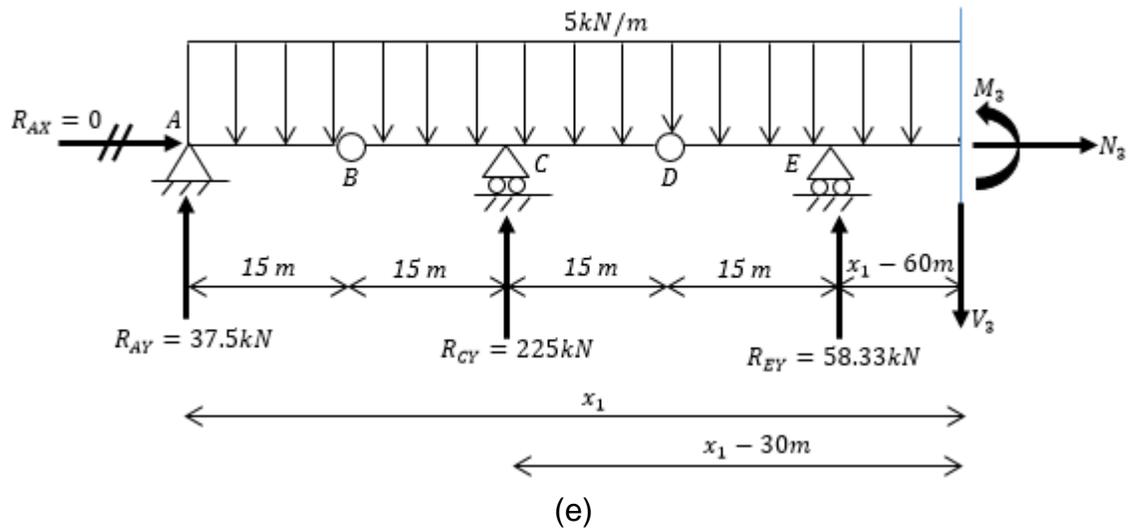
$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_1} = -5x_1 + 262.5 \quad + \rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_2 = 0$$

$$60m \leq x_1 \leq 75m$$

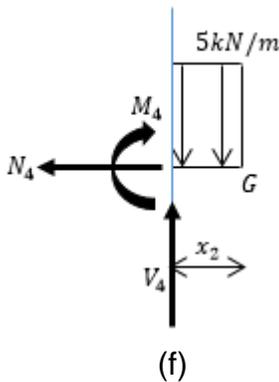
$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_3 + 37.5(x_1) + 225(x_1 - 30) + 58.33(x_1 - 60) - 5(x_1)\left(\frac{x_1}{2}\right) = 0$$

$$M_3 = -\frac{5x_1^2}{2} + 320.833x_1 - 10250$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_1} = -5x_1 + 320.833 \quad + \rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_3 = 0$$



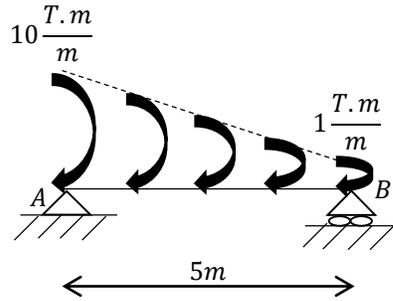
$$0 \leq x_2 \leq 10m$$



$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_4 + 5(x_2)\left(\frac{x_2}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_4 = -\frac{5x_2^2}{2}$$

$$V_4 = -\frac{dM_4}{dx_2} = 5x_2 \quad + \rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_4 = 0$$

**Ejercicio 1.6** Determine las reacciones en los soportes y las funciones del momento flexionante y de la fuerza cortante de la viga mostrada en la figura 1-6a, la cual soporta un momento de par distribuido cuya intensidad varía linealmente desde  $10 \frac{T.m}{m}$  en A hasta  $1 \frac{T.m}{m}$  en B.

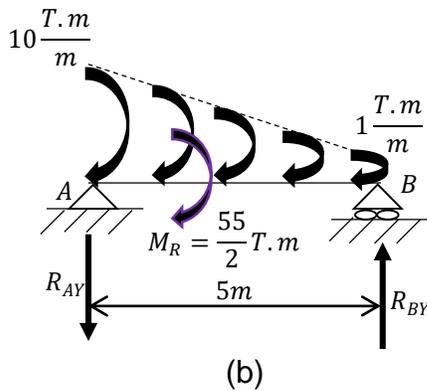


(a)  
**Figura 1-6**

**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los apoyos**

**Diagrama de cargas.** Por inspección, la viga es isostática. Con el fin de calcular las reacciones en los soportes, la carga de par distribuida se reemplaza por un momento resultante igual al área del trapecio y cuyo punto de aplicación puede estar en cualquier parte de la estructura. La fuerza reactiva horizontal en A se ha omitido por tener un valor nulo debido a que la viga no está sometida a cargas en X. El diagrama de cargas de la viga es mostrado en la figura 1-6b.



$$M_R = \left[ \frac{\left(10 \frac{T.m}{m}\right) + \left(1 \frac{T.m}{m}\right)}{2} \right] (5m) = \frac{55}{2} T.m$$

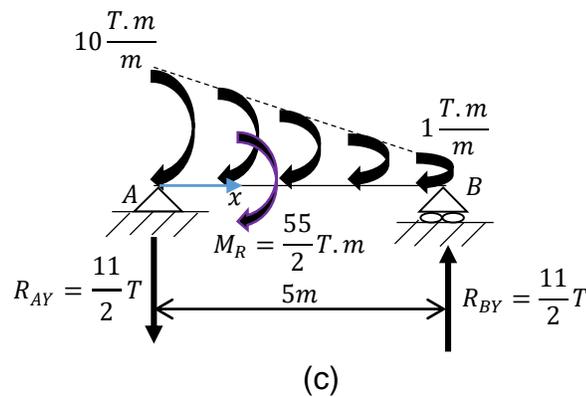
**Ecuaciones de equilibrio.** Al aplicar las ecuaciones de la estática en el diagrama de cargas resulta

$$\curvearrowleft + \sum MA = 0 \Rightarrow \frac{55}{2} - R_{BY}(5) = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{11}{2}T \uparrow$$

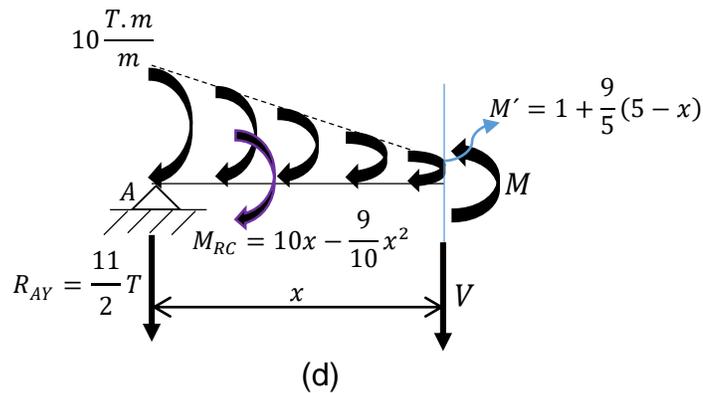
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + \frac{11}{2} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{11}{2}T \downarrow$$

**Funciones de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento**

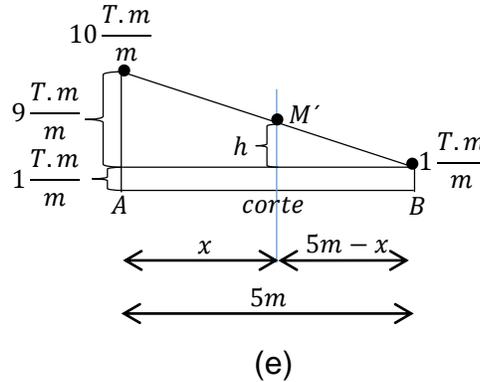
En la figura 1-6c se observan esquemáticamente los resultados.



Debido a que no hay discontinuidad en la carga de par distribuida, sólo se toma en cuenta una sola región de  $x$  para describir las funciones de las acciones internas para toda la viga; entonces, la coordenada  $x$  con origen en  $A$  cubre toda la longitud de la estructura y es positiva hacia la derecha. La fuerza axial es insignificante. Al seccionar la viga en un sitio arbitrario en el tramo  $A - B$ , se tiene el diagrama de cargas mostrado en la figura 1-6d.



Con base en la figura 1-6e, se determina la intensidad de momento  $M'$  en función de  $x$  empleando conceptos básicos de trigonometría.



$$\frac{9 \frac{T \cdot m}{m}}{5m} = \frac{h}{5m - x} \Rightarrow h = \frac{9}{5}(5 - x) \quad M' = 1 + \frac{9}{5}(5 - x)$$

Luego, el momento resultante, que puede aplicarse en cualquier punto de la viga, es igual a la siguiente área trapezoidal

$$M_{RC} = \frac{10 + \left[1 + \frac{9}{5}(5 - x)\right]}{2} (x) = \left[ \frac{x(50 - 9x)}{10} \right] + 5x = 10x - \frac{9}{10}x^2$$

De aplicar las ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cuerpo libre de la sección cortada resulta

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M - \frac{11}{2}(x) + \left(10x - \frac{9}{10}x^2\right) = 0 \Rightarrow M = -\frac{11}{2}x + \left(10x - \frac{9}{10}x^2\right)$$

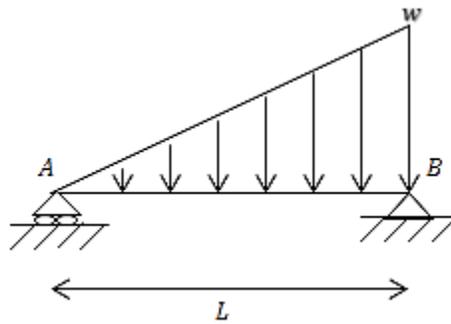
$$+\uparrow \sum FY = -\frac{11}{2} - V = 0 \Rightarrow V = -\frac{11}{2}$$

Es importante tener en cuenta que el momento interno en los soportes  $A$  y  $B$  no debe ser  $10 T \cdot m$  y  $1 T \cdot m$ , respectivamente, y que más bien es nulo en ambos puntos. Por otra parte, si se desea obtener el valor de la fuerza cortante como la derivada del momento flexionante, la parte que está entre paréntesis en la función de  $M$  debe ser considerada como constante por tratarse de una resultante de momento distribuido.

## 1.2 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO. TRABAJO VIRTUAL. PENDIENTE Y CURVA ELÁSTICA CON EL MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

**Ejercicios 1.7-1.12** Para las vigas de las figuras 1-7a, 1-8a, 1-9a, 1-10a, 1-11a, 1-12a, calcular las reacciones en los soportes y dibujar los diagramas de momento, cortante, giro y flecha; también determine los valores del momento máximo y de la flecha máxima. Suponga que  $E$  e  $I$  son constantes.

### Ejercicio 1.7



(a)

Figura 1-7

### SOLUCIÓN

#### Cálculo de las reacciones en los apoyos

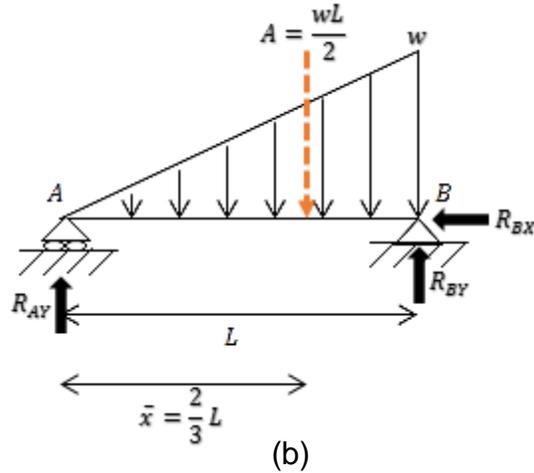
**Diagrama de cargas.** Las reacciones en los apoyos han sido identificadas y el sentido de cada una de ellas se ha supuesto arbitrariamente por desconocerse; por otra parte, se ha determinado la carga concentrada equivalente  $A$  para la carga distribuida de intensidad con variación lineal y su punto de aplicación  $\bar{x}$ . La figura 1-7b indica el diagrama de cargas de la estructura.

**Ecuaciones de equilibrio.** Se aplican al diagrama de cargas para obtener las fuerzas reactivas en los soportes; la convención de signos a utilizar es indistinta.

$$+\circlearrowleft \sum MA = 0 \Rightarrow \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{2}{3}L\right) - (R_{BY})(L) = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{wL^2}{3L} \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{wL}{3} \uparrow$$

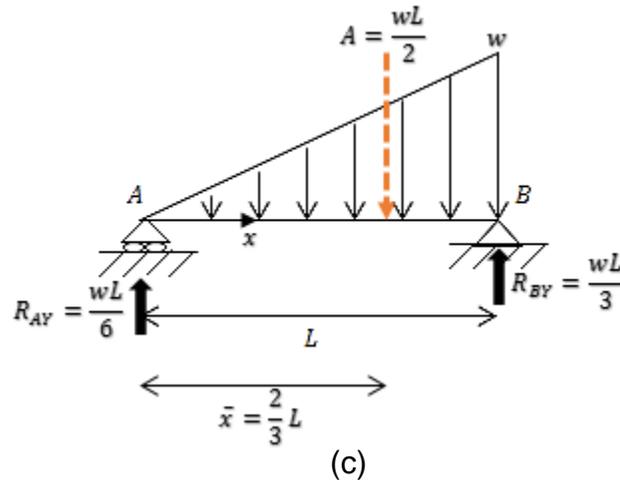
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - \frac{wL}{2} + \frac{wL}{3} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{wL}{6} \uparrow$$



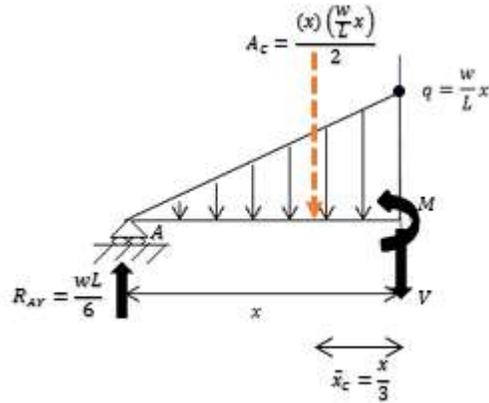
### Funciones de fuerza cortante y de momento

En la figura 1-7c se visualizan los valores de las reacciones en los soportes con sus correspondientes sentidos adecuados; se especifica la coordenada  $x$  a utilizar cuyo origen asociado está en  $A$ . El momento y el cortante deben estar en función de  $x$  y como no hay discontinuidad de carga a lo largo de la estructura, sólo se efectuará un corte perpendicular al eje de la viga.



Un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud  $x$  es proporcionado en la figura 1-7d. Note que la intensidad de la carga triangular se encuentra en proporción, es decir,  $\frac{w}{L} = \frac{q}{x} \Rightarrow q = \frac{w}{L}x$ . Se indica la fuerza resultante de la carga triangular del corte y su punto de aplicación;  $V$  y  $M$  aparecen actuando en sus direcciones positivas de acuerdo a la convención de signos usualmente adoptada y sus funciones se deducen al hacer uso de las ecuaciones de equilibrio cuya convención de signos si puede ser cualquiera.

$$0 \leq x \leq L$$



(d)

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M + \left(\frac{wL}{6}\right)x - \frac{(x)\left(\frac{w}{L}x\right)}{2}\left(\frac{x}{3}\right) = 0$$

$$M = \frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{wL}{6} - \frac{(x)\left(\frac{w}{L}x\right)}{2} - V = 0$$

$$V = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2 \quad \text{o también } V = \frac{dM}{dx} = \frac{wL}{6} - \frac{w}{6L}(3x^2) = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2$$

### Cálculo del momento máximo

El momento máximo está posicionado en un punto donde  $V = dM/dx = 0$ ; realizando la sustitución correspondiente y resolviendo la ecuación se tiene

$$0 = \frac{wL}{6} - \frac{w}{2L}x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{-\frac{wL}{6}}{-\frac{w}{2L}} = \frac{2wL^2}{6w} = \frac{L^2}{3} \Rightarrow \therefore x_{max} = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Al hacer  $x_{max} = x$  en la ecuación de  $M$ , el momento máximo resulta ser

$$M_{max} = \frac{wL}{6}\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) - \frac{w}{6L}\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{wL^2}{6\sqrt{3}} - \frac{wL^2}{6(\sqrt{3})^3} = \frac{\sqrt{3}}{27}wL^2 \Rightarrow \therefore M_{max} = \frac{wL^2}{9\sqrt{3}}$$

**Ecuaciones de la pendiente y la deflexión usando el método de la integración directa o doble**

Al aplicar la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

e integrarla dos veces, se obtiene

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3 \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int \left( \frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3 \right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 + C_1; \text{ si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta = \frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 + C_1 \text{ --- } \textcircled{1}$$

$$EI \int dy = \int \left( \frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 + C_1 \right) dx \Rightarrow EIy = \frac{wL}{36}x^3 - \frac{w}{120L}x^5 + C_1x + C_2 \text{ --- } \textcircled{2}$$

En las expresiones que definen las curvas de pendiente y de deflexión hay dos constantes de integración; por tanto, deben definirse dos condiciones que permitan evaluar dichas constantes. Para ésta viga simplemente apoyada, las condiciones de frontera son: 1)  $y = 0$  en  $x = 0$  y 2)  $y = 0$  en  $x = L$ , ya que el apoyo simple (rodillo) y el apoyo articulado (pasador) no permiten la deflexión (flechamiento) de la viga en sus correspondientes puntos de ubicación.

Sustituyendo la condición 1) en la ecuación  $\textcircled{2}$  da

$$EI(0) = \frac{wL}{36}(0)^3 - \frac{w}{120L}(0)^5 + C_1(0) + C_2 \Rightarrow \therefore C_2 = 0$$

Sustituyendo la condición 2) y  $C_2 = 0$  en la misma ecuación da

$$EI(0) = \frac{wL}{36}(L)^3 - \frac{w}{120L}(L)^5 + C_1(L) + 0 \Rightarrow \therefore C_1 = -\frac{7}{360}wL^3$$

En consecuencia, las ecuaciones del giro y de la flecha son, respectivamente

$$\theta = \frac{1}{EI} \left( \frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 - \frac{7wL^3}{360} \right) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$y = \frac{1}{EI} \left( \frac{wL}{36}x^3 - \frac{w}{120L}x^5 - \frac{7wL^3}{360}x \right) \quad 0 \leq x \leq L$$

**Método del trabajo virtual unificado con el método de la integración doble**

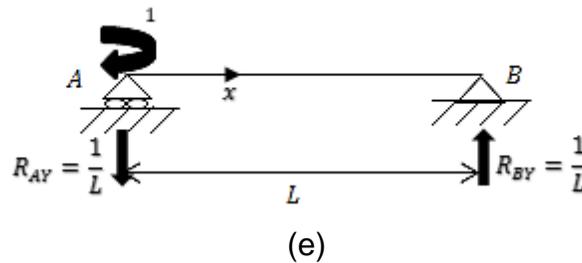
En ocasiones, las condiciones conocidas son insuficientes para calcular las constantes de integración, así que se puede(n) implementar alguna(s) condición(es) de frontera si se calcula(n) algún(os) giro(s) y/o flecha(s) preferentemente con el método del trabajo virtual. Otra buena razón para unificar éstos métodos es que el sistema de ecuaciones podría tener una solución más directa. Aunque para este ejercicio no es necesario, realizaremos este proceso a manera de ejemplificación.

Se sabe que en  $A$ , o sea en  $x = 0, y = 0$ , pero en  $x = 0, \theta = \zeta?$ , así que aplicamos el **método trabajo virtual** para calcular la rotación (pendiente o giro) en  $A$ .

**Momento real  $M$ .** Corresponde a la siguiente función que ya ha sido deducida:

$$M = \frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3 \quad 0 \leq x \leq L$$

**Momento virtual  $m_\theta$ .** La pendiente en  $A$  se determina al colocar un momento de par unitario virtual en ese punto, figura 1-7e; el sentido del par se ha propuesto horario (puede ser antihorario). Note que las cargas reales son removidas y que debe usarse la misma coordenada  $x$  que se empleó para  $M$ . Después de calcular las reacciones en los soportes, se deduce el momento interno  $m_\theta$  con el método de las secciones a partir de la figura 1-7f.

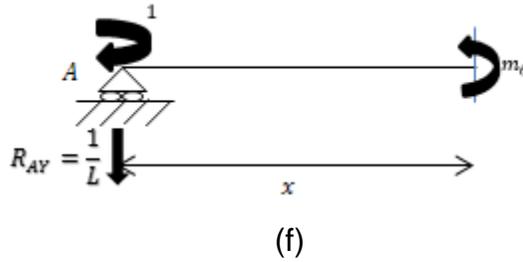


Las reacciones en los soportes son resultado de

$$\begin{aligned} +\curvearrowright \sum MA = 0 &\Rightarrow 1 - (L)R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{1}{L} \uparrow \\ +\uparrow \sum FY = 0 &\Rightarrow -R_{AY} + \frac{1}{L} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{1}{L} \downarrow \end{aligned}$$

En la figura 1-7f se muestra el diagrama de la sección cortada de la viga virtual;  $m_\theta$  actúa en la misma dirección que  $M$ , es decir, en la positiva convencional.

$$.0 \leq x \leq L$$



$$\curvearrowright \sum m_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -m_{\theta} + 1 - \frac{1}{L}(x) = 0 \Rightarrow m_{\theta} = 1 - \frac{1}{L}x$$

**Ecuación del trabajo virtual.** Entonces, la pendiente en A es resultado de

$$1 \cdot \theta_A = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_{\theta}}{EI} dx$$

$$1 \cdot \theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3 \right) \left( 1 - \frac{1}{L}x \right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{wL}{6}x - \frac{w}{6L}x^3 - \frac{w}{6}x^2 + \frac{w}{6L^2}x^4 \right) dx$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[ \frac{wL}{12}x^2 - \frac{w}{24L}x^4 - \frac{w}{18}x^3 + \frac{w}{30L^2}x^5 \right]_0^L = \frac{1}{EI} \left( \frac{wL^3}{12} - \frac{wL^3}{24} - \frac{wL^3}{18} + \frac{wL^3}{30} \right)$$

$$\theta_A = \frac{7wL^3}{360EI}$$

El signo positivo indica que el sentido de  $\theta_A$  es el mismo que el propuesto para el momento de par unitario virtual.

$$\therefore \theta_A = \frac{7wL^3}{360EI} \curvearrowright$$

Recuerde que por la convención de signos que se maneja en el método de doble integración, un giro horario será negativo.

Las condiciones de frontera a emplear para calcular las constantes de integración son: 1)  $y = 0$  en  $x = 0$  y 2)  $\theta = -\frac{7wL^3}{360EI}$  en  $x = 0$ .

Sustituyendo  $x = 0$ ,  $\theta = -\frac{7wL^3}{360EI}$  en la ecuación ① tenemos

$$EI \left( -\frac{7wL^3}{360EI} \right) = \frac{wL}{12} (0)^2 - \frac{w}{24L} (0)^4 + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{7wL^3}{360}$$

Sustituyendo  $x = 0, y = 0, C_1 = -\frac{7wL^3}{360}$  en la ecuación (2) tenemos

$$0 = \frac{wL}{36} (0)^3 - \frac{w}{120L} (0)^5 - \frac{wL^3}{360} (0) + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

Obsérvese que se llegaron a los mismos resultados.

### Cálculo de la flecha máxima

Para conocer la ubicación del valor máximo de la flecha hacemos  $\theta = 0$  y luego resolvemos la ecuación de cuarto grado.

$$0 = \frac{wL}{12} x^2 - \frac{w}{24L} x^4 - \frac{7wL^3}{360}$$

Al realizar el cambio de variable  $z = x^2$  y después simplificar, obtenemos

$$-\frac{w}{24L} z^2 + \frac{wL}{12} z - \frac{7wL^3}{360} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{24L} z^2 + \frac{L}{12} z - \frac{7L^3}{360} = 0$$

Si aplicamos fórmula general, se tiene

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = -\frac{1}{24L}, b = \frac{L}{12}, c = -\frac{7L^3}{360}$$

$$z = \frac{-\left(\frac{L}{12}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{L}{12}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{24L}\right)\left(-\frac{7L^3}{360}\right)}}{2\left(-\frac{1}{24L}\right)} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{30}}{15}\right) L^2$$

$$z_1 = \left(1 + \frac{2\sqrt{30}}{15}\right) L^2 = 1.730296743 L^2 \quad z_2 = \left(1 - \frac{2\sqrt{30}}{15}\right) L^2 \cong 0.2697032566 L^2$$

Retomando el cambio de variable hecho inicialmente

$$z = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{z}$$

las raíces son

$$x_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{2\sqrt{30}}{15}\right) L^2} \cong 0.5193296223 L; x_2 = -\sqrt{\left(1 - \frac{2\sqrt{30}}{15}\right) L^2} \cong -0.5193296223 L$$

$$x_3 = \sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{30}}{15}\right)L^2} \cong 1.315407443 L ; x_4 = -\sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{30}}{15}\right)L^2} \cong -1.315407443 L$$

Como la solución debe estar dentro del intervalo real de la viga  $[0, L]$ , la posición de la flecha máxima es  $x_{max} = 0.5193296223 L$ .

Sustituyendo  $x_{max} = x$  en la ecuación de la flecha se determina el valor de la flecha máxima.

$$y_{max} = \frac{1}{EI} \left( \frac{wL}{36} (0.5193296223L)^3 - \frac{w}{120L} (0.5193296223L)^5 - \frac{7wL^3}{360} (0.5193296223L) \right)$$

$$y_{max} = -\frac{0.006522184231wL^4}{EI} \Rightarrow \therefore y_{max} = \frac{0.006522184231wL^4}{EI} \downarrow$$

Se consideró que por la convención de signos en el método de integración doble, una deflexión negativa es hacia abajo.

Si se desea conocer el valor de la pendiente en  $B$  por ejemplo, basta con sustituir  $x = L$  en la ecuación del giro y despejar  $\theta_B$ .

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left( \frac{wL}{12} (L)^2 - \frac{w}{24L} (L)^4 - \frac{7wL^3}{360} \right) \Rightarrow \theta_B = \frac{wL^3}{45EI} \Rightarrow \therefore \theta_B = \frac{wL^3}{45EI} \curvearrowright$$

### Diagramas de fuerza cortante, momento flector, rotación y deflexión (curva elástica)

Una vez que se han determinado las funciones de fuerza cortante, de momento flector, de rotación y de deflexión, estas se evalúan en el intervalo  $0 \leq x \leq L$ , tablas 1-1, 1-2, 1-3 y 1-4. Luego, los respectivos diagramas, figuras 1-7g, 1-7h, 1-7i y 1-7kj, se obtienen de graficar los datos dispuestos en forma tabular.

| x(L) | V(wL)        |
|------|--------------|
| 0    | 0.166666667  |
| 0.1  | 0.161666667  |
| 0.2  | 0.146666667  |
| 0.3  | 0.121666667  |
| 0.4  | 0.086666667  |
| 0.5  | 0.041666667  |
| 0.6  | -0.013333333 |
| 0.7  | -0.078333333 |
| 0.8  | -0.153333333 |
| 0.9  | -0.238333333 |
| 1    | -0.333333333 |

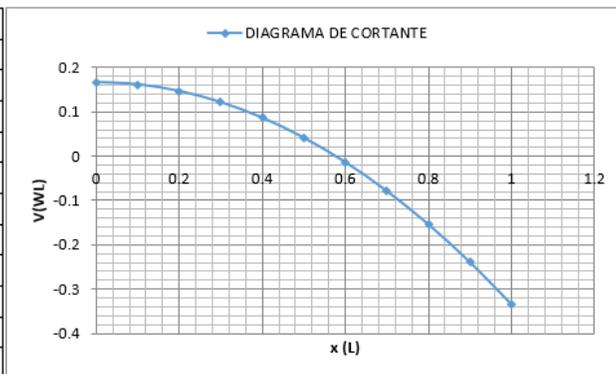


Tabla 1-1

(g)

CAPÍTULO 1 ANÁLISIS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

| x(L) | M(W*L <sup>2</sup> ) |
|------|----------------------|
| 0    | 0                    |
| 0.1  | 0.0165               |
| 0.2  | 0.032                |
| 0.3  | 0.0455               |
| 0.4  | 0.056                |
| 0.5  | 0.0625               |
| 0.6  | 0.064                |
| 0.7  | 0.0595               |
| 0.8  | 0.048                |
| 0.9  | 0.0285               |
| 1    | 0                    |

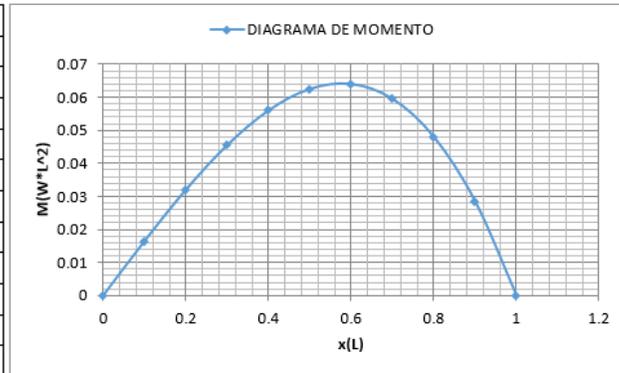


Tabla 1-2

(h)

| x(L) | $\theta((W*L^3)/EI)$ |
|------|----------------------|
| 0    | -0.019444444         |
| 0.1  | -0.018615278         |
| 0.2  | -0.016177778         |
| 0.3  | -0.012281944         |
| 0.4  | -0.007177778         |
| 0.5  | -0.001215278         |
| 0.6  | 0.005155556          |
| 0.7  | 0.011384722          |
| 0.8  | 0.016822222          |
| 0.9  | 0.020718056          |
| 1    | 0.022222222          |

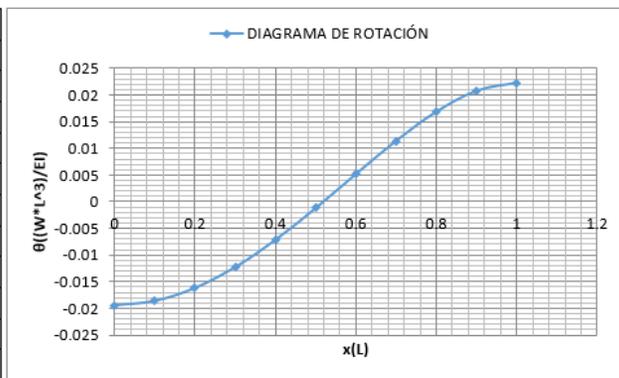


Tabla 1-3

(i)

| x(L) | Y((W*L <sup>4</sup> )/EI) |
|------|---------------------------|
| 0    | 0                         |
| 0.1  | -0.00191675               |
| 0.2  | -0.003669333              |
| 0.3  | -0.005103583              |
| 0.4  | -0.006085333              |
| 0.5  | -0.006510417              |
| 0.6  | -0.006314667              |
| 0.7  | -0.005483917              |
| 0.8  | -0.004064                 |
| 0.9  | -0.00217075               |
| 1    | 0                         |

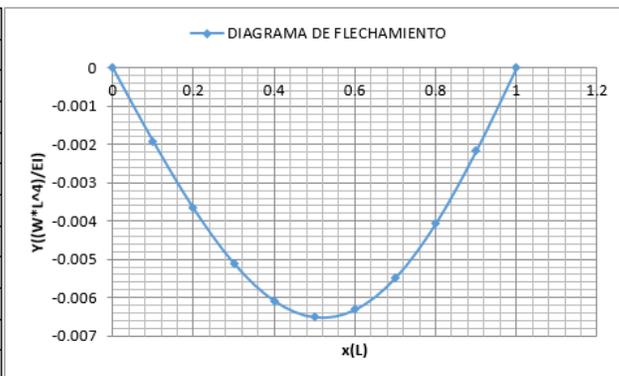
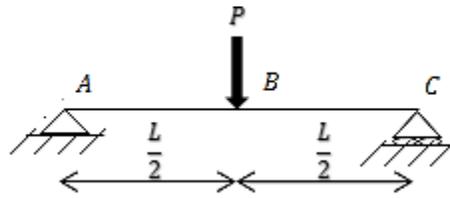


Tabla 1-4

(j)

**Ejercicio 1.8**



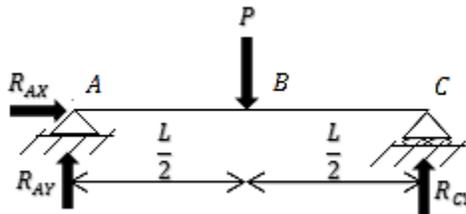
(a)

**Figura 1-8**

**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los apoyos**

**Diagrama de cargas.** El diagrama de cargas de la viga se muestra en la figura 1-8b.



(b)

**Ecuaciones de equilibrio**

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow (P) \left( \frac{L}{2} \right) - R_{CY}(L) = 0 \Rightarrow R_{CY} = \frac{-\frac{PL}{2}}{-L} = \frac{-PL}{-2L} \Rightarrow \therefore R_{CY} = \frac{P}{2} \uparrow$$

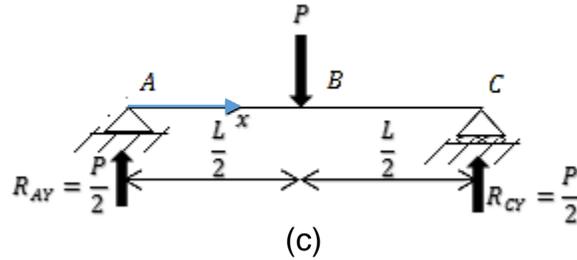
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - P + R_{CY} = 0 \Rightarrow R_{AY} = P - \frac{P}{2} \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{P}{2} \uparrow$$

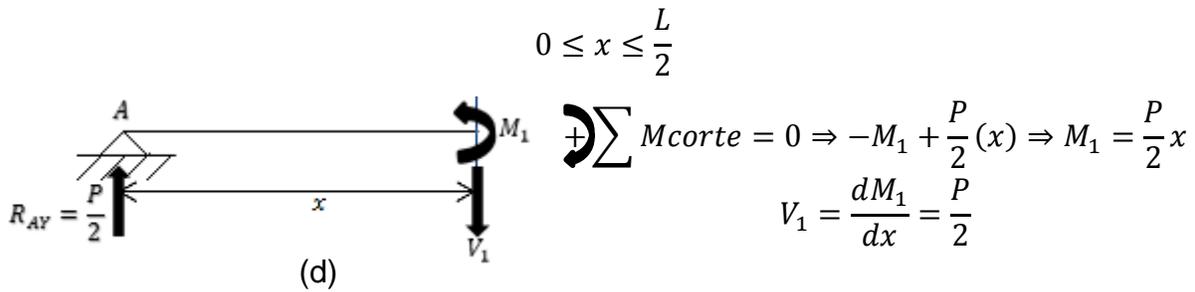
**Funciones de fuerza cortante y de momento**

En la figura 1-8c se especifica la coordenada  $x$  a utilizar y su origen asociado.

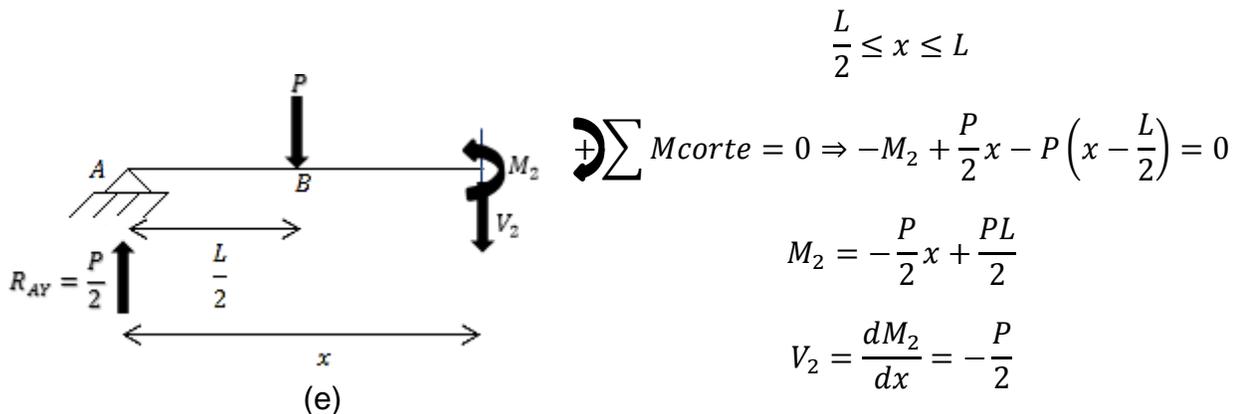
Debido a que las funciones de fuerza cortante y de momento serán discontinuas en el punto donde está aplicada la fuerza  $P$ , deben efectuarse dos cortes perpendiculares al eje de la viga; note que se tomará como origen del sistema coordinado el punto  $A$ , por lo que  $x$  es válida para  $0 \leq x \leq L$ .



Corte en el tramo ① ( $A - B$ ). Se secciona la viga a una distancia  $x$  de  $A$  en un punto arbitrario antes de la carga  $P$ . En consecuencia, el diagrama de cuerpo libre de la sección cortada, figura 1-8d, y su equilibrio estático son



Corte en el tramo ② ( $B - C$ ). Se secciona la viga en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $B - C$ ) a una distancia  $x$  del punto  $A$ . El diagrama de cuerpo libre para éste segmento de viga con longitud  $x$ , figura 1-8e, y su correspondiente análisis son



### Cálculo del momento máximo

Por la simetría de la estructura, el momento máximo se posiciona en  $x_{max} = \frac{L}{2}$  y su valor se halla haciendo  $x_{max} = x$  en la ecuación de  $M_1$  o  $M_2$ .

$$M_{max1} = \frac{P}{2} \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{PL}{4} \qquad M_{max2} = -\frac{P}{2} \left( \frac{L}{2} \right) + \frac{PL}{2} = \frac{PL}{4}$$

### Ecuaciones de la pendiente y la deflexión usando el método de la integración directa

Al aplicar la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

e integrarla dos veces en cada tramo, se obtiene

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_1 \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{2}x \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int \left( \frac{P}{2}x \right) dx \Rightarrow EI \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{4} + C_1$$

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta_1 = \frac{Px^2}{4} + C_1 \text{ --- } \textcircled{1}$$

$$EI \int dy = \int \left( \frac{Px^2}{4} + C_1 \right) dx \Rightarrow EIy_1 = \frac{Px^3}{12} + C_1x + C_2 \text{ --- } \textcircled{2}$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_2 \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int \left( -\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} \right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x + C_3; \text{ si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta_2 = -\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x + C_3 \text{ --- } \textcircled{3}$$

$$EIy_2 = -\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 + C_3x + C_4 \text{ --- } \textcircled{4}$$

### Método del trabajo virtual unificado con el método de la integración doble

En las expresiones que definen las curvas de pendiente y de deflexión hay cuatro constantes de integración; por lo tanto, deben definirse cuatro condiciones, algunas de frontera y otras de continuidad, que nos permitan evaluar dichas constantes.

Para ésta viga, las condiciones de frontera a considerar son: 1)  $y_1 = 0$  en  $x = 0$  y 2)  $\theta_1 = \dot{y}_1$  en  $x = 0$ , esto debido a que el apoyo simple (rodillo) no permite la deflexión pero sí la rotación en su punto de ubicación. Las condiciones de continuidad son: 3)  $\theta_1 = \theta_2$  en  $x = \frac{L}{2}$  y 4)  $y_1 = y_2$  en  $x = \frac{L}{2}$ , ya que se está forzando la continuidad de la curva de deflexión en el extremo común de los dos segmentos.

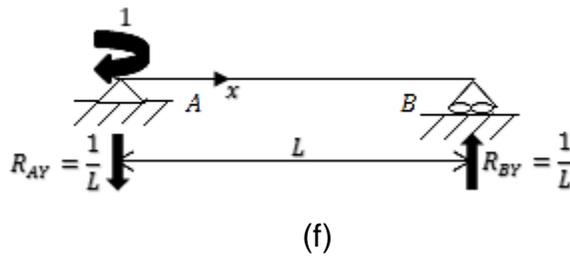
Para calcular el giro en A ( $\theta_A$ ), es decir la rotación cuando  $x = 0$ , a continuación se aplica el **método del trabajo virtual**

**Momentos reales  $M$ .** Corresponden a las siguientes funciones que ya han sido deducidas:

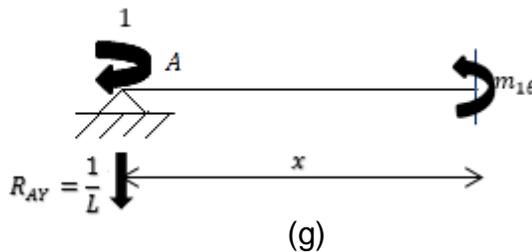
$$M_1 = \frac{P}{2}x \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$M_2 = -\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

**Momento virtual  $m_\theta$ .** En la figura 1-8f se observa la estructura con momento virtual unitario aplicado en A. Posteriormente, con base en la figura 1-8g en la que se proporciona un diagrama de cargas de la sección cortada de la viga virtual, se calcula el momento interno  $m_\theta$  empleando el método de las secciones.



$$0 \leq x \leq L$$



$$\sum m_{corte} = 0 \Rightarrow -m_{1\theta} + 1 - \frac{1}{L}(x) = 0 \Rightarrow m_{1\theta} = 1 - \frac{1}{L}x$$

**Ecuación del trabajo virtual.** Entonces, la pendiente en A es resultado de

$$1 \cdot \theta_A = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_\theta}{EI} dx$$

$$1 \cdot \theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{P}{2}x\right) \left(1 - \frac{1}{L}x\right) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{L}x\right) dx$$

Resolviendo las integrales por separado se obtiene

$$\frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{P}{2}x\right) \left(1 - \frac{1}{L}x\right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{P}{2}x - \frac{P}{2L}x^2\right) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{P}{4}x^2 - \frac{P}{6L}x^3\right]_0^{L/2}$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{P}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{P}{6L}\left(\frac{L}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL^2}{16} - \frac{PL^2}{48}\right] = \frac{PL^2}{24EI}$$

$$\frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{L}x\right) dx = \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L \left(-\frac{P}{2}x + \frac{PL}{2} + \frac{P}{2L}x^2 - \frac{P}{2}x\right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{2}x^2 + \frac{PL}{2}x + \frac{P}{6L}x^3\right]_{L/2}^L = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{2}\left(L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) + \frac{PL}{2}\left(L - \frac{L}{2}\right) + \frac{P}{6L}\left(L^3 - \left(\frac{L}{2}\right)^3\right)\right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{2}\left(\frac{3}{4}L^2\right) + \frac{PL}{2}\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{P}{6L}\left(\frac{7}{8}L^3\right)\right] = \frac{PL^2}{EI} \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{7}{48}\right) = \frac{PL^2}{48EI}$$

$$\theta_A = \frac{PL^2}{24EI} + \frac{PL^2}{48EI} = + \frac{PL^2}{16EI} \quad \therefore \theta_A = \frac{PL^2}{16EI} \curvearrowright$$

Note como  $\theta_A$  es horario al igual que el momento de par virtual unitario debido a que la suma algebraica de todas las integrales para toda la viga es positiva, sin embargo, un giro horario se considera negativo en el método de doble integración; por consiguiente, la segunda condición de frontera es: 2)  $\theta_1 = -\frac{PL^2}{16EI}$  en  $x = 0$ .

Sustituyendo la condición 2) en la ecuación ① resulta

$$EI \left(-\frac{PL^2}{16EI}\right) = \frac{P(0)^2}{4} + C_1 \Rightarrow \therefore C_1 = -\frac{PL^2}{16}$$

Sustituyendo la condición 1) en la ecuación ② tenemos

$$EI(0) = \frac{P(0)^3}{12} - \frac{PL^2}{16}(0) + C_2 \Rightarrow \therefore C_2 = 0$$

Aplicando la condición 3) se obtiene

$$\frac{1}{EI} \left( \frac{Px^2}{4} + C_1 \right) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x + C_3 \right), \quad \text{en } x = \frac{L}{2}$$

$$\frac{P \left( \frac{L}{2} \right)^2}{4} - \frac{PL^2}{16} = -\frac{P}{4} \left( \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{PL}{2} \left( \frac{L}{2} \right) + C_3 \Rightarrow \frac{PL^2}{16} - \frac{PL^2}{16} = -\frac{PL^2}{16} + \frac{PL^2}{4} + C_3 \Rightarrow \therefore C_3 = -\frac{3PL^2}{16}$$

La aplicación de la condición 4) conlleva a

$$\frac{1}{EI} \left( \frac{Px^3}{12} + C_1x + C_2 \right) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 + C_3x + C_4 \right), \quad \text{en } x = \frac{L}{2}$$

$$\frac{P}{12} \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \frac{PL^2}{16} \left( \frac{L}{2} \right) + 0 = -\frac{P}{12} \left( \frac{L}{2} \right)^3 + \frac{PL}{4} \left( \frac{L}{2} \right)^2 - \frac{3PL^2}{16} \left( \frac{L}{2} \right) + C_4$$

$$\frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32} = -\frac{PL^3}{96} + \frac{PL^3}{16} - \frac{3PL^3}{32} + C_4 \Rightarrow \therefore C_4 = \frac{PL^3}{48}$$

En consecuencia, las ecuaciones de la pendiente y la deflexión de manera respectiva en cada tramo son

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{EI} \left( \frac{Px^2}{4} - \frac{PL^2}{16} \right) \quad y_1 = \frac{1}{EI} \left( \frac{Px^3}{12} - \frac{PL^2}{16}x \right)$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI} \left( -\frac{P}{4}x^2 + \frac{PL}{2}x - \frac{3PL^2}{16} \right) \quad EIy_2 = \frac{1}{EI} \left( -\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{4}x^2 - \frac{3PL^2}{16}x + \frac{PL^3}{48} \right)$$

### Cálculo de la flecha máxima de cada tramo

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$EI\theta_1 = 0 = \frac{Px^2}{4} - \frac{PL^2}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{\frac{PL^2}{16}}{\frac{P}{4}} = \frac{4PL^2}{16P} = \frac{L^2}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{L^2/4} \quad \therefore x_{max1} = \frac{L}{2}$$

$$y_{max1} = \frac{1}{EI} \left( \frac{P}{12} \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \frac{PL^2}{16} \left( \frac{L}{2} \right) \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32} \right) \Rightarrow y_{max1} = \frac{-PL^3}{48EI} \quad \therefore y_{max1} = \frac{PL^3}{48EI} \downarrow$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$EI\theta_2 = 0 = -\frac{P}{4}x^2 - \frac{PL}{2}x - \frac{3PL^2}{16}$$

$$0 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{L}{2}x - \frac{3L^2}{16} \Rightarrow x = \frac{-\frac{L}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3L^2}{16}\right)}}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}}\right)L$$

$$x_1 = \left(\frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}}\right)L = \frac{L}{2} \quad x_2 = \left(\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}}\right)L = \frac{3}{2}L \quad \therefore x_{max2} = \frac{L}{2}$$

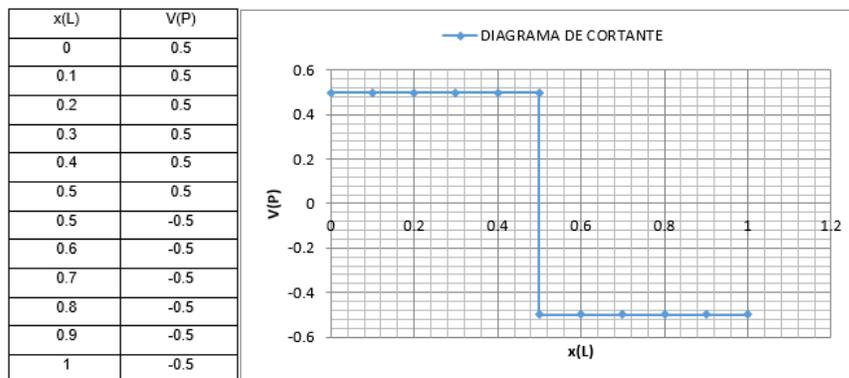
$$y_{max2} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{P}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{Pl}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{3PL^2}{16} \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{PL^3}{48} \right) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{PL^3}{96} + \frac{PL^3}{16} - \frac{3PL^3}{32} + \frac{PL^3}{48} \right)$$

$$y_{max2} = -\frac{PL^3}{48EI} \quad \therefore y_{max2} = \frac{PL^3}{48EI} \downarrow$$

Observese que por la simetría de la viga, la flecha máxima y su posición ( $\frac{L}{2}$  forzosamente) en el primer tramo son iguales a la del segundo tramo.

**Diagramas de fuerza cortante, momento flector, rotación y deflexión (curva elástica)**

Los datos acomodados en las tablas 1-5, 1-6, 1-7 y 1-8 son una consecuencia de evaluar las funciones de fuerza cortante, de momento flector, de rotación y de deflexión en el intervalo para las que son válidas. Las figuras 1-8h, 1-8i, 1-8j y 1-8k corresponden a los diagramas requeridos.



**Tabla 1-5**

**(h)**

CAPÍTULO 1 ANÁLISIS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

| x(L) | M(PL) |
|------|-------|
| 0    | 0     |
| 0.1  | 0.05  |
| 0.2  | 0.1   |
| 0.3  | 0.15  |
| 0.4  | 0.2   |
| 0.5  | 0.25  |
| 0.5  | 0.25  |
| 0.6  | 0.2   |
| 0.7  | 0.15  |
| 0.8  | 0.1   |
| 0.9  | 0.05  |
| 1    | 0     |

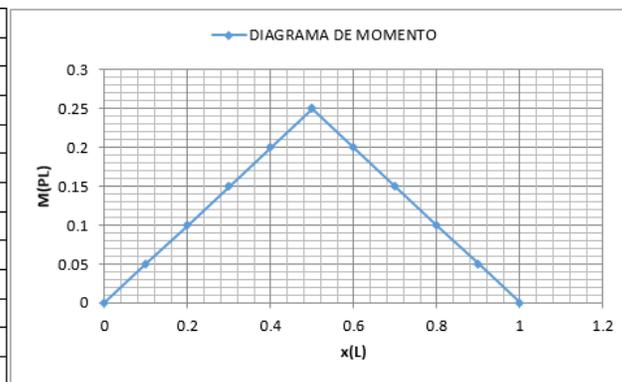


Tabla 1-6

(i)

| x(L) | $\theta((P*L^2)/EI)$ |
|------|----------------------|
| 0    | -0.0625              |
| 0.1  | -0.06                |
| 0.2  | -0.0525              |
| 0.3  | -0.04                |
| 0.4  | -0.0225              |
| 0.5  | 0                    |
| 0.5  | 0                    |
| 0.6  | 0.0225               |
| 0.7  | 0.04                 |
| 0.8  | 0.0525               |
| 0.9  | 0.06                 |
| 1    | 0.0625               |

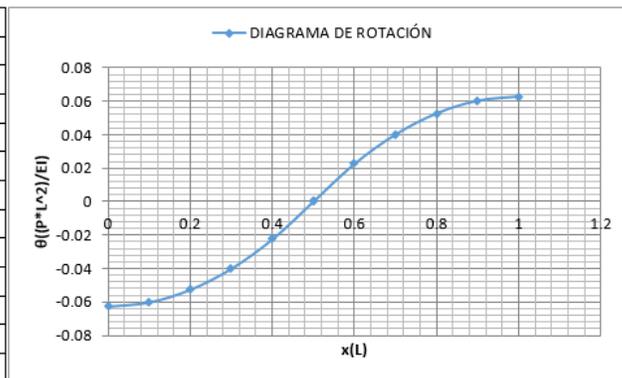


Tabla 1-7

(j)

| x(L) | $Y((P*L^3)/EI)$ |
|------|-----------------|
| 0    | 0               |
| 0.1  | -0.00616667     |
| 0.2  | -0.01183333     |
| 0.3  | -0.0165         |
| 0.4  | -0.01966667     |
| 0.5  | -0.02083333     |
| 0.5  | -0.02083333     |
| 0.6  | -0.01966667     |
| 0.7  | -0.0165         |
| 0.8  | -0.01183333     |
| 0.9  | -0.00616667     |
| 1    | 0               |

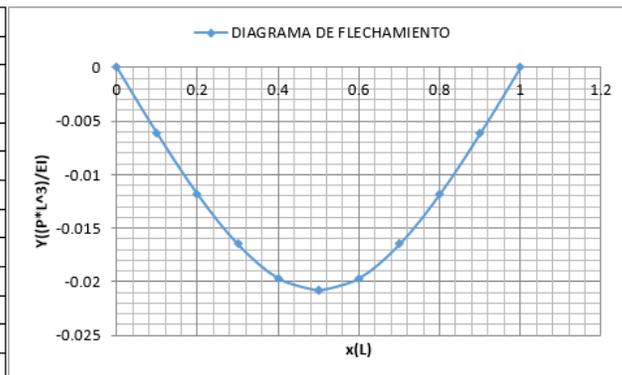
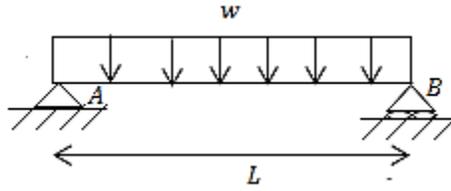


Tabla 1-8

(k)

**Ejercicio 1.9**



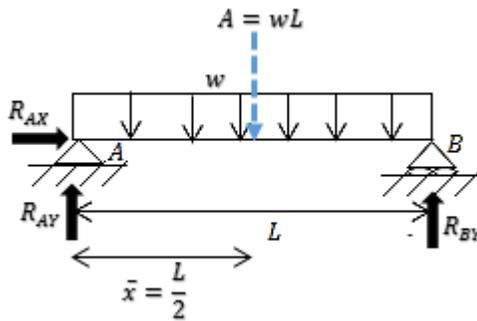
(a)

**Figura 1-9**

**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**

**Diagrama de cargas.** Este diagrama se visualiza en la figura 1-9b. Obsérvese que se ha determinado la fuerza resultante A de la carga distribuida uniforme y su punto de aplicación  $\bar{x}$ .



(b)

**Ecuaciones de equilibrio.**

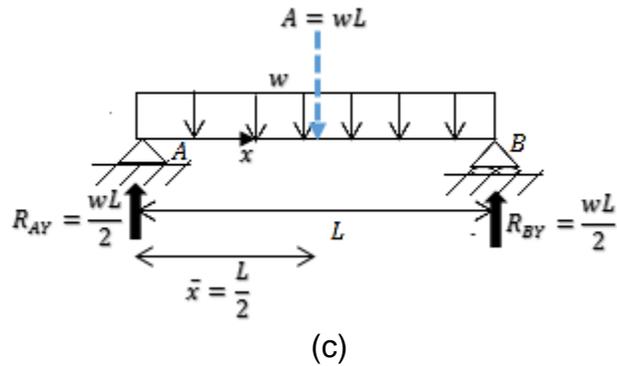
$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow (wL) \left( \frac{L}{2} \right) - R_{BY}(L) = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{-\frac{wL^2}{2}}{-L} \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{wL}{2} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - wL + \frac{wL}{2} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{wL}{2} \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

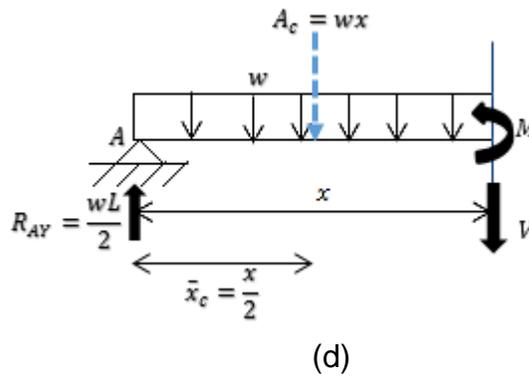
### Funciones de fuerza cortante y de momento

Los resultados obtenidos son observados en la figura 1-9c.



Se aplican las ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cuerpo libre de la sección cortada, figura 1-9d, con la finalidad de obtener expresiones algebraicas que describan la variación de los elementos mecánicos.

$$0 \leq x \leq L$$



$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M + \frac{wL}{2}(x) - (wx)\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow M = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{wL}{2} - wx$$

### Cálculo del momento máximo

La posición del momento máximo se halla en el punto donde  $V = 0$ . Luego, el valor máximo del momento se determina haciendo  $x_{max} = x$  en la ecuación de  $M$ .

$$0 = \frac{wL}{2} - wx \Rightarrow x = \frac{-\frac{wL}{2}}{-\frac{w}{1}} \Rightarrow \therefore x_{max} = \frac{L}{2}$$

$$M_{max} = \frac{wL}{2} \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{w}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{wL^2}{4} - \frac{wL^2}{8} = \frac{wL^2}{8}$$

### Ecuaciones de la pendiente y la deflexión usando el método de la integración directa

Al plicar la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

e integrarla dos veces, se obtiene

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int \left(\frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2\right) dx \Rightarrow EI \frac{dy}{dx} = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + C_1$$

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + C_1 \text{ --- } \textcircled{1}$$

$$EI \int dy = \int \left(\frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + C_1\right) dx \Rightarrow EIy = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + C_1x + C_2 \text{ --- } \textcircled{2}$$

### Método del trabajo virtual unificado con el método de la integración doble

Para calcular las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  usaremos dos condiciones de frontera. Por inspección, la viga no experimenta desplazamiento vertical en el punto A, por ende, 1)  $y = 0$  en  $x = 0$ ; la segunda condición se planteará a partir de calcular la rotación en A ( $\theta_A$ ) por medio del **método del trabajo virtual** como sigue

**Momento real  $M$ .** Corresponde a la siguiente función que ya ha sido deducida:

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \quad 0 \leq x \leq L$$

**Momento virtual  $m_\theta$ .** Remítase al ejercicio 1.8, figuras 1-8f y 1-8g.

$$m_\theta = 1 - \frac{1}{L}x \quad 0 \leq x \leq L$$

**Ecuación del trabajo virtual.** Entonces, el giro en A es resultado de

$$1 \cdot \theta_A = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_\theta}{EI} dx$$

$$1 \cdot \theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \right) \left( 1 - \frac{1}{L}x \right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - \frac{w}{2}x^2 + \frac{w}{2L}x^3 \right) dx$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{wL}{2}x - wx^2 + \frac{w}{2L}x^3 \right) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{3}x^3 + \frac{w}{8L}x^4 \right]_0^L$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left( \frac{wL^3}{4} - \frac{wL^3}{3} + \frac{wL^3}{8} \right) = \frac{wL^3}{24EI} \quad \therefore \theta_A = \frac{wL^3}{24EI} \curvearrowright$$

En consecuencia, la otra condición es: 2)  $\theta = -\frac{wL^3}{24EI}$  en  $x = 0$

Sustituyendo la condición 2) en la ecuación ① da

$$EI \left( -\frac{wL^3}{24EI} \right) = \frac{wL}{4}(0)^2 - \frac{w}{6}(0)^3 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{-wL^3}{24}$$

Sustituyendo la condición 1) en la ecuación ② tenemos

$$0 = \frac{wL}{12}(0)^3 - \frac{w}{24}(0)^4 - \frac{wL^3}{24}(0) + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

Reemplazando los valores de las constantes en las expresiones ① y ②, se infiere que las ecuaciones de la pendiente y la deflexión son, respectivamente

$$\theta = \frac{1}{EI} \left( \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 - \frac{wL^3}{24} \right) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$y = \frac{1}{EI} \left( \frac{wL}{12} x^3 - \frac{w}{24} x^4 - \frac{wL^3}{24} x \right) \quad 0 \leq x \leq L$$

### Cálculo de la flecha máxima

Para conocer la posición de la flecha máxima hacemos  $\theta = 0$ , simplificamos y hallamos las raíces.

$$0 = \frac{wL}{4} x^2 - \frac{w}{6} x^3 - \frac{wL^3}{24} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{6} x^3 + \frac{L}{4} x^2 - \frac{L^3}{24}$$

Haciendo uso del método de la división sintética es posible hallar una raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -\frac{1}{6} & \frac{L}{4} & 0 & -\frac{L^3}{24} \\ \frac{L}{2} & & -\frac{L}{12} & \frac{L^2}{12} & \frac{L^3}{24} \\ \hline & -\frac{1}{6} & \frac{L}{6} & \frac{L^2}{12} & 0 \end{array}$$

$$\left(x - \frac{L}{2}\right) \left(-\frac{1}{6} x^2 + \frac{L}{6} x + \frac{L^2}{12}\right) = 0 \quad x_1 = \frac{L}{2}$$

Las dos raíces restantes pueden obtenerse a través de la fórmula general.

$$-\frac{1}{6} x^2 + \frac{L}{6} x + \frac{L^2}{12} = 0$$

$$x = \frac{-\frac{L}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{L}{6}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{L^2}{12}\right)}}{2\left(-\frac{1}{6}\right)}$$

$$x_2 = \left(\frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{-\frac{1}{3}}\right)L = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)L \quad x_3 = \left(\frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{-\frac{1}{3}}\right)L = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)L$$

De las tres raíces anteriores, únicamente la primera está dentro del intervalo real de la viga  $[0, L]$ , así que  $x_{max} = \frac{L}{2}$ .

El valor máximo de la deflexión es

$$y_{max} = \frac{1}{EI} \left( \left( \frac{wL}{12} \right) \left( \frac{1}{2}L \right)^3 - \left( \frac{w}{24} \right) \left( \frac{L}{2} \right)^4 - \left( \frac{wL^3}{24} \right) \left( \frac{L}{2} \right) \right) = \frac{1}{EI} \left( wL^4 \left( \frac{1}{96} - \frac{1}{384} - \frac{1}{48} \right) \right)$$

$$y_{max} = \left( -\frac{5}{384} \right) \left( \frac{wL^4}{EI} \right) \quad \therefore y_{max} = \left( \frac{5}{384} \right) \left( \frac{wL^4}{EI} \right) \downarrow$$

Si se desea conocer el valor de la pendiente en  $B$  por ejemplo, basta con sustituir  $x = L$  en la ecuación del giro y despejar  $\theta_B$ .

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left( \frac{wL}{12} (L)^2 - \frac{w}{24L} (L)^4 - \frac{7wL^3}{360} \right) \Rightarrow \theta_B = \frac{wL^3}{45EI}$$

$$\therefore \theta_B = \frac{wL^3}{45EI} \curvearrowright$$

### Diagramas de fuerza cortante, momento flector, rotación y deflexión

Diversos valores de  $x$  son reemplazados en las ecuaciones  $V$ ,  $M$ ,  $\theta$  y  $y$ . Al graficar los datos de las tablas 1-9, 1-10, 1-11 y 1-12 se obtienen los diagramas necesarios, figuras 1-9e, 1-9f, 1-9g y 1-9h.

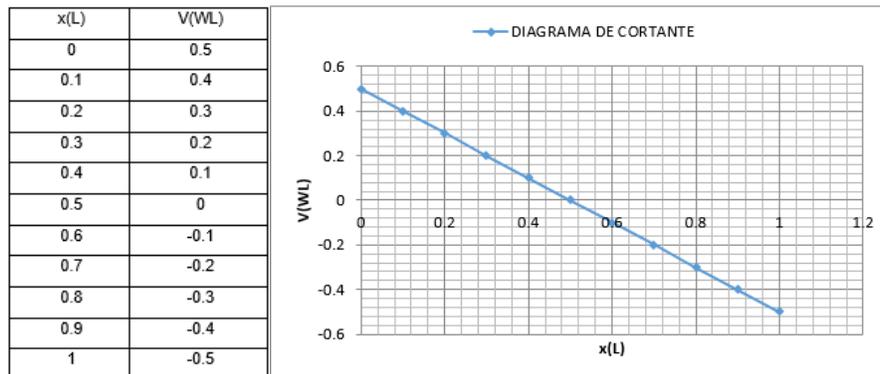


Tabla 1-9

(e)

CAPÍTULO 1 ANÁLISIS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

| x(L) | $\theta((W*L^3)/EI)$ |
|------|----------------------|
| 0    | -0.041666667         |
| 0.1  | -0.039333333         |
| 0.2  | -0.033               |
| 0.3  | -0.023666667         |
| 0.4  | -0.012333333         |
| 0.5  | 0                    |
| 0.6  | 0.012333333          |
| 0.7  | 0.023666667          |
| 0.8  | 0.033                |
| 0.9  | 0.039333333          |
| 1    | 0.041666667          |

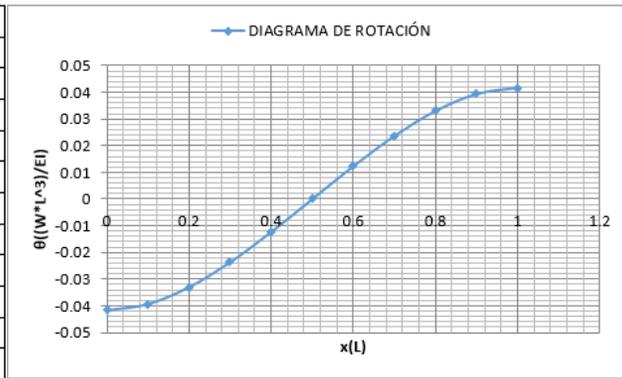


Tabla 1-10

(f)

| x(L) | M(W*L^2) |
|------|----------|
| 0    | 0        |
| 0.1  | 0.045    |
| 0.2  | 0.08     |
| 0.3  | 0.105    |
| 0.4  | 0.12     |
| 0.5  | 0.125    |
| 0.6  | 0.12     |
| 0.7  | 0.105    |
| 0.8  | 0.08     |
| 0.9  | 0.045    |
| 1    | 0        |

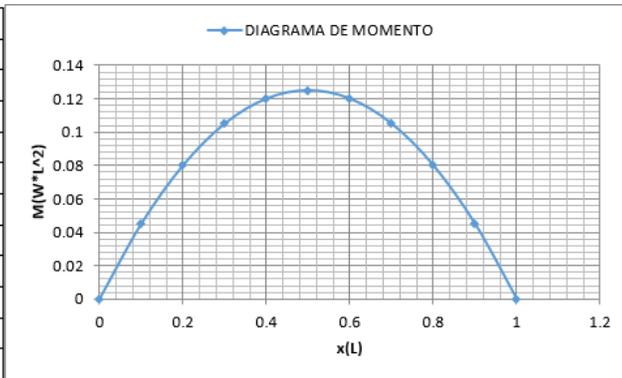


Tabla 1-11

(g)

| x(L) | $Y((W*L^4)/EI)$ |
|------|-----------------|
| 0    | 0               |
| 0.1  | -0.0040875      |
| 0.2  | -0.007733333    |
| 0.3  | -0.0105875      |
| 0.4  | -0.0124         |
| 0.5  | -0.013020833    |
| 0.6  | -0.0124         |
| 0.7  | -0.0105875      |
| 0.8  | -0.007733333    |
| 0.9  | -0.0040875      |
| 1    | 0               |

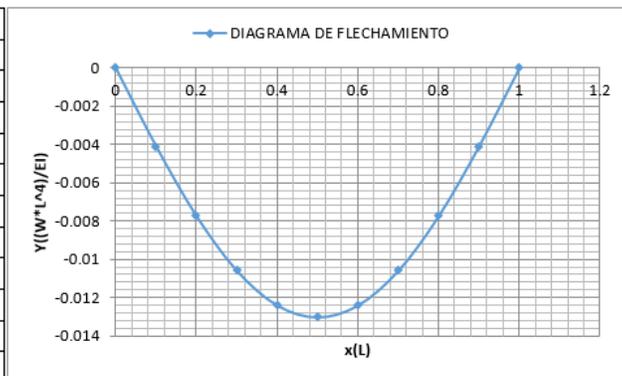
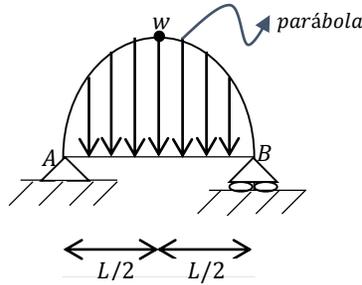


Tabla 1-12

(h)

**Ejercicio 1.10**



(a)

**Figura 1-10**

**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**

**Diagrama de cargas.** Inicialmente se efectúa un análisis de la presión cuya intensidad es descrita por una curva parabólica. El procedimiento que se muestra a continuación es útil para determinar el área bajo la curva que representa la fuerza resultante y localizar el punto donde actúa, es decir el centroide de su área.

La ecuación de la intensidad parabólica puede expresarse de la siguiente forma:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ --- (I)}$$

Si se toma como origen el punto A, los tres puntos conocidos de la curva son

$$\text{en } x = 0, y = 0; \quad \text{en } x = \frac{L}{2}, y = w; \quad \text{en } x = L, y = 0$$

Es posible construir un sistema de ecuaciones reemplazando cada uno de los puntos anteriores de manera individual en la ecuación (I) con la finalidad de calcular las constantes  $a, b$  y  $c$ .

$$0 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow 0a + 0b + c = 0 \text{ --- (1)}$$

$$w = a\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b\left(\frac{L}{2}\right) + c \Rightarrow \frac{L^2}{4}a + \frac{L}{2}b + c = w \text{ --- (2)}$$

$$0 = a(L)^2 + b(L) + c \Rightarrow L^2a + Lb + c = 0 \text{ --- (3)}$$

Resolviendo el sistema (1) hasta (3) con el Método de Cramer tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & 1 & | & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} \\ L^2 & L & 1 & | & L^2 & L \end{vmatrix} = \left(0 + 0 + \frac{L^3}{4}\right) - \left(0 + 0 + \frac{L^3}{2}\right) = -\frac{L^3}{4}$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ w & \frac{L}{2} & 1 & | & w & \frac{L}{2} \\ 0 & L & 1 & | & 0 & L \end{vmatrix} = (0 + 0 + wL) - (0 + 0 + 0) = wL$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{4} & w & 1 & | & \frac{L^2}{4} & w \\ L^2 & 0 & 1 & | & L^2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + L^2w) = -L^2w$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} & w & | & \frac{L^2}{4} & \frac{L}{2} \\ L^2 & L & 0 & | & L^2 & L \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 0$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{wL}{-\frac{L^3}{4}} = -4\frac{w}{L^2}; \quad b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-L^2w}{-\frac{L^3}{4}} = 4\frac{w}{L}; \quad c = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{0}{-\frac{L^3}{4}} = 0$$

En consecuencia, la ecuación que define la intensidad parabólica de la carga es

$$y = -4\frac{w}{L^2}x^2 + 4\frac{w}{L}x$$

El punto de aplicación de la fuerza resultante se obtiene de

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx} = \frac{\int_0^L x \left(-4\frac{w}{L^2}x^2 + 4\frac{w}{L}x\right) dx}{\int_0^L \left(-4\frac{w}{L^2}x^2 + 4\frac{w}{L}x\right) dx}$$

Resolviendo el numerador da

$$\begin{aligned} \int_0^L x \left(-4\frac{w}{L^2}x^2 + 4\frac{w}{L}x\right) dx &= -4\frac{w}{L^2} \int_0^L x^3 dx + 4\frac{w}{L} \int_0^L x^2 dx \\ &= -4\frac{w}{L^2} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^L + 4\frac{w}{L} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{-4w}{4L^2} [L^4 - 0^4] + \frac{4w}{3L} [L^3 - 0^3] = -wL^2 + \frac{4}{3}wL^2 = \frac{wL^2}{3} \end{aligned}$$

Resolviendo el denominador se tiene

$$\int_0^L \left( -4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x \right) dx = -4 \frac{w}{L^2} \int_0^L x^2 dx + 4 \frac{w}{L} \int_0^L x dx$$

$$= -4 \frac{w}{L^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L + 4 \frac{w}{L} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^L = -\frac{4w}{3L^2} [L^3 - 0^3] + \frac{4w}{2L} [L^2 - 0^2] = -\frac{4}{3} wL + 2wL = \frac{2}{3} wL$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{wL^2}{3}}{\frac{2wL}{3}} = \frac{3wL^2}{6wL} = \frac{1}{2} L$$

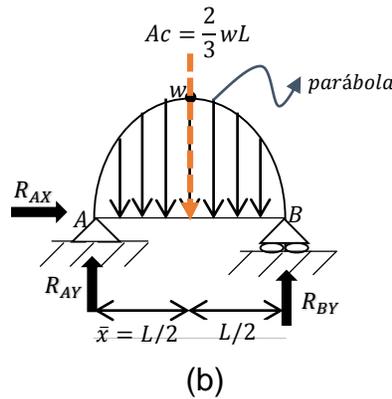
El área bajo la curva es igual a la carga concentrada equivalente de la presión.

$$Ac = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx$$

Obsérvese que dicha área siempre será el denominador de la ecuación para calcular el brazo de palanca. Por lo tanto,

$$Ac = \int_0^L \left( -4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x \right) dx = \frac{2}{3} wL$$

El diagrama de cargas, figura 1-10b, se completa identificando las reacciones en los apoyos cuyos sentidos se suponen arbitrariamente debido a que son incógnitas.



**Ecuaciones de equilibrio.**

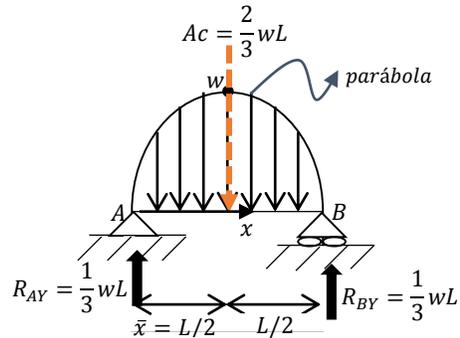
$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow \left( \frac{2}{3} wL \right) \left( \frac{1}{2} L \right) - R_{BY}(L) = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{-\frac{wL^2}{3}}{-\frac{1}{1}} = \frac{wL^2}{3L} \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{1}{3} wL \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - Ac + R_{BY} = 0 \Rightarrow R_{AY} = Ac - R_{BY} = \frac{2}{3} wL - \frac{1}{3} wL \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{1}{3} wL \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

### Funciones de fuerza cortante y de momento

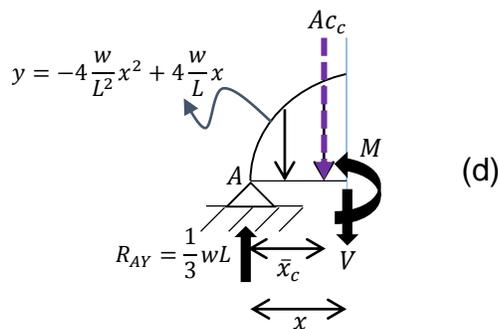
En la figura 1-10c se especifica la coordenada  $x$  a utilizar cuyo origen se selecciona en A. Como no hay discontinuidad de carga a lo largo de la estructura, sólo se efectuará un corte perpendicular al eje de la viga.



(c)

A continuación, en la figura 1-10d se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud  $x$ . Previo a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio para deducir las funciones de fuerza cortante y de momento, se determina la carga concentrada equivalente de la presión de intensidad parabólica del corte y su punto de aplicación.

$$0 \leq x \leq L$$



(d)

$$\bar{x}_c = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx} = \frac{\int_0^x x \left( -4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x \right) dx}{\int_0^x \left( -4 \frac{w}{L^2} x^2 + 4 \frac{w}{L} x \right) dx} = \frac{-4 \frac{w}{L^2} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^x + 4 \frac{w}{L} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^x}{-4 \frac{w}{L^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^x + 4 \frac{w}{L} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^x}$$

$$\bar{x}_c = \frac{\frac{-4w}{4L^2}[x^4 - 0^4] + \frac{4w}{4L}[x^3 - 0^3]}{\frac{-4w}{3L^2}[x^3 - 0^3] + \frac{4w}{2L}[x^2 - 0^2]} = \frac{-\frac{w}{L^2}x^4 + \frac{4w}{3L}x^3}{-\frac{4w}{3L^2}x^3 + \frac{2w}{L}x^2}$$

$$Ac_c = -\frac{4w}{3L^2}x^3 + \frac{2w}{L}x^2$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M + \left(\frac{1}{3}wL\right)(x) - \left(-\frac{4w}{3L^2}x^3 + \frac{2w}{L}x^2\right)\left(x - \frac{-\frac{w}{L^2}x^4 + \frac{4w}{3L}x^3}{-\frac{4w}{3L^2}x^3 + \frac{2w}{L}x^2}\right) = 0$$

$$M = \frac{wL}{3}x - \left(-\frac{4w}{3L^2}x^4 + \frac{2w}{L}x^3 + \frac{w}{L^2}x^4 - \frac{4w}{3L}x^3\right) = \frac{w}{3L^2}x^4 - \frac{2w}{3L}x^3 + \frac{wL}{3}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{4w}{3L^2}x^3 - \frac{2w}{L}x^2 + \frac{wL}{3}$$

### Cálculo del momento máximo

El momento máximo está posicionado en el punto donde  $V = 0$ .

$$0 = \frac{4w}{3L^2}x^3 - \frac{2w}{L}x^2 + \frac{wL}{3} \Rightarrow 0 = \frac{4}{3L^2}x^3 - \frac{2}{L}x^2 + \frac{L}{3}$$

Como hemos visto en los ejercicios anteriores, sólo una de las raíces es la requerida; para obtenerla, esta vez hacemos uso del método de tanteos y debido a que el momento máximo está ubicado dentro del intervalo real de la viga  $[0, L]$ , evaluamos de 0 a  $L$  el polinomio  $f(x) = \frac{4}{3L^2}x^3 - \frac{2}{L}x^2 + \frac{L}{3}$  y en donde haya un cambio de signo tenemos una solución, tabla 1-13; iteramos “n” veces hasta que nuestra solución sea lo más exacta posible.

| $x (L)$ | $f(x) (L)$ |
|---------|------------|
| 0       | 0.3333     |
| 0.1     | 0.3147     |
| 0.2     | 0.2640     |
| 0.3     | 0.1893     |
| 0.4     | 0.0987     |
| 0.5     | 0.0000     |
| 0.6     | -0.0987    |
| 0.7     | -0.1893    |
| 0.8     | -0.2640    |
| 0.9     | -0.3147    |
| 1       | -0.3333    |

Tabla 1-13

Por lo tanto, el momento máximo se localiza a una distancia de  $x_{max} = 0.5L = L/2$ .

El valor máximo del momento es

$$M_{max} = \frac{wL^4}{48L^2} - \frac{2wL^3}{24L} + \frac{wL^2}{6} = \frac{5}{48}wL^2$$

### Ecuaciones de la pendiente y la deflexión usando el método de la integración directa

Al aplicar la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

e integrarla dos veces, se obtiene

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{3L^2}x^4 - \frac{2w}{3L}x^3 + \frac{wL}{3}x \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int \left( \frac{w}{3L^2}x^4 - \frac{2w}{3L}x^3 + \frac{wL}{3}x \right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{w}{15L^2}x^5 - \frac{w}{6L}x^4 + \frac{wL}{6}x^2 + C_1 \Rightarrow EI\theta = \frac{w}{15L^2}x^5 - \frac{w}{6L}x^4 + \frac{wL}{6}x^2 + C_1 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$EI \int dy = \int \left( \frac{w}{15L^2}x^5 - \frac{w}{6L}x^4 + \frac{wL}{6}x^2 + C_1 \right) dx$$

$$EIy = \frac{w}{90L^2}x^6 - \frac{w}{30L}x^5 + \frac{wL}{18}x^3 + C_1x + C_2 \rightarrow \textcircled{2}$$

### Método del trabajo virtual unificado con el método de la integración doble

Para calcular las dos constantes de integración anteriores usaremos dos condiciones de frontera. Por inspección, la viga no experimenta desplazamiento vertical en el punto A, por ende, 1)  $y = 0$  en  $x = 0$ ; la segunda condición se planteará a partir de calcular la rotación en A ( $\theta_A$ ) por medio del [método del trabajo virtual](#).

**Momento real  $M$ .** Corresponde a la siguiente función que ya ha sido deducida:

$$M = \frac{w}{3L^2}x^4 - \frac{2w}{3L}x^3 + \frac{wL}{3}x \quad 0 \leq x \leq L$$

**Momento virtual  $m_\theta$ .** Remítase al ejercicio 1.8, figuras 1-8f y 1-8g.

$$m_\theta = 1 - \frac{1}{L}x \quad 0 \leq x \leq L$$

**Ecuación del trabajo virtual.** Entonces, la pendiente en  $A$  es resultado de

$$1 \cdot \theta_A = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_\theta}{EI} dx$$

$$1 \cdot \theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{w}{3L^2} x^4 - \frac{2w}{3L} x^3 + \frac{wL}{3} x \right) \left( 1 - \frac{1}{L} x \right) dx$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( \frac{w}{3L^2} x^4 - \frac{2w}{3L} x^3 + \frac{wL}{3} x - \frac{w}{3L^3} x^5 + \frac{2w}{3L^2} x^4 - \frac{w}{3} x^2 \right) dx$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{w}{18L^3} x^6 + \frac{w}{5L^2} x^5 - \frac{w}{6L} x^4 - \frac{w}{9} x^3 + \frac{wL}{6} x^2 \right]_0^L$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{w}{18L^3} (L)^6 + \frac{w}{5L^2} (L)^5 - \frac{w}{6L} (L)^4 - \frac{w}{9} (L)^3 + \frac{wL}{6} (L)^2 \right] = \frac{wL^3}{30EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{wL^3}{30EI} \curvearrowright$$

Finalmente, la otra condición es: 2)  $\theta = -\frac{wL^3}{30EI}$  en  $x = 0$

Sustituyendo la condición 2) en la ecuación (1) se obtiene

$$EI \left( -\frac{wL^3}{30EI} \right) = \frac{w}{15L^2} (0)^5 - \frac{w}{6L} (0)^4 + \frac{wL}{6} (0)^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{wL^3}{30}$$

Sustituyendo la condición 1) en la ecuación (2) resulta

$$EI(0) = \frac{w}{90L^2} (0)^6 - \frac{w}{30L} (0)^5 + \frac{wL}{18} (0)^3 - \frac{wL^3}{30} (0) + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

Reemplazando los valores de las constantes en las ecuaciones (1) y (2) se infiere que las ecuaciones de la pendiente y la deflexión son, respectivamente

$$\theta = \frac{1}{EI} \left( \frac{w}{15L^2} x^5 - \frac{w}{6L} x^4 + \frac{wL}{6} x^2 - \frac{wL^3}{30} \right) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$y = \frac{1}{EI} \left( \frac{w}{90L^2} x^6 - \frac{w}{30L} x^5 + \frac{wL}{18} x^3 - \frac{wL^3}{30} x \right) \quad 0 \leq x \leq L$$

### Cálculo de la flecha máxima

Haciendo  $\theta = 0$  y simplificando la expresión del giro se tiene

$$0 = \frac{1}{15L^2} x^5 - \frac{1}{6L} x^4 + \frac{L}{6} x^2 - \frac{L^3}{30}$$

Nuevamente aplicamos el método de tanteos; el polinomio a evaluar de 0 a  $L$  es

$$f(x) = \frac{1}{15L^2}x^5 - \frac{1}{6L}x^4 + \frac{L}{6}x^2 - \frac{L^3}{30}$$

De acuerdo a la tabla 1-14 vemos cómo una sola iteración es suficiente en este caso.

| $x (L)$ | $f(x) (L^3)$ |
|---------|--------------|
| 0       | -0.0333      |
| 0.1     | -0.0317      |
| 0.2     | -0.0269      |
| 0.3     | -0.0195      |
| 0.4     | -0.0103      |
| 0.5     | 0.0000       |
| 0.6     | 0.0103       |
| 0.7     | 0.0195       |
| 0.8     | 0.0269       |
| 0.9     | 0.0317       |
| 1       | 0.0333       |

**Tabla 1-14**

La solución de la ecuación del giro igualada a cero indica que la deflexión máxima se presenta en el punto  $x_{max} = 0.5L = L/2$ .

Sustituyendo  $x_{max} = x$  en la ecuación de la deflexión se obtiene el valor de la flecha máxima de la viga.

$$y_{max} = \frac{1}{EI} \left( \frac{w}{90L^2} \left(\frac{L}{2}\right)^6 - \frac{w}{30L} \left(\frac{L}{2}\right)^5 + \frac{wL}{18} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{wL^3}{30} \left(\frac{L}{2}\right) \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{wL^4}{5760} - \frac{wL^4}{960} + \frac{wL^4}{144} - \frac{wL^4}{60} \right)$$

$$y_{max} = -\frac{61wL^4}{5760EI} \quad \therefore y_{max} = \frac{61wL^4}{5760EI} \downarrow$$

Si se desea conocer el valor de la pendiente en  $B$  por ejemplo, basta con sustituir  $x = L$  en la ecuación del giro y despejar  $\theta_B$ .

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left( \frac{w}{15L^2} (L)^5 - \frac{2w}{12L} (L)^4 + \frac{wL}{6} (L)^2 - \frac{wL^3}{30} \right) \Rightarrow \theta_B = \frac{wL^3}{30EI} \Rightarrow \therefore \theta_B = \frac{wL^3}{30EI} \curvearrowright$$

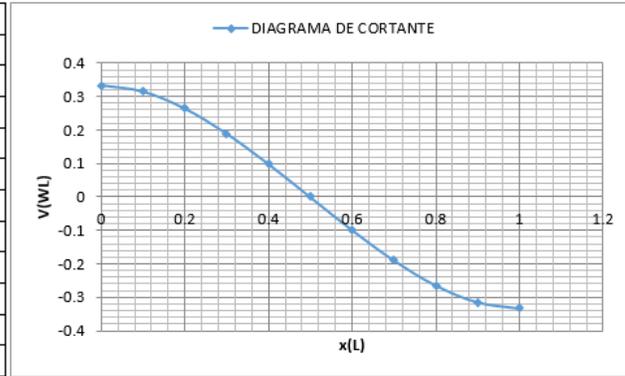
### Diagramas de fuerza cortante, momento flector, rotación y deflexión

Los datos que se observan en las tablas 1-15, 1-16, 1-17 y 1-18 son producto de evaluar las funciones de fuerza cortante, de momento flector, de rotación y de deflexión en el intervalo  $0 \leq x \leq L$ . Las figuras 1-10e, 1-10f, 1-10g y 1-10h, corresponden a los diagramas requeridos.

CAPÍTULO 1 ANÁLISIS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

Tabla 1-15

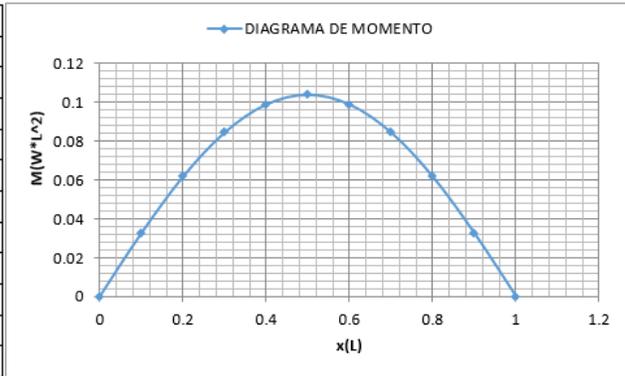
| x(L) | V(WL)        |
|------|--------------|
| 0    | 0.333333333  |
| 0.1  | 0.314666667  |
| 0.2  | 0.264        |
| 0.3  | 0.189333333  |
| 0.4  | 0.098666667  |
| 0.5  | 0            |
| 0.6  | -0.098666667 |
| 0.7  | -0.189333333 |
| 0.8  | -0.264       |
| 0.9  | -0.314666667 |
| 1    | -0.333333333 |



(e)

Tabla 1-16

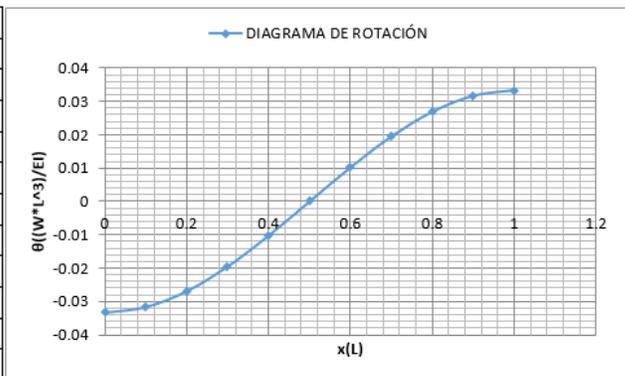
| x(L) | M(W*L^2)    |
|------|-------------|
| 0    | 0           |
| 0.1  | 0.0327      |
| 0.2  | 0.061866667 |
| 0.3  | 0.0847      |
| 0.4  | 0.0992      |
| 0.5  | 0.104166667 |
| 0.6  | 0.0992      |
| 0.7  | 0.0847      |
| 0.8  | 0.061866667 |
| 0.9  | 0.0327      |
| 1    | 0           |



(f)

Tabla 1-17

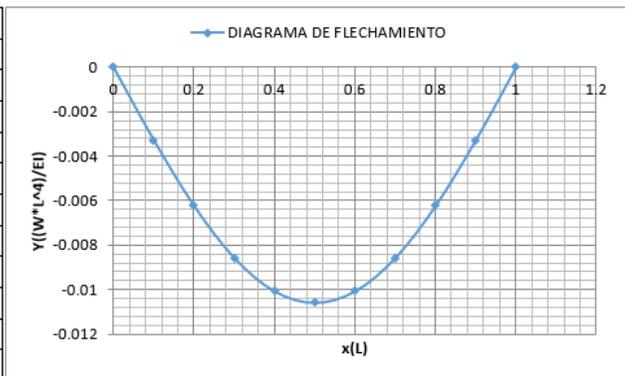
| x(L) | $\theta((W*L^3)/EI)$ |
|------|----------------------|
| 0    | -0.033333333         |
| 0.1  | -0.031682667         |
| 0.2  | -0.026912            |
| 0.3  | -0.019521333         |
| 0.4  | -0.010250667         |
| 0.5  | 0                    |
| 0.6  | 0.010250667          |
| 0.7  | 0.019521333          |
| 0.8  | 0.026912             |
| 0.9  | 0.031682667          |
| 1    | 0.033333333          |



(g)

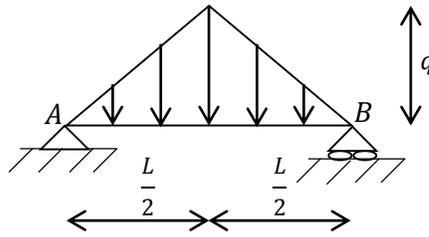
Tabla 1-18

| x(L) | $Y((W*L^4)/EI)$ |
|------|-----------------|
| 0    | 0               |
| 0.1  | -0.0032781      |
| 0.2  | -0.006232178    |
| 0.3  | -0.0085729      |
| 0.4  | -0.0100736      |
| 0.5  | -0.010590278    |
| 0.6  | -0.0100736      |
| 0.7  | -0.0085729      |
| 0.8  | -0.006232178    |
| 0.9  | -0.0032781      |
| 1    | 0               |



(h)

**Ejercicio 1.11**



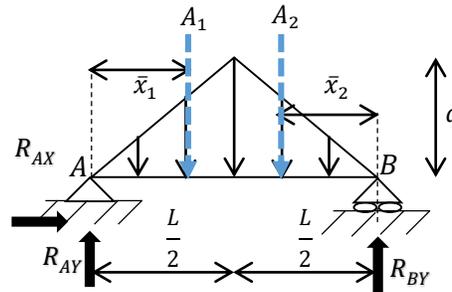
(a)

**Figura 1-11**

**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**

**Diagrama de cargas.** Obsérvese que deben determinarse las cargas concentradas equivalentes  $A_i$  de las dos presiones en forma de triángulo rectángulo, así como su punto de aplicación  $\bar{x}_i$ . El diagrama de cargas de la viga se proporciona en la figura 1-11b.



(b)

**Ecuaciones de equilibrio.**

$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{L}{2}\right)}_{A_1} (q) \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\bar{x}_1} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{\bar{x}_1} \underbrace{\left(\frac{L}{2}\right)}_{\bar{x}_1} + \underbrace{\left(\frac{L}{2}\right)}_{A_2} (q) \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\bar{x}_2} \underbrace{\left(\frac{L}{2} + \left(\frac{L}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right)\right)}_{\bar{x}_2} - R_{BY}(L) = 0$$

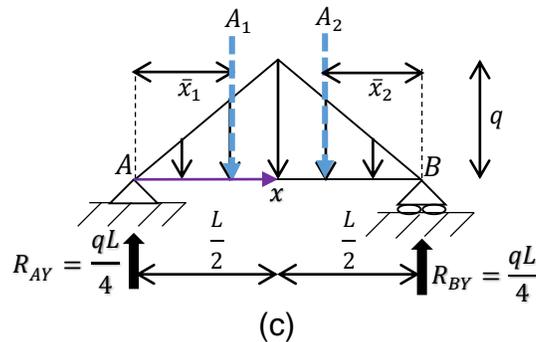
$$\frac{qL^2}{12} + \frac{qL^2}{6} - R_{BY}(L) = 0 \Rightarrow R_{BY} = \frac{\frac{qL^2}{4}}{\frac{L}{1}} = \frac{qL^2}{4L} \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{qL}{4} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - \left(\frac{L}{2}\right)(q) \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)(q) \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{qL}{4} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{qL}{4} \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

### Funciones de fuerza cortante y de momento

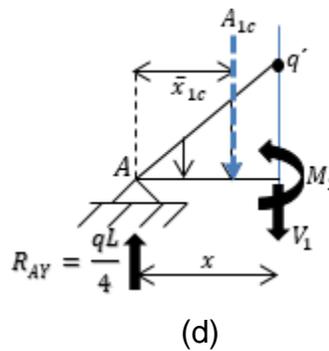
Como se observa en la figura 1-11c, se tomará como origen del sistema coordenado el punto A; en consecuencia,  $x$  es válida para  $0 \leq x \leq L$ .



Como la distribución de la carga que actúa a lo largo de la estructura presenta una discontinuidad (en la mitad del claro A – B), deben efectuarse dos cortes perpendiculares al eje de la viga.

Corte en el tramo ①. Se secciona la viga a una distancia  $x$  de A en un punto arbitrario antes de  $L/2$ , es decir, antes de que la intensidad de la carga triangular alcance el valor de  $q$ . El diagrama de cuerpo libre de la sección cortada se visualiza en la figura 1-11d.

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$



Debido a que la carga triangular se encuentra en proporción, se infiere que

$$\frac{q}{\frac{L}{2}} = \frac{q'}{x} \Rightarrow q' = \frac{2q}{L}x$$

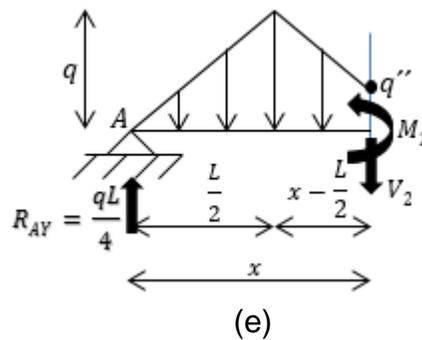
El equilibrio estático del cuerpo libre implica que

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 + \frac{qL}{4}(x) - \left[ \frac{A_{1c}}{2} \left( \frac{2q}{L}x \right) \right] \left( x - \frac{\bar{x}_{1c}}{3} \right) = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = \frac{qL}{4} - \frac{q}{L}x^2$$

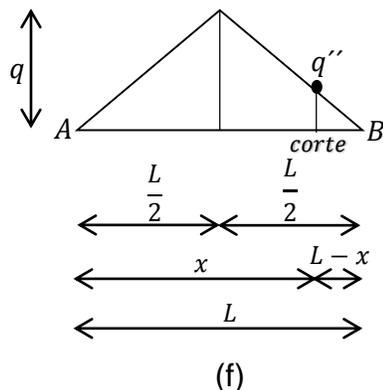
Corte en el tramo (2). Se secciona la viga a una distancia  $x$  de  $A$  en un punto arbitrario justo después de  $L/2$ . En la figura 1-11e es visualizado el diagrama de cuerpo libre para éste segmento de viga con longitud  $x$ .

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$



Previo a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, deben determinarse los valores de  $q''$  y de la carga concentrada equivalente y su punto de aplicación de la presión mostrada.

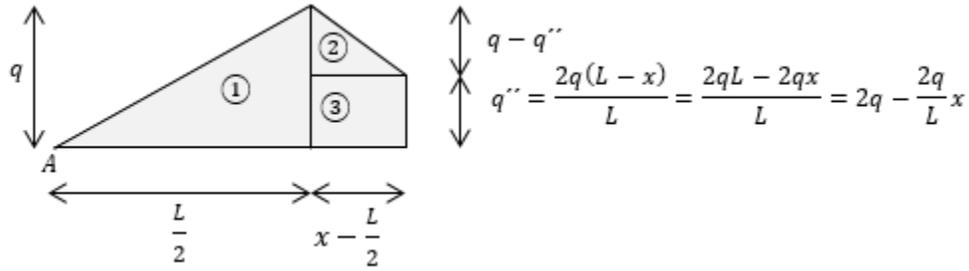
Con base en la figura 1-11f, el valor de la intensidad  $q''$  en función de  $x$  es



$$\frac{q}{\frac{L}{2}} = \frac{q''}{L-x}$$

$$q'' = \frac{q(L-x)}{\frac{L}{2}} = \frac{2q(L-x)}{L}$$

Para la parte izquierda de la presión seccionada, figura 1-11g, se deduce que



(g)

$$A_1 = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)(q)}{2} = \frac{\frac{qL}{2}}{2} = \frac{qL}{4}$$

$$A_{2c} = \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)\left(q - \left(2q - \frac{2q}{L}x\right)\right)}{2} = \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)\left(-q + \frac{2q}{L}x\right)}{2} = \frac{-qx + \frac{2q}{L}x^2 + \frac{qL}{2} - qx}{2}$$

$$= \frac{q}{L}x^2 - qx + \frac{qL}{4}$$

$$A_{3c} = \left(x - \frac{L}{2}\right)\left(2q - \frac{2q}{L}x\right) = 2qx - \frac{2q}{L}x^2 - qL + qx = -\frac{2q}{L}x^2 - qL + 3qx$$

$$\bar{x}_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{3}$$

$$\bar{x}_{2c} = \frac{L}{2} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2} + \frac{x}{3} - \frac{L}{6} = \frac{x}{3} + \frac{L}{3}$$

$$\bar{x}_{3c} = \frac{L}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2} + \frac{x}{2} - \frac{L}{4} = \frac{x}{2} + \frac{L}{4}$$

$$\bar{x}_1 A_1 = \left(\frac{L}{3}\right)\left(\frac{qL}{4}\right) = \frac{qL^2}{12}$$

$$\bar{x}_2 A_{2c} = \left(\frac{x}{3} + \frac{L}{3}\right)\left(\frac{q}{L}x^2 - qx + \frac{qL}{4}\right) = \frac{q}{3L}x^3 - \frac{qx^2}{3} + \frac{qL}{12}x + \frac{q}{3}x^2 - \frac{qL}{3}x + \frac{qL^2}{12}$$

$$\bar{x}_3 A_{3c} = \left(\frac{x}{2} + \frac{L}{4}\right)\left(-\frac{2q}{L}x^2 + 3qx - qL\right) = -\frac{q}{L}x^3 + \frac{3q}{2}x^2 - \frac{qLx}{2} - \frac{q}{2}x^2 - \frac{3qL}{4}x - \frac{qL^2}{4}$$

La información obtenida se acomoda en la tabla 1-19.

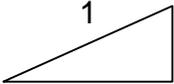
| Componente  | A                                      | $\bar{x}$                   | $\bar{x}A$  |
|---|--|-----------------------------|---|
|  | $\frac{qL}{4}$                         | $\frac{L}{3}$               | $\frac{qL^2}{12}$   |
|  | $\frac{q}{L}x^2 - qx + \frac{qL}{4}$   | $\frac{x}{3} + \frac{L}{3}$ | $\frac{q}{3L}x^3 - \frac{qL}{4}x + \frac{qL^2}{12}$       |
|  | $-\frac{2q}{L}x^2 + 3qx - qL$          | $\frac{x}{2} + \frac{L}{4}$ | $-\frac{q}{L}x^3 + qx^2 + \frac{qL}{4}x - \frac{qL^2}{4}$ |
| $\sum =$  | $-\frac{q}{L}x^2 + 2qx - \frac{qL}{2}$ |                             | $-\frac{2q}{3L}x^3 + qx^2 - \frac{qL^2}{12}$              |

Tabla 1-19

Finalmente, el área total (carga concentrada equivalente) es

$$A_T = -\frac{q}{L}x^2 + 2qx - \frac{qL}{2}$$

y el centroide del área (punto de aplicación) es

$$\bar{x}_T = \frac{\sum \bar{x} A}{\sum A} = \frac{-\frac{2q}{3L}x^3 + qx^2 - \frac{qL^2}{12}}{-\frac{q}{L}x^2 + 2qx - \frac{qL}{2}} \text{ a la derecha de A; donde } \bar{x}_T < x$$

Por lo tanto,

$$\curvearrowright \sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$-M_2 + \frac{qL}{4}(x) - \left(-\frac{q}{L}x^2 + 2qx - \frac{qL}{2}\right) \left( x - \frac{-\frac{2q}{3L}x^3 + qx^2 - \frac{qL^2}{12}}{-\frac{q}{L}x^2 + 2qx - \frac{qL}{2}} \right) = 0$$

$$M_2 = \frac{qL}{4}(x) + \frac{q}{L}x^3 - 2qx^2 + \frac{qL}{2}x - \frac{2q}{3L}x^3 + qx^2 - \frac{qL^2}{12} = \frac{q}{3L}x^3 - qx^2 + \frac{3qL}{4}x - \frac{qL^2}{12}$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{q}{L}x^2 - 2qx + \frac{3qL}{4}$$

**Cálculo del momento máximo de cada tramo**

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

La posición del momento máximo es

$$V_1 = 0 = \frac{qL}{4} - \frac{q}{L}x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{\frac{qL}{4}}{\frac{q}{L}} = \frac{qL^2}{4q} = \frac{L^2}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{L^2}{4}} \quad \therefore x_{max1} = \frac{L}{2}$$

El valor máximo del momento es

$$M_{max1} = \frac{qL}{4} \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{q}{3L} \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{qL^2}{8} - \frac{qL^2}{24} = \frac{qL^2}{12}$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

La posición del momento máximo es

$$V_2 = 0 = \frac{q}{L}x^2 - 2qx + \frac{3qL}{4}$$

$$\frac{x^2}{L} - 2x + \frac{3}{4}L = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{3}{4}L\right)}}{2(1/L)} \Rightarrow x = \left(\frac{2 \pm 1}{2}\right)L$$

$$x_1 = \frac{3}{2}L \quad x_2 = \frac{1}{2}L \quad \therefore x_{max2} = \frac{1}{2}L$$

El valor máximo del momento es

$$M_{max2} = \frac{q}{3L} \left(\frac{1}{2}L\right)^3 - q \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + \frac{3qL}{4} \left(\frac{1}{2}L\right) - \frac{qL^2}{12} = \frac{qL^2}{12}$$

Para determinar el momento máximo de toda la viga deben compararse los momentos máximos de cada tramo y elegir el mayor. En este caso, por la simetría de la viga el momento máximo y su posición ( $\frac{L}{2}$  forzosamente) del primer tramo coinciden con los del segundo tramo.

**Ecuaciones de la pendiente y la deflexión usando el método de la integración directa**

Al aplicar la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

e integrarla dos veces en cada tramo, se obtiene

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_1 \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3 \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int \left( \frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3 \right) dx$$

$$EI\theta_1 = \frac{qL}{8}x^2 - \frac{q}{12L}x^4 + C_1 \longrightarrow \textcircled{1}$$

$$EI \int dy = \int \left( \frac{qL}{8}x^2 - \frac{q}{12L}x^4 + C_1 \right) dx \Rightarrow EIy_1 = \frac{qL}{24}x^3 - \frac{q}{60L}x^5 + C_1x + C_2 \longrightarrow \textcircled{2}$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_2 \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{3L}x^3 - qx^2 + \frac{3qL}{4}x - \frac{qL^2}{12}$$

$$EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int \left( \frac{q}{3L}(x)^3 - q(x)^2 + \frac{3qL}{4}(x) - \frac{qL^2}{12} \right) dx$$

$$EI\theta_2 = \frac{q}{12L}x^4 - \frac{qx^3}{3} + \frac{3qL}{8}x^2 - \frac{qL^2}{12}x + C_3 \longrightarrow \textcircled{3}$$

$$EI \int dy = \int \left( \frac{q}{12L}x^4 - \frac{qx^3}{3} + \frac{3qL}{8}x^2 - \frac{qL^2}{12}x + C_3 \right) dx$$

$$EIy_2 = \frac{q}{60L}x^5 - \frac{q}{12}x^4 + \frac{qL}{8}x^3 - \frac{qL^2}{24}x^2 + C_3x + C_4 \longrightarrow \textcircled{4}$$

### Método del trabajo virtual unificado con el método de la integración doble

Para calcular las cuatro constantes de integración anteriores usaremos cuatro condiciones, primero dos de frontera y luego dos de continuidad. La deflexión en el punto A de la viga es nula, así que, 1)  $y_1 = 0$  en  $x = 0$ ; en ese punto el giro es desconocido, por lo que la segunda condición se planteará a partir de calcular la rotación en A ( $\theta_A$ ). Luego, por continuidad se establece que

$$3) \theta_1 = \theta_2 \text{ en } x = \frac{L}{2} \text{ y } 4) y_1 = y_2 \text{ en } x = \frac{L}{2}.$$

Para calcular el giro en A ( $\theta_A$ ), es decir la rotación cuando  $x = 0$ , aplicamos el **método del trabajo virtual**.

**Momentos reales  $M$ .** Corresponden a las siguientes funciones que ya han sido deducidas:

$$M_1 = \frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3 \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$M_2 = \frac{q}{3L}x^3 - qx^2 + \frac{3qL}{4}x - \frac{qL^2}{12} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

**Momento virtual  $m_\theta$ .** Remítase al ejercicio 1.8, figuras 1-8f y 1-8g.

$$m_{1\theta} = 1 - \frac{1}{L}x \quad 0 \leq x \leq L$$

**Ecuación del trabajo virtual.** Entonces, la pendiente en  $A$  es resultado de

$$1 \cdot \theta_A = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_\theta}{EI} dx$$

$$1 \cdot \theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left( \frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3 \right) \left( 1 - \frac{1}{L}x \right) dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( \frac{q}{3L}x^3 - qx^2 + \frac{3qL}{4}x - \frac{qL^2}{12} \right) \left( 1 - \frac{1}{L}x \right) dx$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left( \frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3 \right) \left( 1 - \frac{1}{L}x \right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left( \frac{qL}{4}x - \frac{q}{3L}x^3 - \frac{q}{4}x^2 + \frac{q}{3L^2}x^4 \right) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{8}x^2 \right.$$

$$\left. - \frac{q}{12L}x^4 - \frac{q}{12}x^3 + \frac{q}{15L^2}x^5 \right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL}{8} \left( \frac{L}{2} \right)^2 - \frac{q}{12L} \left( \frac{L}{2} \right)^4 - \frac{q}{12} \left( \frac{L}{2} \right)^3 + \frac{q}{15L^2} \left( \frac{L}{2} \right)^5 \right] = \frac{17qL^3}{960EI}$$

$$\frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( \frac{q}{3L}x^3 - qx^2 + \frac{3qL}{4}x - \frac{qL^2}{12} \right) \left( 1 - \frac{1}{L}x \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( \frac{q}{3L}x^3 - qx^2 + \frac{3qL}{4}x - \frac{qL^2}{12} - \frac{q}{3L^2}x^4 + \frac{q}{L}x^3 - \frac{3q}{4}x^2 + \frac{qL}{12}x \right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \left( -\frac{q}{3L^2}x^4 + \frac{4q}{3L}x^3 - \frac{7q}{4}x^2 + \frac{5qL}{6}x - \frac{qL^2}{12} \right) dx = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{q}{15L^2}x^5 + \frac{q}{3L}x^4 \right.$$

$$\left. - \frac{7q}{12}x^3 + \frac{5qL}{12}x^2 - \frac{qL^2}{12}x \right]_{\frac{L}{2}}^L = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{q}{15L^2} \left( L^5 - \left( \frac{L}{2} \right)^5 \right) + \frac{q}{3L} \left( L^4 - \left( \frac{L}{2} \right)^4 \right) \right.$$

$$\left. - \frac{7q}{12} \left( L^3 - \left( \frac{L}{2} \right)^3 \right) + \frac{5qL}{12} \left( L^2 - \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right) - \frac{qL^2}{12} \left( L - \left( \frac{L}{2} \right) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{31qL^3}{480} + \frac{5qL^3}{16} - \frac{49qL^3}{96} + \frac{5qL^3}{16} - \frac{qL^3}{24} \right] = \frac{qL^3}{120EI}$$

$$\theta_A = \frac{17qL^3}{960EI} + \frac{qL^3}{120EI} = \frac{5qL^3}{192EI} \quad \therefore \theta_A = \frac{5qL^3}{192EI}$$

Por lo tanto, la segunda condición de frontera es: 2)  $\theta_1 = -\frac{5qL^3}{192EI}$  en  $x = 0$ .

Sustituyendo la condición 2) en la ecuación (1) da

$$EI \left( \frac{-5qL^3}{192EI} \right) = \frac{qL}{8} (0)^2 - \frac{q}{12L} (0)^4 + C_1 \Rightarrow \therefore C_1 = \frac{-5qL^3}{192}$$

Sustituyendo la condición 1) en la ecuación (2) tenemos

$$EI(0) = \frac{qL}{24} (0)^3 - \frac{q}{60L} (0)^5 - \frac{5qL^3}{192} (0) + C_2 \Rightarrow \therefore C_2 = 0$$

Aplicando la condición 3) se obtiene

$$\frac{1}{EI} \left( \frac{qL}{8} x^2 - \frac{q}{12L} x^4 - \frac{5qL^3}{192} \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{q}{12L} x^4 - \frac{qx^3}{3} + \frac{3qL}{8} x^2 - \frac{qL^2}{12} x + C_3 \right), \text{ en } x = \frac{L}{2}$$

$$\frac{qL}{8} \left( \frac{L}{2} \right)^2 - \frac{q}{12L} \left( \frac{L}{2} \right)^4 - \frac{5qL^3}{192} = \frac{q}{12L} \left( \frac{L}{2} \right)^4 - \frac{q}{3} \left( \frac{L}{2} \right)^3 + \frac{3qL}{8} \left( \frac{L}{2} \right)^2 - \frac{qL^2}{12} \left( \frac{L}{2} \right) + C_3$$

$$C_3 = -\frac{q}{6L} \left( \frac{L}{2} \right)^4 + \frac{q}{3} \left( \frac{L}{2} \right)^3 - \frac{qL}{4} \left( \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{qL^2}{12} \left( \frac{L}{2} \right) - \frac{5qL^3}{192} = qL^3 \left( -\frac{1}{96} + \frac{1}{24} - \frac{1}{16} + \frac{1}{24} - \frac{5}{192} \right)$$

$$\therefore C_3 = -\frac{qL^3}{64}$$

La aplicación de la condición 4) conlleva a

$$\frac{1}{EI} \left( \frac{qL}{24} x^3 - \frac{q}{60L} x^5 - \frac{5qL^3 x}{192} \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{q}{60L} x^5 - \frac{q}{12} x^4 + \frac{qL}{8} x^3 - \frac{qL^2}{24} x^2 - \frac{qL^3 x}{64} + C_4 \right), \text{ en } x = \frac{L}{2}$$

$$C_4 = -\frac{q}{30L} \left( \frac{L}{2} \right)^5 + \frac{q}{12} \left( \frac{L}{2} \right)^4 - \frac{qL}{12} \left( \frac{L}{2} \right)^3 + \frac{qL^2}{24} \left( \frac{L}{2} \right)^2 - \frac{qL^3}{96} \left( \frac{L}{2} \right)$$

$$C_4 = qL^4 \left( -\frac{1}{960} + \frac{1}{192} - \frac{1}{96} + \frac{1}{96} - \frac{1}{192} \right) \Rightarrow \therefore C_4 = -\frac{qL^4}{960}$$

En consecuencia, las ecuaciones de la pendiente y la deflexión son

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{EI} \left( \frac{qL}{8} x^2 - \frac{q}{12L} x^4 - \frac{5qL^3}{192} \right) \quad y_1 = \frac{1}{EI} \left( \frac{qL}{24} x^3 - \frac{q}{60L} x^5 - \frac{5qL^3}{192} x \right)$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI} \left( \frac{q}{12L} x^4 - \frac{qx^3}{3} + \frac{3qL}{8} x^2 - \frac{qL^2}{12} x - \frac{qL^3}{64} \right)$$

$$y_2 = \frac{1}{EI} \left( \frac{q}{60L} x^5 - \frac{q}{12} x^4 + \frac{qL}{8} x^3 - \frac{qL^2}{24} x^2 - \frac{qL^3}{64} x - \frac{qL^4}{960} \right)$$

**Cálculo de la flecha máxima de cada tramo**

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$EI\theta_1 = 0 = \frac{qL}{8} x^2 - \frac{q}{12L} x^4 - \frac{5qL^3}{192}$$

$$-\frac{1}{12L} x^4 + \frac{L}{8} x^2 - \frac{5L^3}{192} = 0; \text{ si } x^4 = z^2 \Rightarrow x^2 = z, \text{ entonces } -\frac{1}{12L} z^2 + \frac{L}{8} z - \frac{5L^3}{192} = 0$$

$$z = \frac{-\left(\frac{L}{8}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{L}{8}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{12L}\right)\left(-\frac{5L^3}{192}\right)}}{2\left(-\frac{1}{12L}\right)} = \left(\frac{-\frac{1}{8} \pm \frac{1}{12}}{-\frac{1}{6}}\right) L^2$$

$$z_1 = \frac{1}{4} L^2 \quad z_2 = \frac{5}{4} L^2$$

como  $x = \pm \sqrt{z}$

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{4} L^2} = \frac{1}{2} L \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{4} L^2} = -\frac{1}{2} L \quad x_3 = \sqrt{\frac{5}{4} L^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} L$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{5}{4} L^2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} L \quad \therefore x_{max1} = \frac{1}{2} L$$

$$y_{max1} = \frac{1}{EI} \left( \frac{qL}{24} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{q}{60L} \left(\frac{L}{2}\right)^5 - \frac{5qL^3}{192} \left(\frac{L}{2}\right) \right) \Rightarrow y_{max1} = -\frac{qL^4}{120EI} \Rightarrow \therefore y_{max1} = \frac{qL^4}{120EI} \downarrow$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$EI\theta_2 = 0 = \frac{q}{12L}x^4 - \frac{qx^3}{3} + \frac{3qL}{8}x^2 - \frac{qL^2}{12}x - \frac{qL^3}{64} = \frac{1}{12L}x^4 - \frac{x^3}{3} + \frac{3L}{8}x^2 - \frac{L^2}{12}x - \frac{L^3}{64}$$

Evaluamos el siguiente polinomio de 0 a L, ya que la solución que nos interesa debe estar en el intervalo [0, L]:

$$f(x) = \frac{1}{12L}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3L}{8}x^2 - \frac{L^2}{12}x - \frac{L^3}{64}$$

Los resultados de la iteración se proporcionan en la tabla 1-20.

| x (L) | f(x) (L <sup>3</sup> ) |
|-------|------------------------|
| 0     | -0.015625              |
| 0.1   | -0.02053               |
| 0.2   | -0.019825              |
| 0.3   | -0.0152                |
| 0.4   | -0.00815833            |
| 0.5   | 0                      |
| 0.6   | 0.08175                |
| 0.7   | 0.0154                 |
| 0.8   | 0.0211                 |
| 0.9   | 0.0248                 |
| 1     | 0.026                  |

**Tabla 1-20**

$$\therefore x_{max2} = \frac{1}{2}L$$

$$y_{max2} = \frac{1}{EI} \left( \frac{q}{60L} \left(\frac{L}{2}\right)^5 - \frac{q}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \frac{qL}{8} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{qL^2}{24} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{qL^3}{64} \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{qL^4}{960} \right)$$

$$y_{max2} = -\frac{qL^4}{120EI} \quad \therefore y_{max2} = \frac{qL^4}{120EI} \downarrow$$

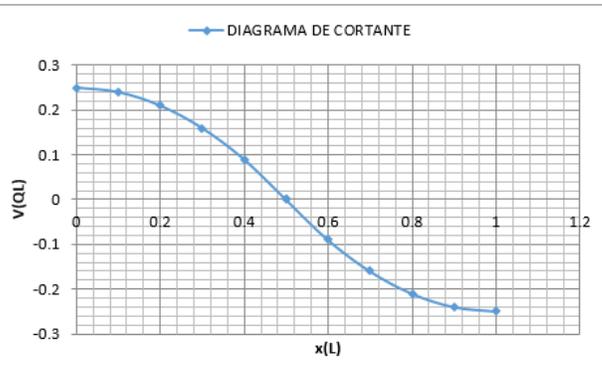
### Diagramas de fuerza cortante, momento flector, rotación y deflexión (curva elástica)

A partir de las tablas 1-21, 1-22, 1-23 y 1-24 se determinan los diagramas solicitados, figuras 1-11h, 1-11i, 1-11j y 1-11k.

CAPÍTULO 1 ANÁLISIS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

Tabla 1-21

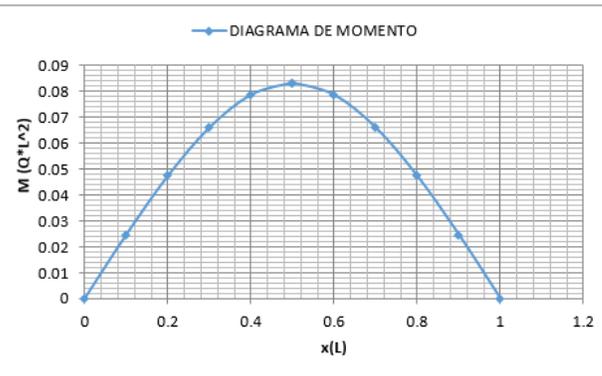
| x (L) | V (QL) |
|-------|--------|
| 0     | 0.25   |
| 0.1   | 0.24   |
| 0.2   | 0.21   |
| 0.3   | 0.16   |
| 0.4   | 0.09   |
| 0.5   | 0      |
| 0.6   | -0.09  |
| 0.7   | -0.16  |
| 0.8   | -0.21  |
| 0.9   | -0.24  |
| 1     | -0.25  |



(h)

Tabla 1-22

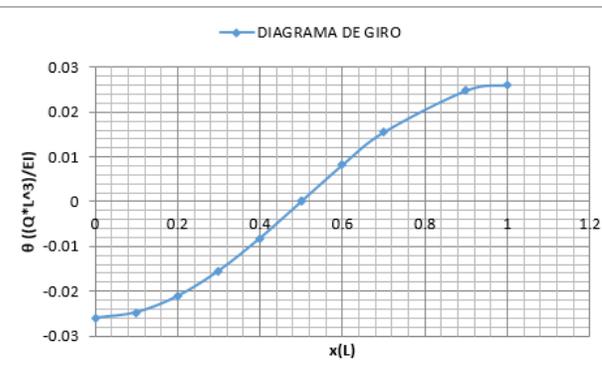
| x (L) | M (Q*L <sup>2</sup> ) |
|-------|-----------------------|
| 0     | 0                     |
| 0.1   | 0.024666667           |
| 0.2   | 0.047333333           |
| 0.3   | 0.066                 |
| 0.4   | 0.078666667           |
| 0.5   | 0.083333333           |
| 0.5   | 0.083333333           |
| 0.6   | 0.078666667           |
| 0.7   | 0.066                 |
| 0.8   | 0.047333333           |
| 0.9   | 0.024666667           |
| 1     | 0                     |



(i)

Tabla 1-23

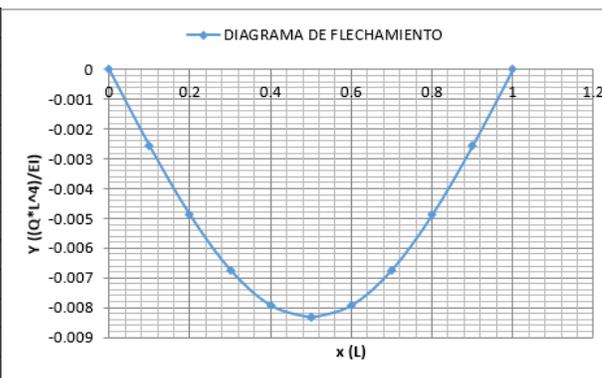
| x (L) | $\theta ((Q*L^3)/EI)$ |
|-------|-----------------------|
| 0     | -0.026041667          |
| 0.1   | -0.0248               |
| 0.2   | -0.021175             |
| 0.3   | -0.015466667          |
| 0.4   | -0.008175             |
| 0.5   | 0                     |
| 0.5   | 0                     |
| 0.6   | 0.008175              |
| 0.7   | 0.015466667           |
| 0.9   | 0.0248                |
| 1     | 0.026041667           |



(j)

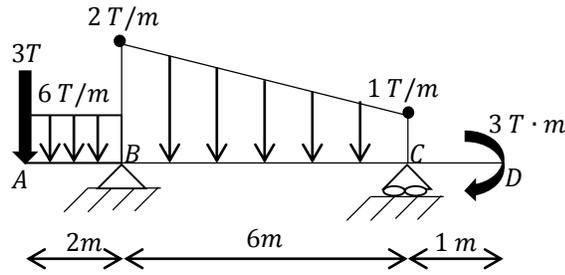
Tabla 1-24

| x (L) | Y ((Q*L <sup>4</sup> )/EI) |
|-------|----------------------------|
| 0     | 0                          |
| 0.1   | -0.002562667               |
| 0.2   | -0.004880333               |
| 0.3   | -0.006728                  |
| 0.4   | -0.007920667               |
| 0.5   | -0.008333333               |
| 0.5   | -0.008333333               |
| 0.6   | -0.007920667               |
| 0.7   | -0.006728                  |
| 0.8   | -0.004880333               |
| 0.9   | -0.002562667               |
| 1     | 0                          |



(k)

**Ejercicio 1.12**



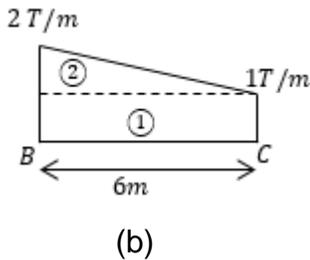
(a)

**Figura 1-12**

**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**

**Diagrama de cargas.** Al analizar la carga trapezoidal, es conveniente dividirla en una carga uniforme y una carga triangular, figura 1-12b. Las áreas y los centroides de áreas se presentan en la tabla 1-25.



(b)

| Componente   | $A, T$               | $\bar{x}, m$         | $\bar{x}A, T \cdot m$ |
|--------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| ①=rectángulo | $6(1) = 6$           | $\frac{1}{2}(6) = 3$ | 18                    |
| ②= triángulo | $\frac{6(1)}{2} = 3$ | $\frac{1}{3}(6) = 2$ | 6                     |
|              | $\sum A = 9$         |                      | $\sum \bar{x}A = 24$  |

**Tabla 1-25**

Entonces, la carga concentrada equivalente de la carga trapezoidal distribuida es

$$A_1 = \sum A = 9T$$

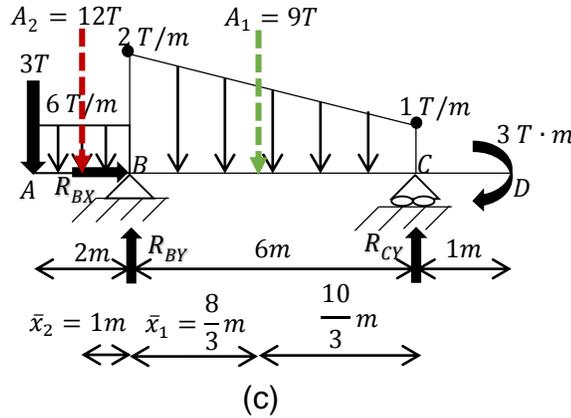
y su línea de acción está localizada a una distancia de

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{24T \cdot m}{9T} = \frac{8}{3}m \text{ a la derecha de B}$$

La fuerza resultante de la carga distribuida uniforme y su punto de aplicación son, respectivamente

$$A_2 = (6T/m)(2m) = 12T \quad \bar{x}_2 = (1/2)(2m) = 1m \text{ a la izquierda de B}$$

El diagrama de cargas de la estructura, figura 1-12c, se completa identificando las reacciones en los soportes proponiendo sus sentidos arbitrariamente.



**Ecuaciones de equilibrio.**

$$\curvearrowright \sum MB = 0 \Rightarrow -(3)(2) - (12)(1) + 9\left(\frac{8}{3}\right) - 6(R_{CY}) + 3 = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 1.5T \uparrow$$

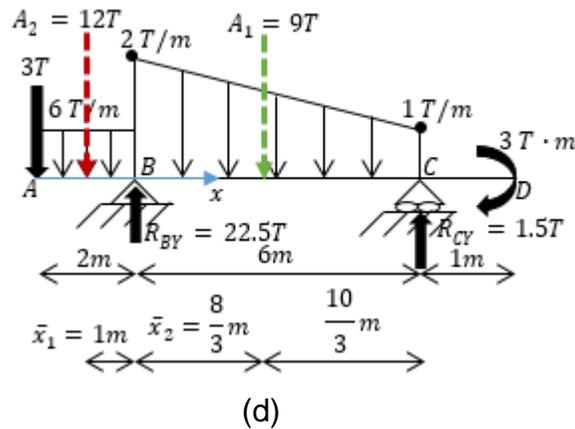
$$\curvearrowright \sum MC = 0 \Rightarrow 3 - 9\left(\frac{10}{3}\right) + 6(R_{BY}) - (12)(1 + 6) - 3(8) = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 22.5T \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{BX} = 0$$

Como comprobación, se cumple que

$$+\uparrow \sum FY = -3 - 12 + 1.5 - 9 + 22.5 = 0 \quad ok \checkmark$$

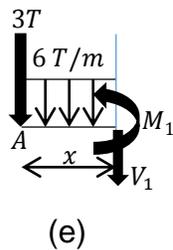
**Funciones de fuerza cortante y de momento**



En la figura 1-12d se especifica la coordenada  $x$  a utilizar cuyo origen asociado está en  $A$ ; note que  $x$  es válida para  $0 \leq x \leq 9m$ . Debido a los cambios en el tipo de la carga distribuida y a las fuerzas reactivas en  $B$  y  $C$ , las funciones de las acciones internas son discontinuas en esos puntos, así que deberán efectuarse tres cortes perpendiculares al eje de la viga para definir el momento y la fuerza cortante a lo largo de la estructura.

Corte en el tramo ① ( $A - B$ ). Se secciona la viga a una distancia  $x$  de  $A$  antes del punto  $B$ , es decir, antes del punto de intensidad de  $2T/m$  de la presión trapezoidal. En consecuencia, el diagrama de cuerpo libre de la sección cortada, figura 1-12e, y su equilibrio estático son

$$0 \leq x \leq 2m$$



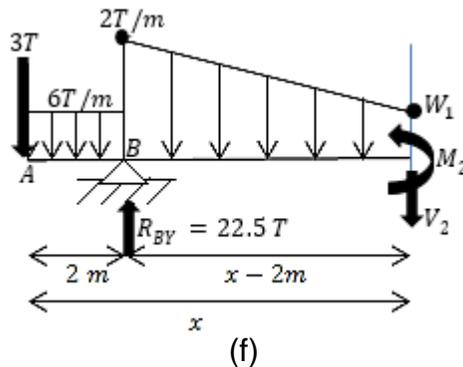
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 = -6(x) \left(\frac{x}{2}\right) - 3x = -3x^2 - 3x$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx} = -6x - 3$$

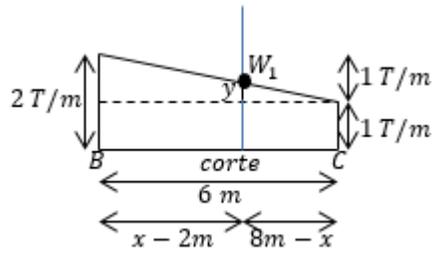
Corte en el tramo ② ( $B - C$ ). Se secciona la viga en un punto arbitrario que se ubique justo después de que comience la carga trapezoidal distribuida pero antes de que la misma termine; se cumple que la longitud de la viga va desde el punto  $A$  hasta después del punto  $B$ , pero sin llegar al punto  $C$ . En la figura 1-12f se muestra el diagrama de cuerpo libre para éste segmento de viga con longitud  $x$ .

$$2m \leq x \leq 8m$$



Previo a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, debe hallarse el área y su centroide de la presión trapezoidal del corte.

Con base en la figura 1-12g, por trigonometría puede determinarse el valor de la intensidad  $W_1$  en función de  $x$ .



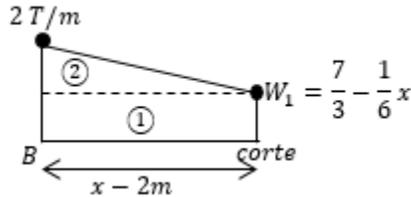
$$\frac{1T/m}{6m} = \frac{y}{8m-x}$$

$$y = \frac{(1)(8-x)}{6} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}x$$

$$W_1 = 1 + y = 1 + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6}x\right) = \frac{7}{3} - \frac{1}{6}x$$

(g)

A continuación, a partir de la figura 1-12h se hace el análisis de la carga trapezoidal distribuida del corte.



(h)

$$A_1 = (x-2) \left( \frac{7}{3} - \frac{1}{6}x \right) = \frac{7}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{14}{3} + \frac{1}{3}x = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}$$

$$A_2 = \frac{(x-2) \left( 2 - \left( \frac{7}{3} - \frac{1}{6}x \right) \right)}{2} = \frac{(x-2) \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x \right)}{2} = \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{x-2}{2} = \frac{1}{2}x - 1; \bar{x}_2 = \frac{x-2}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$\bar{x}_1 A_1 = \left( -\frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{14}{3} \right) \left( \frac{1}{2}x - 1 \right) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{14}{3}$$

$$\bar{x}_1 A_1 = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{14}{3}$$

$$\bar{x}_2 A_2 = \left( \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \right) = \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{9} + \frac{x}{9} - \frac{x^2}{18} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{9}$$

$$\bar{x}_2 A_2 = \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$$

La información obtenida se presenta en la tabla 1-26.

| Componente    | A  | $\bar{x}$                    | $\bar{x}A$  |
|---------------|--|------------------------------|---|
| ①= rectángulo | $-\frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}$  | $\frac{1}{2}x - 1$           | $-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{14}{3}$           |
| ②= triángulo  | $\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$   | $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ | $\frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$   |
| $\Sigma =$    | $-\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}$ |                              | $-\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9}$ |

**Tabla 1-26**

Finalmente, la fuerza resultante es

$$A_T = \sum A = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}$$

y el centroide a través del cual actúa es

$$\bar{x}_T = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{-\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9}}{-\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}} \text{ a la derecha de B, donde } \bar{x}_T < (x - 2)$$

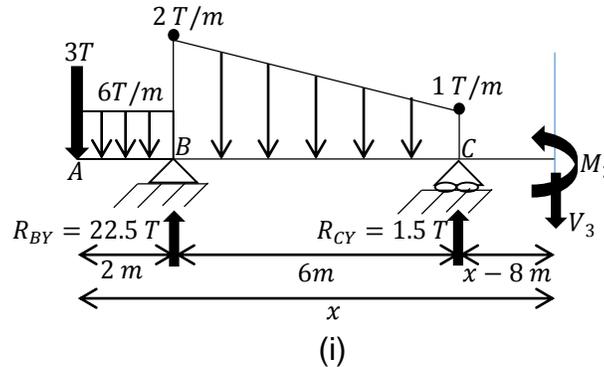
En consecuencia,

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_{\text{corte}} = 0 &\Rightarrow -M_2 - 3(x) - 6(2) \left( \frac{1}{2}(2) + (x - 2) \right) + 22.5(x - 2) \\ &- \left( -\frac{x^2}{12} + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3} \right) \left[ (x - 2) - \left( \frac{-\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9}}{-\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}} \right) \right] = 0 \\ M_2 &= -3x - 12(x - 1) + 22.5(x - 2) - \left( -\frac{x^2}{12} + \frac{7}{3}x - \frac{13}{3} \right) (x - 2) \\ &+ \left( -\frac{x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9} \right) = -3x - 12x + 12 + 22.5x - 45 - \left( -\frac{x^3}{12} + \frac{7}{3}x^2 - \frac{13}{3}x \right. \\ &+ \frac{1}{6}x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{26}{3} \left. \right) + \left( \frac{-x^3}{18} + \frac{4x^2}{3} - \frac{14x}{3} + \frac{40}{9} \right) = x^3 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{18} \right) + x^2 \left( -\frac{7}{3} - \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \right) \\ &+ x \left( \frac{13}{3} + \frac{14}{3} - \frac{14}{3} + 22.5 - 12 - 3 \right) + \left( 12 - 45 - \frac{26}{3} + \frac{40}{9} \right) = \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \end{aligned}$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{1}{12} x^2 - \frac{7}{3} x + \frac{71}{6}$$

Corte en el tramo ③(C – D). En la figura 1-12i se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción izquierda de la viga que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo C – D. Por lo tanto,

$$8m \leq x \leq 9m$$



$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_3 - 3(x) - 6(2) \left( \frac{1}{2} (2) + 6 + x - 8 \right) + 22.5(6 + x - 8)$$

$$-9 \left( 6 - \frac{8}{3} + x - 8 \right) + 1.5(x - 8) = 0$$

$$M_3 = -3x + 12 - 12x - 45 + 22.5x + 42 - 9x + 1.5x - 12 = -3$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx} = 0$$

### Cálculo del momento máximo de cada tramo

$$0 \leq x \leq 2m$$

Para hallar la posición del momento máximo en la región A – B hacemos

$$V_1 = 0 = -3 - 6x \Rightarrow 3 = -6x \Rightarrow x = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Debido a que la solución no tiene sentido, o sea que no está dentro del intervalo de distancia analizado de la viga  $[0, 2m]$ , el punto donde se ubica el valor máximo del momento está en el límite superior. Por lo tanto,

$$x_{max1} = 2m \quad M_{max1} = -3(2) - 3(2)^2 = -18T \cdot m$$

$$2m \leq x \leq 8m$$

El momento máximo del tramo B – C se localiza a una distancia respecto de A de

$$V_2 = 0 = \frac{1}{12} x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{71}{6} \Rightarrow x = \frac{-\left(-\frac{7}{3}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{71}{6}\right)}}{2\left(\frac{1}{12}\right)} = \frac{\frac{7}{3} \pm 1.224745}{\frac{1}{6}}$$

$$x_1 = 3(\sqrt{6}) + 14 \approx 21.34847 \text{ m} \quad x_2 = 14 - 3(\sqrt{6}) \approx 6.65153$$

$\therefore x_{max2} = 3(\sqrt{6})m = 6.65153m$ , ya que está dentro del intervalo de distancia analizado de la viga  $[2m, 8m]$ . Entonces,

$$M_{max2} = \left(\frac{1}{36}\right) (14 - 3(\sqrt{6}))^3 - \left(\frac{7}{6}\right) (14 - 3(\sqrt{6}))^2 + \left(\frac{71}{6}\right) (14 - 3(\sqrt{6})) - \frac{335}{9}$$

$$M_{max2} = (9\sqrt{6} - 24)T \cdot m = -1.9546 T \cdot m$$

$$8m \leq x \leq 9m$$

El momento es constante a lo largo de este tramo, por lo que  $M_{max3} = -3 T \cdot m$ .

Realizando una comparativa, el momento máximo para toda la viga es de

$M_{max} = 18T \cdot m$  y se presenta en el punto  $x_{max} = 2m$ ; la posición se mide a partir de A.

### Ecuaciones de la pendiente y la deflexión usando el método de la integración directa

Al aplicar la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

e integrarla dos veces en cada tramo, se obtiene

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_1 \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = -3x^2 - 3x \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int (-3x^2 - 3x) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1; \text{ si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta_1 = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1 \text{ --- } \textcircled{1}$$

$$EI \int dy = \int \left(-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1\right) dx \Rightarrow EIy_1 = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + C_1x + C_2 \text{ --- } \textcircled{2}$$

$$2m \leq x \leq 8m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_2 \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9}$$

$$EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int \left( \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) dx$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3$$

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta_2 = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3 \text{ --- } \textcircled{3}$$

$$EI \int dy = \int \left( \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3 \right) dx$$

$$EIy_2 = \frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + C_3x + C_4 \text{ --- } \textcircled{4}$$

$$8m \leq x \leq 9m$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_3 \Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = -3 \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int -3dx \Rightarrow EI \frac{dy}{dx} = -3x + C_5$$

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta_3 = -3x + C_5 \text{ --- } \textcircled{5}$$

$$EI \int dy = \int (-3x + C_5) dx \Rightarrow EIy_3 = -\frac{3}{2}x^2 + C_5x + C_6 \text{ --- } \textcircled{6}$$

### Método del trabajo virtual unificado con el método de la integración doble

Para calcular las seis constantes de integración anteriores usaremos seis condiciones, primero dos de frontera y luego cuatro de continuidad. Como no hay algún apoyo en A, la viga puede desplazarse verticalmente y girar en tal punto, así que, 1)  $y_1 = i?$  en  $x = 0$  y 2)  $\theta_1 = i?$  en  $x = 0$ . Luego, por continuidad se establece que 3)  $\theta_1 = \theta_2$  en  $x = 2m$ , 4)  $y_1 = y_2$  en  $x = 2m$ , 5)  $\theta_2 = \theta_3$  en  $x = 8m$  y 6)  $y_2 = y_3$  en  $x = 8m$ . Para determinar la rotación y la deflexión en A aplicamos el **método del trabajo virtual**.

Se sigue el siguiente procedimiento para calcular  $\theta_A$ .

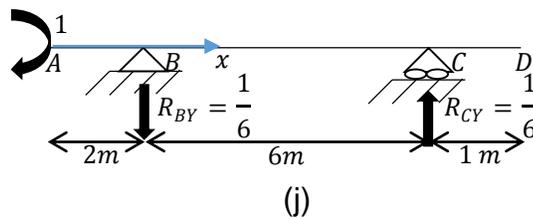
**Momentos reales M.** Corresponden a las siguientes funciones que ya han sido deducidas:

$$M_1 = -3x^2 - 3x \quad 0 \leq x \leq 2m$$

$$M_2 = \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \quad 2m \leq x \leq 8m$$

$$M_3 = -3 \quad 8m \leq x \leq 9m$$

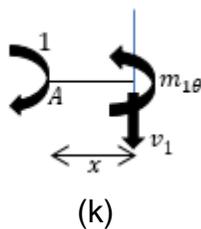
**Momentos virtuales  $m_\theta$ .** La pendiente en  $A$  se determina al colocar un momento de par unitario virtual de sentido propuesto horario en el punto  $A$ , figura 1-12j. Note que las cargas reales son removidas y que debe usarse la misma coordenada  $x$  de la estructura real. Después de calcular las reacciones en los soportes, se deducen los momentos internos  $m_\theta$  con el método de las secciones.



$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MB = 0 &\Rightarrow 1 - 6(R_{CY}) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = \frac{1}{6} \uparrow \\ +\uparrow \sum FY = 0 &\Rightarrow -R_{BY} + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{1}{6} \downarrow \\ +\rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow R_{BX} = 0 \end{aligned}$$

Es necesario efectuar tres cortes en la viga anterior.

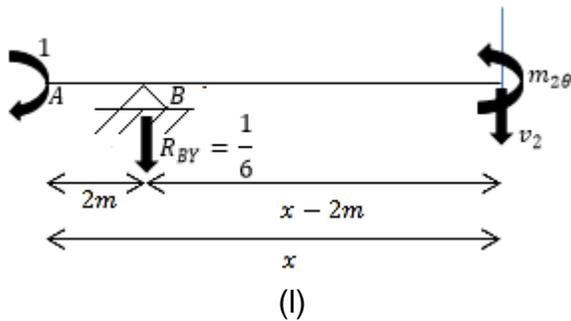
En la figura 1-12k se muestra el diagrama de cargas de la sección cortada en el primer tramo.



$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum m_{corte} = 0 \\ -m_{1\theta} + 1 = 0 \Rightarrow m_{1\theta} = 1 \end{aligned}$$

El diagrama de cuerpo libre de la sección cortada en el segundo tramo se indica en la figura 1-12l.



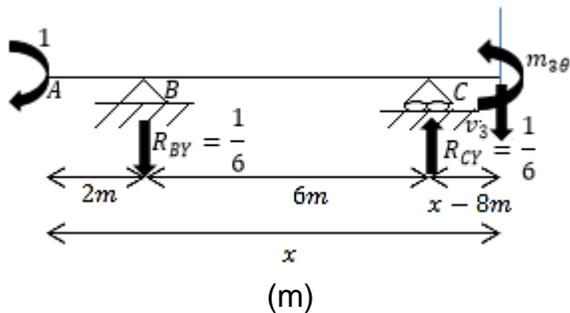
$$2m \leq x \leq 8m$$

$$\sum m_{corte} = 0$$

$$-m_{2\theta} + 1 - \frac{1}{6}(x - 2) = 0$$

$$m_{2\theta} = -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

El diagrama de cargas de la sección cortada en el tercer tramo se proporciona en la figura 1-12m.



$$8m \leq x \leq 9m$$

$$\sum m_{corte} = 0$$

$$-m_{3\theta} + 1 - \frac{1}{6}(6 + x - 8) + \frac{1}{6}(x - 8) = 0$$

$$m_{3\theta} = 1 + \frac{1}{6}(-6 - x + 8 + x - 8) = 0$$

**Ecuación del trabajo virtual.** Entonces, la pendiente en A es resultado de

$$1 \cdot \theta_A = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_{\theta}}{EI} dx$$

$$1 \cdot \theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(1) + \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left( -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx$$

Resolviendo integrales por separado se tiene

$$\frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(1) = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x) dx = \frac{1}{EI} \left[ -x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ -(2^3 - 0^3) - \frac{3}{2}(2^2 - 0^2) \right] = -\frac{14}{EI}$$

$$\frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left( -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3} \right) dx = \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( -\frac{1}{216}x^4 + \frac{7}{36}x^3 - \frac{71}{36}x^2 \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{335}{54}x + \frac{1}{27}x^3 - \frac{14}{9}x^2 + \frac{142}{9}x - \frac{1340}{27} \Big) dx \\
 & = \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( -\frac{1}{216}x^4 + \frac{25}{108}x^3 - \frac{127}{36}x^2 + \frac{1187}{54}x - \frac{1340}{27} \right) dx \\
 & = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{1080}x^5 + \frac{25}{432}x^4 - \frac{127}{108}x^3 + \frac{1187}{108}x^2 - \frac{1340}{27}x \right]_2^8 \\
 & = \frac{1}{EI} \left[ \frac{-1}{1080}(8^5 - 2^5) + \frac{25}{432}(8^4 - 2^4) - \frac{127}{108}(8^3 - 2^3) + \frac{1187}{108}(8^2 - 2^2) - \frac{1340}{27}(8 - 2) \right] \\
 & = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1364}{45} + \frac{2125}{9} - \frac{1778}{3} + \frac{5935}{9} - \frac{2680}{9} \right) = -\frac{126}{5EI} \\
 & \frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx = 0
 \end{aligned}$$

$$\theta_A = -\frac{14}{EI} - \frac{126}{5EI} + 0 = -\frac{196}{5EI}$$

Como la suma algebraica de todas integrales para toda la viga es negativa,  $\theta_A$  tiene un sentido opuesto al del momento de par unitario.

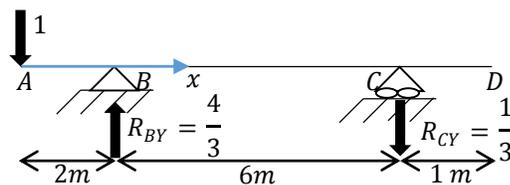
$$\therefore \theta_A = \frac{196}{5EI} \curvearrowright$$

Recuerde que una pendiente con sentido antihorario es positiva de acuerdo a lo que se establece en el método de integración doble; por tanto, la segunda condición de frontera es 2)  $\theta_1 = \frac{196}{5EI}$  en  $x = 0$ .

Se sigue el siguiente procedimiento para calcular  $\delta_{VA}$ .

**Momentos reales  $M$ .** Las funciones correspondientes ya han sido mostradas.

**Momentos virtuales  $m$ .** El desplazamiento vertical en  $A$  se obtiene al colocar una carga virtual unitaria con un sentido supuesto hacia abajo en ese punto, figura 1-12n. Note que las cargas reales son removidas y que debe usarse la misma coordenada  $x$  de la estructura real. Después de calcular las reacciones en los soportes, puede usarse el método de las secciones para formular los momentos internos  $m$ .



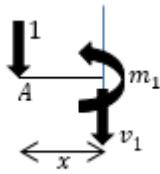
(n)

$$\curvearrowright \sum MB = 0 \Rightarrow -1(2) + 6(R_{CY}) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = \frac{1}{3} \downarrow$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -1 + R_{BY} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = \frac{4}{3} \uparrow \quad + \rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow R_{BX} = 0$$

Es necesario efectuar tres cortes en la viga anterior.

En la figura 1-12ñ se muestra el diagrama de cargas de la sección cortada en el primer tramo.



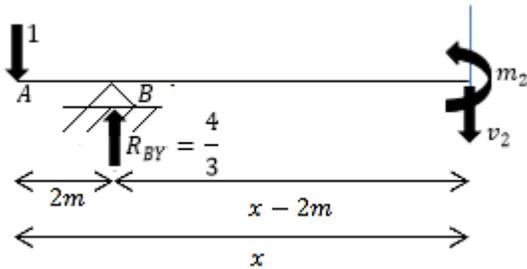
(ñ)

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\curvearrowright \sum m_{corte} = 0$$

$$-m_1 - 1(x) = 0 \Rightarrow m_1 = -x$$

El diagrama de cuerpo libre de la sección cortada en el segundo tramo se indica en la figura 1-12o.



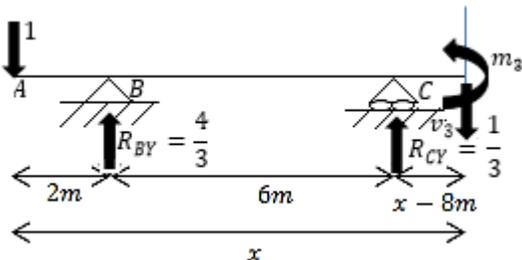
(o)

$$2m \leq x \leq 8m$$

$$\curvearrowright \sum m_{corte} = 0$$

$$-m_2 - 1(x) + \frac{4}{3}(x - 2) = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

El diagrama de cargas de la sección cortada en el tercer tramo se proporciona en la figura 1-12p.



(p)

$$8m \leq x \leq 9m$$

$$\curvearrowright \sum m_{corte} = 0$$

$$-m_3 - 1(x) + \frac{4}{3}(6 + (x - 8)) - \frac{1}{3}(x - 8) = 0$$

$$m_3 = -x - \frac{8}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} = 0$$

**Ecuación del trabajo virtual.** Entonces, el desplazamiento vertical de A es

$$1 \cdot \delta_{VA} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$1 \cdot \delta_{VA} = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(-x) dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left( \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx$$

Resolviendo integrales por separado se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^2 (-3x^2 - 3x)(-x) dx &= \frac{1}{EI} \int_0^2 (3x^3 + 3x^2) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{4}x^4 + x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{3}{4} \right) (2^4 - 0^4) + (2^3 - 0^3) \right] = \frac{20}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{71}{6}x - \frac{335}{9} \right) \left( \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \right) dx &= \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{108}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{18}x^2 - \frac{335}{27}x - \right. \\ &\left. \frac{2}{27}x^3 + \frac{28}{9}x^2 - \frac{284}{9}x + \frac{2680}{27} \right) dx = \frac{1}{EI} \int_2^8 \left( \frac{1}{108}x^4 - \frac{25}{54}x^3 + \frac{127}{18}x^2 - \frac{1187}{27}x + \frac{2680}{27} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{540}x^5 - \frac{25}{216}x^4 + \frac{127}{54}x^3 - \frac{1187}{54}x^2 + \frac{2680}{27}x \right]_2^8$$

$$= \left[ \frac{1}{540}(8^5 - 2^5) - \frac{25}{216}(8^4 - 2^4) + \frac{127}{54}(8^3 - 2^3) - \frac{1187}{54}(8^2 - 2^2) + \frac{2680}{27}(8 - 2) \right]$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{2728}{45} - \frac{4250}{9} + \frac{3556}{3} - \frac{11870}{9} + \frac{5360}{9} \right] = \frac{252}{5EI}$$

$$\frac{1}{EI} \int_8^9 (-3)(0) dx = 0$$

$$\delta_{VA} = \frac{20}{EI} + \frac{252}{5EI} + 0 = \frac{352}{5EI}$$

Dado que la suma algebraica de todas integrales para toda la viga es positiva,  $\delta_{VA}$  tiene el mismo sentido que la carga virtual unitaria.

$$\therefore \delta_{VA} = \frac{352}{5EI} \downarrow$$

Tomando en cuenta que un desplazamiento hacia abajo es negativo de acuerdo a lo que se establece en el método de integración doble, la primera condición de frontera quedaría como: 1)  $y = -\frac{352}{5EI}$  en  $x = 0$ .

Sustituyendo la condición 2) en la ecuación ① da

$$EI \left( \frac{196}{5EI} \right) = -(0)^3 - \frac{3}{2}(0)^2 + C_1 \Rightarrow \therefore C_1 = \frac{196}{5}$$

Sustituyendo la condición 1) en la ecuación (2) tenemos

$$EI \left( -\frac{352}{5EI} \right) = -\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{2}(0)^3 + \frac{196}{5}(0) + C_2 \Rightarrow \therefore C_2 = \frac{-352}{5}$$

Aplicando la condición 3) se obtiene

$$-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1 = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3, \text{ en } x = 2$$

$$-(2)^3 - \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{196}{5} = \frac{1}{144}(2)^4 - \frac{7}{18}(2)^3 + \frac{71}{12}(2)^2 - \frac{335}{9}(2) + C_3$$

$$C_3 = -(2^4) \left( \frac{1}{144} \right) + (2^3) \left( -1 + \frac{7}{18} \right) + (2^2) \left( -\frac{3}{2} - \frac{71}{12} \right) + (2) \left( \frac{335}{9} \right) + \frac{196}{5} \Rightarrow \therefore C_3 = \frac{3554}{45}$$

La aplicación de la condición 4) conlleva a

$$-\frac{1}{4}(x)^4 - \frac{1}{2}(x)^3 + C_1(x) + C_2 = \frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + C_3x + C_4, \text{ en } x = 2m$$

$$-\frac{1}{4}(2^4) - \frac{1}{2}(2^3) + \left( \frac{196}{5} \right) (2) - \frac{352}{5} = \left( \frac{1}{720} \right) (2)^5 - \left( \frac{7}{72} \right) (2)^4 + \left( \frac{71}{36} \right) (2)^3$$

$$- \left( \frac{335}{18} \right) (2)^2 + \left( \frac{3554}{45} \right) (2) + C_4 \Rightarrow \therefore C_4 = -\frac{880}{9}$$

Haciendo uso de la condición 5) se deduce que

$$\frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + C_3 = -3x + C_5, \text{ en } x = 8m$$

$$\left( \frac{1}{144} \right) (8)^4 - \left( \frac{7}{18} \right) (8)^3 + \left( \frac{71}{12} \right) (8)^2 - \left( \frac{335}{9} \right) (8) + \frac{3554}{45} = -3(8) + C_5 \Rightarrow \therefore C_5 = \frac{66}{5}$$

Aplicando la cuarta condición de continuidad resulta

$$\frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + C_3x + C_4 = -\frac{3}{2}x^2 + C_5x + C_6, \text{ en } x = 8m$$

$$\left( \frac{1}{720} \right) (8)^5 - \left( \frac{7}{72} \right) (8)^4 + \left( \frac{71}{36} \right) (8)^3 - \left( \frac{335}{18} \right) (8)^2 + \left( \frac{3554}{45} \right) (8) - \frac{880}{9}$$

$$= \left( -\frac{3}{2} \right) (8)^2 + \frac{66}{5} (8) + C_6 \Rightarrow \therefore C_6 = -\frac{48}{5}$$

En consecuencia, las ecuaciones de la pendiente y la deflexión en cada tramo son, de manera respectiva

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\theta_1 = \frac{1}{EI} \left( -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{196}{5} \right)$$

$$y_1 = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{196}{5}x - \frac{352}{5} \right)$$

$$2m \leq x \leq 8m$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + \frac{3554}{45} \right)$$

$$y_2 = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{720}x^5 - \frac{7}{72}x^4 + \frac{71}{36}x^3 - \frac{335}{18}x^2 + \frac{3554}{45}x - \frac{880}{9} \right)$$

$$8m \leq x \leq 9m$$

$$\theta_3 = \frac{1}{EI} \left( -3x + \frac{66}{5} \right)$$

$$y_3 = \frac{1}{EI} \left( -\frac{3}{2}x^2 + \frac{66}{5}x - \frac{48}{5} \right)$$

**Cálculo de la flecha máxima de cada tramo**

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$EI\theta_1 = 0 = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{196}{5}$$

Usando la técnica de la división sintética hallamos una raíz.

|        |    |                |          |                 |
|--------|----|----------------|----------|-----------------|
|        | -1 | $-\frac{3}{2}$ | 0        | $\frac{196}{5}$ |
| 2.9635 | ↓  | -2.9635        | -13.2276 | -39.2           |
|        | -1 | -4.4635        | -13.2276 | 0               |

$$(x - 2.9635)(-x^2 - 4.4635x - 13.2276) = 0$$

$$x_1 \approx 2.9635$$

Las raíces restantes se pueden calcular con la fórmula general.

$$-x^2 - 4.4635x - 13.2276 = 0$$

$$x = \frac{-(-4.4635) \pm \sqrt{(-4.4635)^2 - 4(-1)(-13.2276)}}{2(-1)}$$

$$x_2 = \frac{4.4635 - \sqrt{-32.9882}}{-2} = -2.23175 - 2.87174i$$

$$x_3 = \frac{4.4635 + \sqrt{-32.9882}}{-2} = -2.23175 + 2.87174i$$

Obsérvese que de las tres soluciones anteriores ninguna pertenece al intervalo de distancia analizado de la viga  $[0,2m]$ , por lo que la flecha máxima está ubicada en el extremo donde no está el apoyo, así que  $x_{max1} = 0$ . Entonces,

$$y_{max1} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{196}{5}(0) - \frac{352}{5} \right) \Rightarrow y_{max1} = -\frac{352}{5EI} = \frac{-70.4}{EI}$$

$$\therefore y_{max1} = \frac{70.4}{EI} \downarrow$$

$$2m \leq x \leq 8m$$

$$\theta_2 = 0 = \frac{1}{144}x^4 - \frac{7}{18}x^3 + \frac{71}{12}x^2 - \frac{335}{9}x + \frac{3554}{45}$$

|         |                 |                 |                 |                  |                   |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|-------------------|
|         | $\frac{1}{144}$ | $-\frac{7}{18}$ | $\frac{71}{12}$ | $-\frac{335}{9}$ | $\frac{3554}{45}$ |
| 4.26119 |                 | 0.02959         | -1.53103        | 18.68801         | -78.97778         |
|         | $\frac{1}{144}$ | -0.35930        | 4.38563         | -18.53421        | $\approx 0$       |

$$(x - 4.26119) \left( \frac{1}{144}x^3 - 0.35930x^2 + 4.38563x - 18.53421 \right) = 0$$

$$x_1 \approx 4.26119$$

|         |                 |           |           |             |
|---------|-----------------|-----------|-----------|-------------|
|         | $\frac{1}{144}$ | -0.35930  | 4.38563   | -18.53421   |
| 36.4053 |                 | 0.25281   | -3.876633 | 18.53       |
|         | $\frac{1}{144}$ | -0.106485 | 0.50900   | $\approx 0$ |

$$(x - 36.4053) \left( \frac{1}{144}x^2 - 0.106485x + 0.50900 \right) = 0$$

$$x_2 \approx 36.4053$$

$$\frac{1}{144}x^2 - 0.106485x + 0.50900 = 0$$

$$x_3 \approx 7.66660 + 3.8122i \quad x_4 \approx 7.66660 - 3.8122i$$

Note que de las cuatros soluciones anteriores, la única que está dentro del intervalo de distancia analizado de la viga [2m, 8m] es  $x_1$ , así que  $x_{max2} = 4.26119 \text{ m}$ . Por lo tanto,

$$y_{max2} = \frac{1}{EI} \left( \left( \frac{1}{720} \right) (4.26119)^5 - \left( \frac{7}{72} \right) (4.26119)^4 + \left( \frac{71}{36} \right) (4.26119)^3 - \left( \frac{335}{18} \right) (4.26119)^2 + \left( \frac{3554}{45} \right) (4.26119) - \left( \frac{880}{9} \right) \right) \Rightarrow y_{max2} \approx \frac{23.32049531}{EI} \Rightarrow \therefore y_{max2} = \frac{23.32049531}{EI} \uparrow$$

$$8m \leq x \leq 9m$$

$$\theta_3 = 0 = -3x + \frac{66}{5} \Rightarrow x = \frac{66}{5} = 4.4$$

Como  $x$  está fuera del intervalo del intervalo de distancia analizado de la viga [8m, 9m], se concluye que  $x_{3max} = 9m$ . En consecuencia,

$$y_{max3} = \frac{1}{EI} \left( \left( -\frac{3}{2} \right) (9)^2 + \left( \frac{66}{5} \right) (9) - \frac{48}{5} \right) \Rightarrow y_{max3} = -\frac{12.3}{EI} \Rightarrow \therefore y_{max3} = \frac{12.3}{EI} \downarrow$$

### Diagramas de fuerza cortante, momento flector, rotación y deflexión (curva elástica)

Con base en las tablas 1-27, 1-28, 1-29 y 1-30 se dibujan los diagramas requeridos, figuras 1-12q, 1-12r, 1-12s y 1-12t.

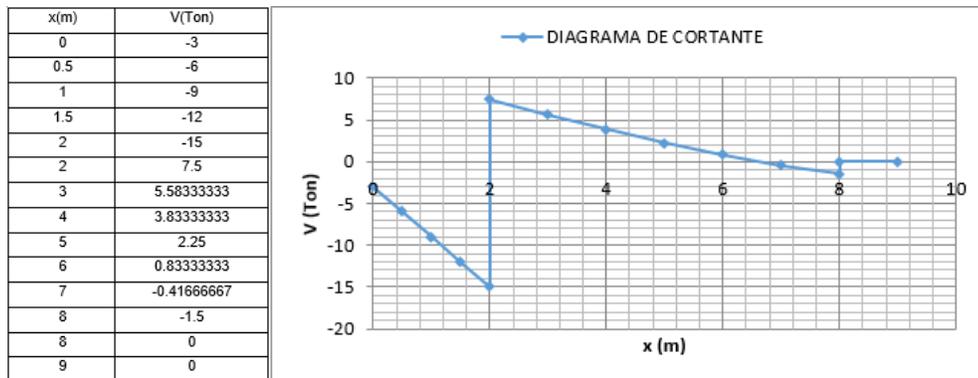


Tabla 1-27

(q)

CAPÍTULO 1 ANÁLISIS DE VIGAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

| x(m) | M (Ton*m)   |
|------|-------------|
| 0    | 0           |
| 0.5  | -2.25       |
| 1    | -6          |
| 1.5  | -11.25      |
| 2    | -18         |
| 2    | -18         |
| 3    | -11.4722222 |
| 4    | -6.77777778 |
| 5    | -3.75       |
| 6    | -2.22222222 |
| 7    | -2.02777778 |
| 8    | -3          |
| 8    | -3          |
| 9    | -3          |

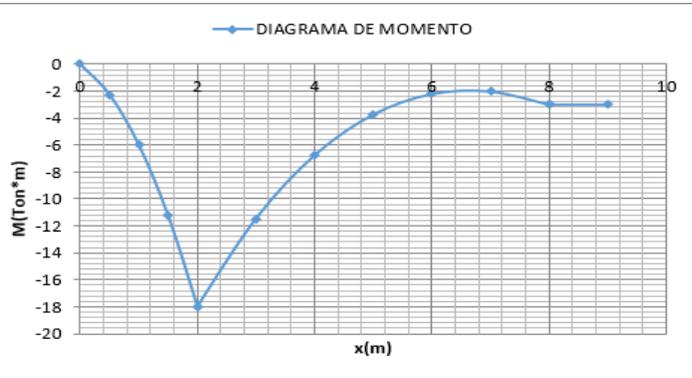


Tabla 1-28

(r)

| x(m) | $\theta$ (1/EI) |
|------|-----------------|
| 0    | 39.2            |
| 0.5  | 38.7            |
| 1    | 36.7            |
| 1.5  | 32.45           |
| 2    | 25.2            |
| 2    | 25.2            |
| 3    | 10.8238111      |
| 4    | 1.64444444      |
| 5    | -3.4875         |
| 6    | -6.3505556      |
| 7    | -8.37500009     |
| 8    | -10.8           |
| 8    | -10.8           |
| 9    | -13.8           |

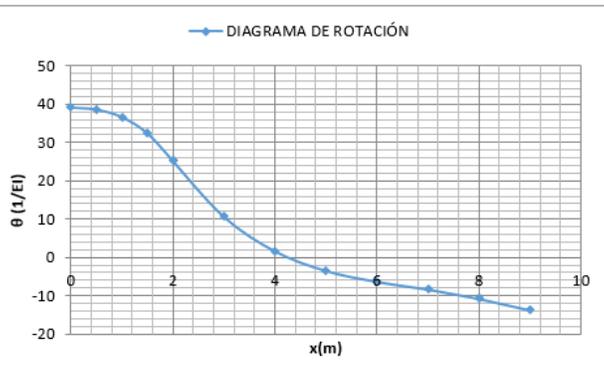


Tabla 1-29

(s)

| x(m) | Y (1/EI)   |
|------|------------|
| 0    | -70.4      |
| 0.5  | -50.878125 |
| 1    | -31.85     |
| 1.5  | -14.553125 |
| 2    | 0          |
| 2    | 0          |
| 3    | 17.360556  |
| 4    | 23.1111111 |
| 5    | 21.9375    |
| 6    | 16.8888889 |
| 7    | 9.50694444 |
| 8    | 0          |
| 8    | 0          |
| 8.5  | -5.775     |
| 9    | -12.3      |

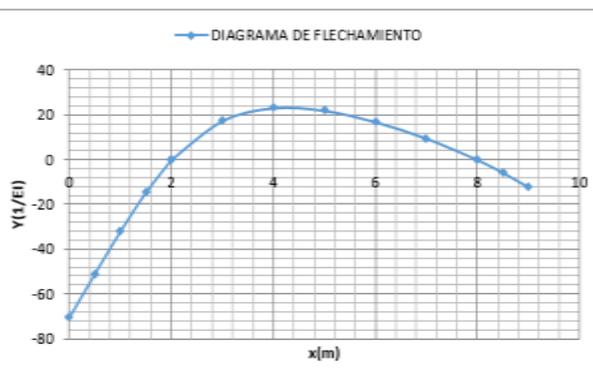
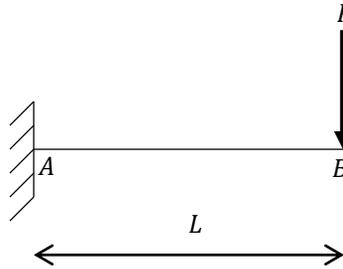


Tabla 1-30

(t)

**Ejercicio 1.13** Determine las reacciones en el empotramiento  $A$  y las ecuaciones para la pendiente y la deflexión usando el método de la doble integración de la viga mostrada en la figura 1-13a.  $EI$  es constante.



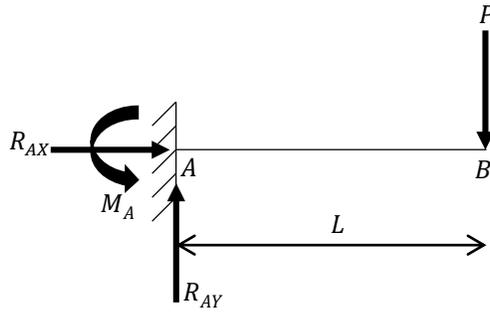
(a)

**Figura 1-13**

**SOLUCIÓN**

**Reacciones en los soportes**

Suponiendo el sentido de cada reacción arbitrariamente, se tiene que el diagrama de cargas de la estructura es como el que se observa en la figura 1-13b.



(b)

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en tal diagrama resulta

$$\overset{+}{\curvearrowright} \sum MA = 0 \Rightarrow -M_A + (P)(L) = 0 \Rightarrow \therefore M_A = PL \curvearrowleft$$

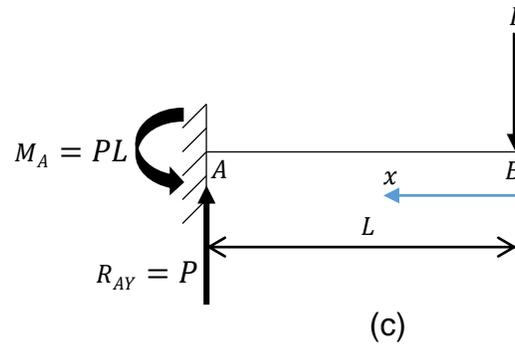
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - P = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = P \uparrow$$

Tenga en cuenta siempre que si una magnitud resultará negativa para una fuerza reactiva, entonces deberá invertirse el sentido propuesto de esta.

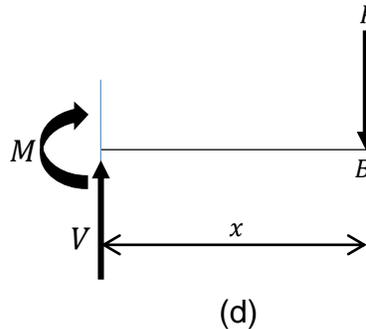
### Función de momento

En la figura 1-13c se indican esquemáticamente los resultados obtenidos. Como no hay discontinuidad de carga, sólo se necesitará efectuar un corte perpendicular al eje de la viga para para definir el momento interno a lo largo de ella. El origen del sistema coordenado, que bien puede elegirse en el extremo empotrado  $A$ , se selecciona en el extremo libre  $B$ .



Se toma una sección cualquiera de la viga a una distancia general  $x$  a partir del origen de coordenadas. Con base en el diagrama de cuerpo libre de la sección cortada, figura 1-13d, en el que las acciones internas actúan en su dirección positiva, se escribe la ecuación de momento flexionante en función de  $x$ .

$$0 \leq x \leq L$$



$$+\sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow M + P(x) = 0 \Rightarrow M = -Px$$

### Ecuaciones de la pendiente y la deflexión

Al aplicar la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

e integrarla dos veces, se obtiene

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Px \Rightarrow EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int -Px dx \Rightarrow EI \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{2}x^2 + C_1$$

$$\text{si } \frac{dy}{dx} = \theta, \text{ entonces } EI\theta = -\frac{P}{2}x^2 + C_1 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$EI \int dy = \int \left(-\frac{P}{2}x^2 + C_1\right) dx \Rightarrow EIy = -\frac{P}{6}x^3 + C_1x + C_2 \rightarrow \textcircled{2}$$

Las dos constantes de integración resultantes en las expresiones que definen las curvas de pendiente y de deflexión deben calcularse a partir de plantear condiciones que permitan evaluarlas. Si se sabe que el empotramiento en  $A$  impide la rotación y el desplazamiento vertical en ese punto, entonces tenemos que las condiciones de frontera son: 1)  $y = 0$  en  $x = L$  y 2)  $\theta = 0$  en  $x = L$ .

Sustituyendo la condición 2) en la ecuación  $\textcircled{1}$  da

$$EI(0) = -\frac{P}{2}(L)^2 + C_1 \Rightarrow \therefore C_1 = \frac{PL^2}{2}$$

Sustituyendo la condición 1) y  $C_1 = \frac{PL^2}{2}$  en la ecuación  $\textcircled{2}$  resulta

$$EI(0) = -\frac{P}{6}(L)^3 + \left(\frac{PL^2}{2}\right)(L) + C_2 \Rightarrow \therefore C_2 = -\frac{PL^3}{3}$$

En consecuencia, las ecuaciones del giro y la flecha son, respectivamente

$$\theta = \frac{1}{EI} \left( -\frac{P}{2}x^2 + \frac{PL^2}{2} \right) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$y = \frac{1}{EI} \left( -\frac{P}{6}x^3 + \frac{PL^2}{2}x - \frac{PL^3}{3} \right) \quad 0 \leq x \leq L$$

Para una viga en voladizo, el valor máximo de la deflexión está posicionado en el extremo libre, en este caso, en el punto  $B$ . Por lo tanto,

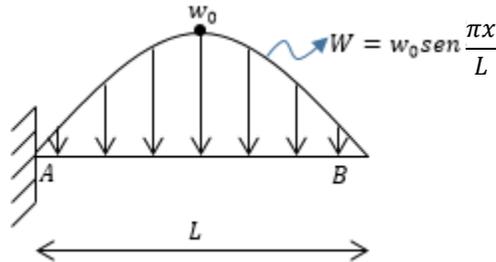
$$x_{\text{máx}} = 0$$

$$y_{\text{máx}} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{P}{6}(0)^3 + \frac{PL^2}{2}(0) - \frac{PL^3}{3} \right) \Rightarrow y_{\text{máx}} = -\frac{PL^3}{3EI}$$

En el método de integración doble, un valor negativo de la deflexión es hacia abajo. Por consiguiente,

$$y_{\text{máx}} = \frac{PL^3}{3EI} \downarrow$$

**Ejercicio 1.14** Determine las reacciones en el empotramiento A y las ecuaciones para la pendiente y la deflexión de la viga mostrada en la figura 1-14a que soporta en toda su longitud una carga trigonométrica variable.  $EI$  es constante.



(a)

**Figura 1-14**

**SOLUCIÓN**

**Reacciones en los soportes**

Se calcula la fuerza resultante de la carga distribuida cuya intensidad varía de forma senoidal hallando el área bajo la curva del siguiente modo:

$$A = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} W dx$$

$$A = \int_0^L w_o \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = w_o \int_0^L \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

Primero se resuelve la integral previa de forma indefinida. Sea  $u = \frac{\pi x}{L}$ , entonces  $du = \frac{\pi}{L} dx$ , en consecuencia  $dx = \frac{L}{\pi} du$ . Al aplicar la regla de sustitución, resulta

$$\int \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \int \text{sen } u \cdot \frac{L}{\pi} du = \frac{L}{\pi} \int \text{sen } u du = \frac{L}{\pi} (-\text{cos } u) = -\frac{L}{\pi} \text{cos}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Así, considerando la solución de la integral de forma definida, se tiene

$$A = -w_o \frac{L}{\pi} \left[ \text{cos}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]_0^L = -w_o \frac{L}{\pi} [\text{cos}(\pi) - \text{cos}(0)] = -w_o \frac{L}{\pi} (-1 - 1) = 2w_o \frac{L}{\pi}$$

Se determina el brazo de palanca de la resultante calculando el centroide del área.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xW dx}{\int_{L_1}^{L_2} W dx} = \frac{\int_0^L x \left[ w_o \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx}{\int_0^L w_o \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx}$$

El denominador ya fue resultado. Enseguida se resuelve el numerador. La integral en forma indefinida es

$$\int x \left[ w_0 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] dx = w_0 \int x \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx$$

Ahora se aplica la integración por partes,  $\int u dv = uv - \int v du$ . Aquí  $u = x$  y  $dv = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx$ . Por consiguiente,  $du = dx$  y  $v = \int dv = \int \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx = -\frac{L}{\pi} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right)$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} w_0 \int x \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx &= w_0 \left( x \left( -\frac{L}{\pi} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) - \int \left( -\frac{L}{\pi} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx \right) \\ &= -w_0 \frac{L}{\pi} \left( x \cos \left( \frac{x\pi}{L} \right) - \int \left( \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx \right) = w_0 \frac{L}{\pi} \left\{ \left[ \frac{L}{\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{x\pi}{L} \right) - x \cos \left( \frac{x\pi}{L} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

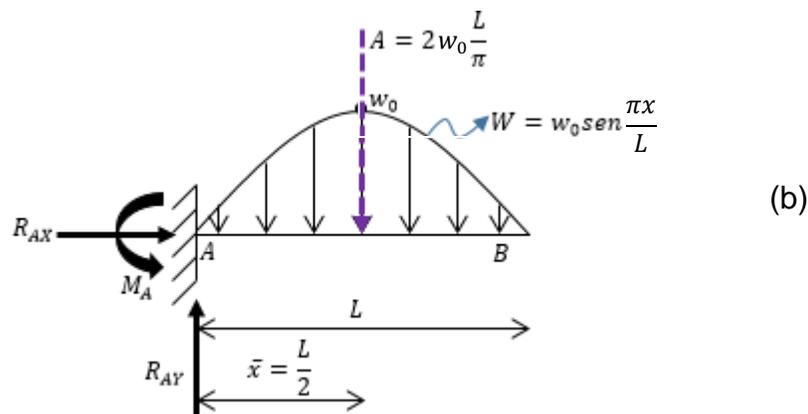
Finalmente, la solución de la integral de forma definida es

$$\begin{aligned} \int_0^L x \left[ w_0 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] dx &= w_0 \frac{L}{\pi} \left\{ \left[ \frac{L}{\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{x\pi}{L} \right) - x \cos \left( \frac{x\pi}{L} \right) \right]_0^L \right\} \\ w_0 \frac{L}{\pi} \left\{ \left[ \frac{L}{\pi} [\operatorname{sen}(\pi)] - (L)[\cos(\pi)] \right] - \left[ \frac{L}{\pi} [\operatorname{sen}(0)] - (0)[\cos(0)] \right] \right\} \\ &= w_0 \frac{L}{\pi} (L - 0) = w_0 \frac{L}{\pi} (L - 0) = w_0 \frac{L^2}{\pi} \end{aligned}$$

Finalmente, el punto de aplicación de la fuerza resultante es

$$\bar{x} = \frac{w_0 \frac{L^2}{\pi}}{2w_0 \frac{L}{\pi}} = \frac{L^2}{2L} = \frac{1}{2}L$$

Se identifican las reacciones del empotramiento A. En la figura 1-14b se observa el diagrama de cargas de la viga.

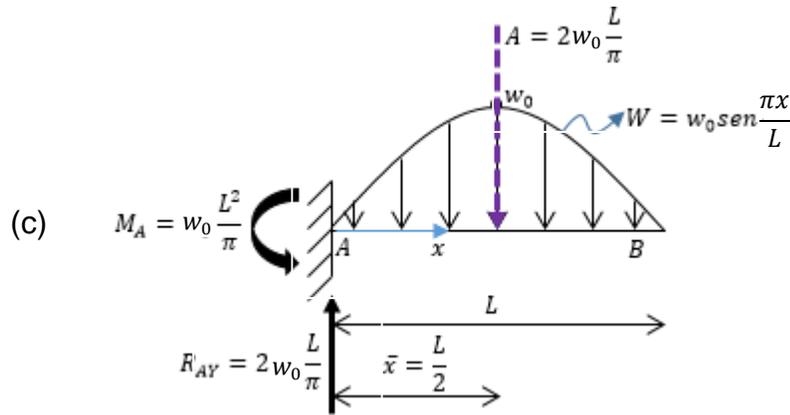


Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se obtiene

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MA = 0 &\Rightarrow \left(2w_0 \frac{L}{\pi}\right) \left(\frac{L}{2}\right) - M_A = 0 \Rightarrow \therefore M_A = w_0 \frac{L^2}{\pi} \curvearrowleft \\ +\uparrow \sum FY = 0 &\Rightarrow R_{AY} - 2w_0 \frac{L}{\pi} = 0 \Rightarrow R_{AY} = 2w_0 \frac{L}{\pi} \Rightarrow \therefore R_{AY} = 2w_0 \frac{L}{\pi} \uparrow \\ +\rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow \therefore R_{AX} = 0 \end{aligned}$$

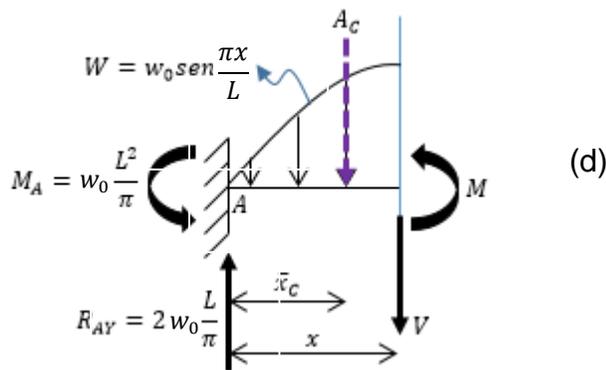
**Función de momento**

Los resultados son presentados en la figura 1-14c. Dado que la carga distribuida no presenta discontinuidad, la función de momento no será discontinua. El origen del sistema coordenado se selecciona en el extremo empotrado A.



Se emplea el método de secciones. A continuación, en la figura 1-14d, se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de viga con longitud  $x$ . Con la intensidad de carga conocida, la resultante de la carga distribuida y su punto de aplicación se encuentran de la manera usual.

$$0 \leq x \leq L$$



$$\begin{aligned}
 A_c &= \int_0^x w_o \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx = w_o \frac{L}{\pi} \left[ -\cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right]_0^x = w_o \frac{L}{\pi} \left\{ - \left[ \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) - \cos(0) \right] \right\} \\
 &= w_o \frac{L}{\pi} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] \\
 \bar{x}_c &= \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx} = \frac{\int_0^x x \left[ w_o \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] dx}{\int_0^x w_o \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx} = \frac{w_o \frac{L}{\pi} \left\{ \left[ \frac{L}{\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) - x \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right]_0^x \right\}}{w_o \frac{L}{\pi} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right]} \\
 \bar{x}_c &= \frac{\left\{ \left[ \frac{L}{\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) - x \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] - \left[ \frac{L}{\pi} [\operatorname{sen}(0)] - (0)[\cos(0)] \right] \right\}}{1 - \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right)} \\
 &= \frac{\frac{L}{\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) - x \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right)}{1 - \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right)}
 \end{aligned}$$

Tomando momentos alrededor del punto del corte tenemos

$$\curvearrowright \sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$-M - w_o \frac{L^2}{\pi} - w_o \frac{L}{\pi} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] \left[ x - \frac{\frac{L}{\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) - x \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right)}{1 - \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right)} \right] + 2w_o \frac{L}{\pi} (x) = 0$$

$$M = -w_o \frac{L^2}{\pi} - w_o \frac{L}{\pi} \left[ x - \frac{L}{\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right] + 2w_o \frac{L}{\pi} x = w_o \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) + w_o \frac{L}{\pi} x - w_o \frac{L^2}{\pi}$$

Aunque el método no lo requiere, se calcula lo siguiente:

La función de la fuerza cortante es

$$V = \frac{dM}{dx} = w_o \frac{L}{\pi} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) + w_o \frac{L}{\pi}$$

El momento máximo se encuentra posicionado en el empotramiento, es decir, en  $x_{\max} = 0$ . Por lo tanto,

$$M_{\max} = w_o \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi(0)}{L} \right) + w_o \frac{L}{\pi} (0) - w_o \frac{L^2}{\pi} = -w_o \frac{L^2}{\pi}$$

### Ecuaciones de la pendiente y la deflexión

Al aplicar la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

e integrarla dos veces se obtiene

$$EI \int \frac{d(dy)}{dx} = \int \left( w_o \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \left( \frac{x\pi}{L} \right) + w_o \frac{L}{\pi} x - w_o \frac{L^2}{\pi} \right) dx$$

$$EI\theta = EI \frac{dy}{dx} = -w_o \frac{L^3}{\pi^3} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) + w_o \frac{L}{\pi} \frac{x^2}{2} - w_o \frac{L^2}{\pi} x + C_1 \longrightarrow \textcircled{1}$$

$$EI \int dy = \int \left( -w_o \frac{L^3}{\pi^3} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) - w_o \frac{L}{\pi} \frac{x^2}{2} + w_o \frac{L^2}{\pi} x + C_1 \right) dx$$

$$EI y = -w_o \frac{L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) + w_o \frac{L}{\pi} \frac{x^3}{6} - w_o \frac{L^2}{\pi} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \longrightarrow \textcircled{2}$$

Las dos constantes,  $C_1$  y  $C_2$ , se obtienen de las condiciones de frontera, esto es, que para 1)  $x = 0$ ,  $\theta = 0$  y para 2)  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Reemplazando la condición 1) en la ecuación  $\textcircled{1}$  resulta

$$EI(0) = -w_o \frac{L^3}{\pi^3} \cos \left[ \frac{\pi(0)}{L} \right] + w_o \frac{L}{\pi} \frac{(0)^2}{2} - w_o \frac{L^2}{\pi} (0) + C_1 = 0 \Rightarrow \therefore C_1 = w_o \frac{L^3}{\pi^3}$$

Reemplazando la condición 2) en la ecuación  $\textcircled{2}$  se tiene

$$EI y(0) = -w_o \frac{L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi(0)}{L} \right] + w_o \frac{L}{\pi} \frac{(0)^3}{6} - w_o \frac{L^2}{\pi} \frac{(0)^2}{2} + w_o \frac{L^3}{\pi^3} (0) + C_2 = 0 \Rightarrow \therefore C_2 = 0$$

Luego, las ecuaciones de la pendiente  $\theta$  y de la curva elástica  $y$ , quedarían de forma definitiva como

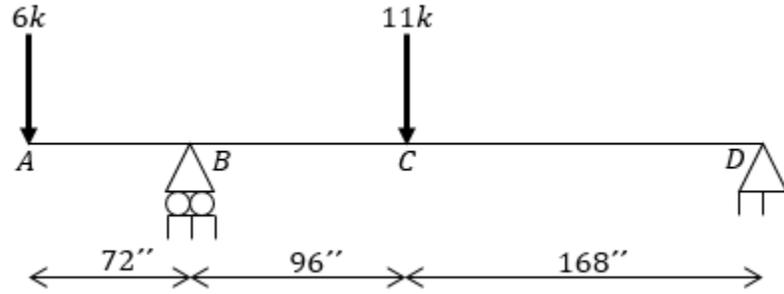
$$\theta(x) = \frac{1}{EI} w_o \frac{L}{\pi} \left( -\frac{L^2}{\pi^2} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) + \frac{1}{2} x^2 - Lx + \frac{L^2}{\pi^2} \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} w_o \frac{L}{\pi} \left( -\frac{L^3}{\pi^3} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) + \frac{1}{6} x^3 - \frac{L}{2} x^2 + \frac{L^2}{\pi^2} x \right)$$

Para esta viga, la flecha máxima se ubica en el punto  $B$ , que corresponde al extremo libre de la viga, por lo que  $x_{max} = L$ . Por consiguiente,

$$y_{m\acute{a}x} = \frac{1}{EI} w_o \frac{L}{\pi} \left( -\frac{L^3}{\pi^3} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi(L)}{L} \right) + \frac{1}{6} (L)^3 - \frac{L}{2} (L)^2 + \frac{L^2}{\pi^2} (L) \right) = \frac{1}{EI} w_o \frac{L^4}{\pi} \left( \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{3} \right)$$

**Ejercicio 1.15** Calcule la deflexión vertical del extremo libre  $A$  de la viga que se muestra en la figura 1-15a considerando únicamente las deformaciones por flexión, aplicando el método del trabajo virtual. Suponga un  $EI$  constante.



(a)

**Figura 1-15**

**SOLUCIÓN**

**Momentos reales  $M$**

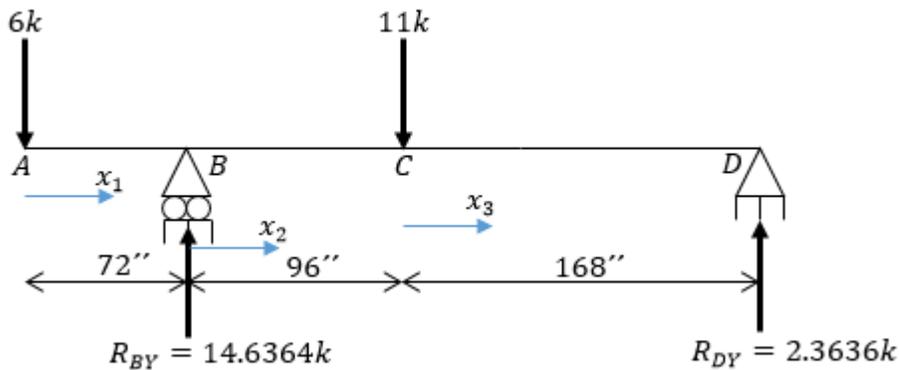
En primera instancia se deben calcular las reacciones en los soportes de la viga.

$$\curvearrowleft \sum MD = 0 \Rightarrow 6(336) - R_{BY}(264) + 11(168) = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 14.6364k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -6 + 14.6364 - 11 + R_{DY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 2.3636k \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{DX} = 0$$

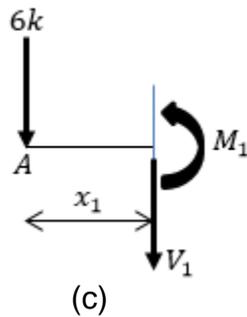
Luego, se determinan los momentos internos  $M$  empleando el método de las secciones. Puede utilizarse una sola coordenada  $x$  para determinar la energía de



(b)

deformación por flexión en la viga, cuyo origen puede elegirse en  $A$  o en  $D$ , sin embargo, en este caso, se opta por usar una coordenada  $x$  para cada región distinta, figura 1-15b. Cabe señalar que las coordenadas deben cubrir las regiones donde no ocurren discontinuidades en las cargas tanto reales como virtuales. Entonces, las coordenadas  $x_1, x_2$ , y  $x_3$  con orígenes en  $A, B$  y  $C$  consideran la energía de deformación dentro de los segmentos  $A-B, B-C$  y  $C-D$ , respectivamente.

Con base en las figuras 1-15c, 1-15d y 1-15e, las funciones de momento  $M$  en cada región de la viga son



$$0 \leq x_1 \leq 72in$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

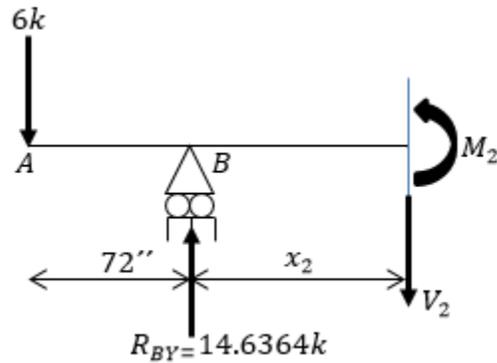
$$-M_1 - 6(x_1) = 0 \Rightarrow M_1 = -6x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 96in$$

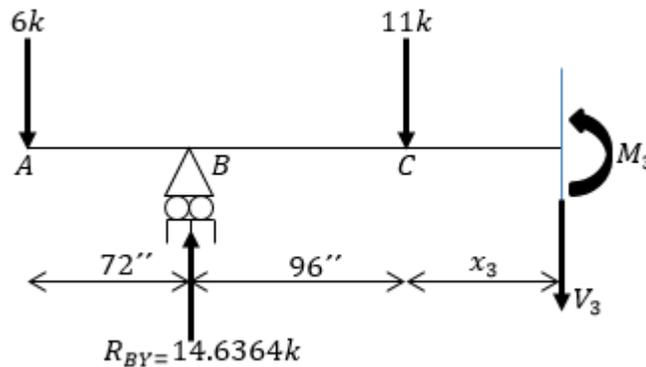
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-6(72 + x_2) + 14.6364(x_2) - M_2 = 0$$

$$M_2 = 8.6364x_2 - 432$$



$$0 \leq x_3 \leq 168in$$



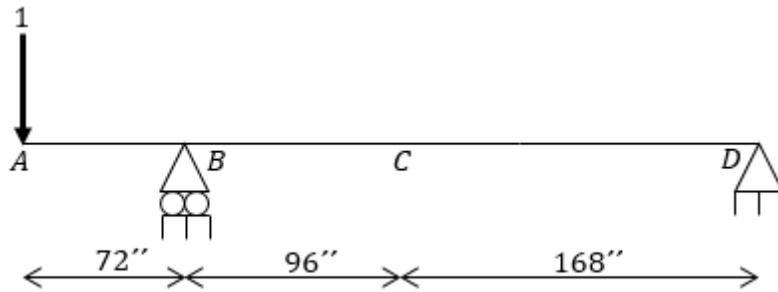
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-6(72 + 96 + x_3) + 14.6364(96 + x_3) - 11(x_3) - M_3 = 0$$

$$M_3 = 397.094 - 2.3636x_3$$

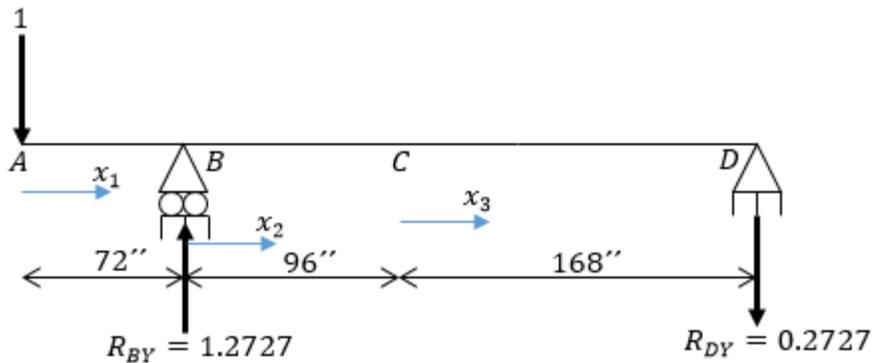
**Momentos virtuales  $m$**

Las cargas reales son suprimidas y únicamente se coloca sobre la viga una carga virtual o ficticia unitaria en el punto y en la dirección donde se desea conocer el desplazamiento. Siendo así, el desplazamiento vertical del punto  $A$  se determina aplicando una carga vertical de 1 en  $A$  con un sentido hacia abajo, aunque no importaría si actuara hacia arriba, figura 1-15f. Se calculan las reacciones en los apoyos y utilizando las mismas coordenadas  $x$  que se usaron para determinar  $M$ , se formulan los momentos internos  $m$  a través del método de las secciones. Es obligatorio que  $m$  actúe en la misma dirección positiva que  $M$ .



(f)

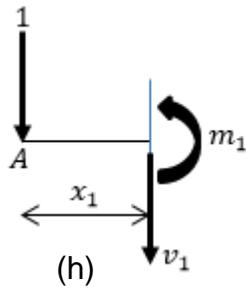
En la figura 1-15g se muestran los resultados obtenidos al aplicar las ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cargas.



(g)

$$\begin{aligned} \curvearrowleft + \sum MD = 0 &\Rightarrow 1(336) - R_{BY}(264) = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 1.2727 \uparrow \\ +\uparrow \sum FY = 0 &\Rightarrow -1 + 1.2727 - R_{DY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 0.2727 \downarrow \\ +\rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow \therefore R_{DX} = 0 \end{aligned}$$

Ahora se escriben las ecuaciones para el momento flexionante  $m$  en cada región de la viga son, a partir de las figuras 1-15h, 1-15i y 1-15j.



$$0 \leq x_1 \leq 72in$$

$$\curvearrowleft + \sum m_{corte} = 0$$

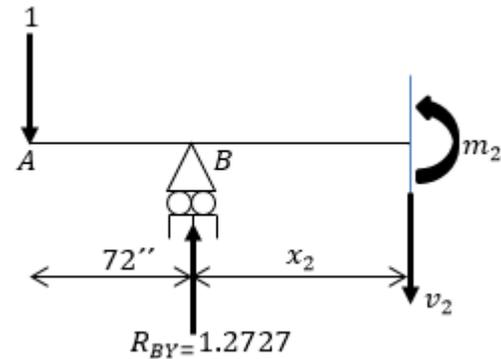
$$-m_1 - 1(x_1) = 0 \Rightarrow m_1 = -x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 96in$$

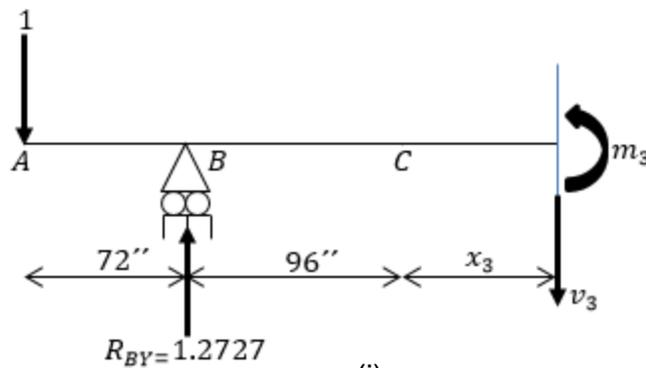
$$\curvearrowleft + \sum m_{corte} = 0$$

$$-1(72 + x_2) + 1.2727(x_2) - m_2 = 0$$

$$m_2 = 0.2727x_2 - 72$$



$$0 \leq x_3 \leq 168in$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$-1(72 + 96 + x_3) + 1.2727(96 + x_3) - 11(x_3) - m_3 = 0$$

$$m_3 = 0.2727x_3 - 45.8208$$

### Ecuación del trabajo virtual

Si el trabajo externo es igual al trabajo interno, entonces el desplazamiento vertical de A es

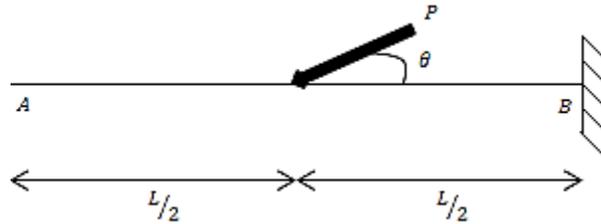
$$1 \cdot \Delta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot \delta_{VA} &= \left(\frac{1}{EI}\right) \left[ \int_0^{72} (-6x_1)(-x_1) dx_1 + \int_0^{96} (8.6364x_2 - 432)(0.2727x_2 - 72) dx_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{168} (397.094 - 2.3636x_3)(0.2727x_3 - 45.8208) dx_3 \right] \\ &= \left(\frac{1}{EI}\right) (746496 + 272342.76213 - 1019021.08759) = -\frac{182.325}{EI} \end{aligned}$$

Como se obtuvo una magnitud negativa para el desplazamiento, este actúa en sentido contrario al de la carga virtual unitaria. Por lo tanto,

$$\delta_{VA} = \frac{182.325}{EI} \uparrow$$

**Ejercicio 1.16** Determine el desplazamiento vertical y la pendiente del punto *A* de la viga en voladizo mostrada en la figura 1-16a tomando en cuenta solamente las deformaciones debidas a la flexión, aplicando el método del trabajo virtual. Considere que  $EI$  es constante.



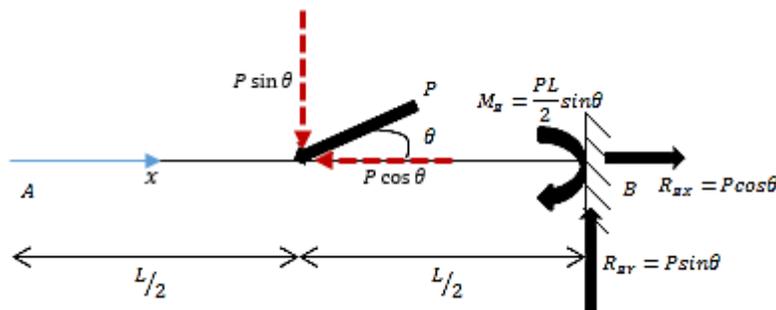
(a)

**Figura 1-16**

**SOLUCIÓN**

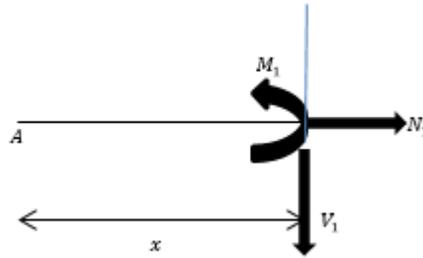
**Momentos reales  $M$**

Los momentos internos  $M$  se formulan con base en el método de secciones. Se opta por emplear una sola coordenada  $x$  para determinar la energía de deformación y su origen se elige en *A*, la figura 1-16b, con la intención de que el cálculo de las reacciones en el empotramiento *B* no sea necesario. Las funciones de momento serán discontinuas en el punto de aplicación de la carga inclinada  $P$ , por lo que se requiere de dos cortes perpendiculares al eje de la viga para definir  $M$  a lo largo de la estructura, figuras 1-16c y 1-16d.



(b)

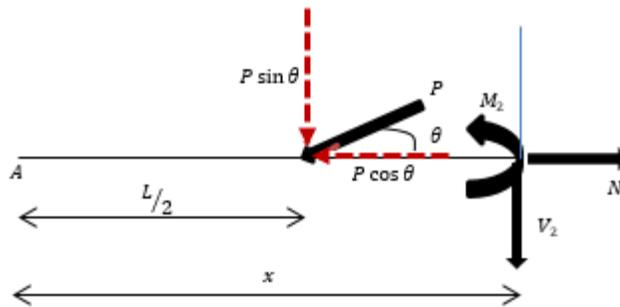
$$0 \leq x \leq L/2$$



(c)

$$\sum \curvearrowright M_{corte} = 0 \Rightarrow M_1 = 0$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

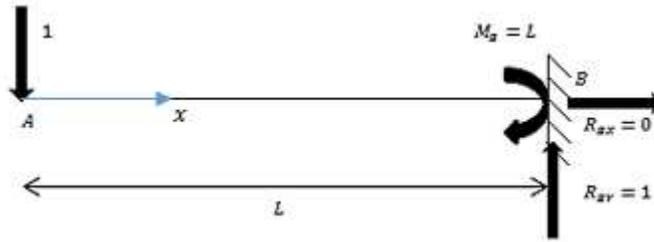


(d)

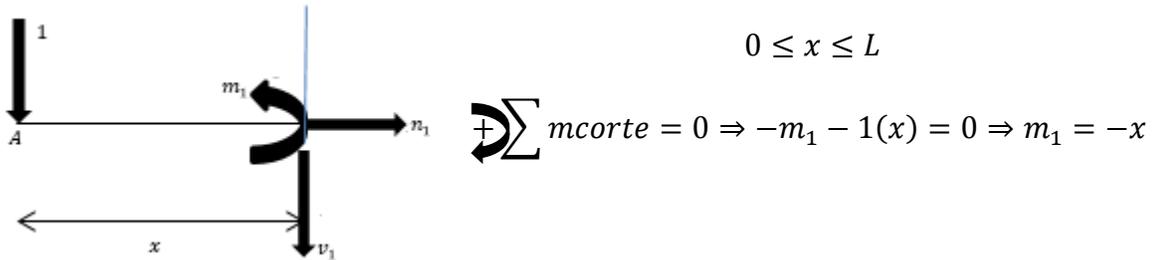
$$\sum \curvearrowright M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_2 - P \sin \theta \left( x - \frac{L}{2} \right) = 0 \Rightarrow M_2 = -P \sin \theta (x) + \frac{PL}{2} \sin \theta$$

### Momento virtual $m$

El desplazamiento vertical de  $A$  se obtiene al incorporar una carga ficticia unitaria vertical en ese punto sobre la viga descargada, figura 1-16e. Se corta la viga, figura 1-16f, y se escribe la ecuación de  $m$  como función de la variable  $x$ . El sistema coordenado debe ser idéntico al empleado en  $M$ .



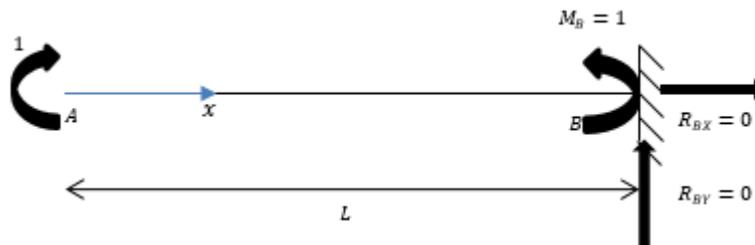
(e)



(f)

### Momento virtual $m_\theta$

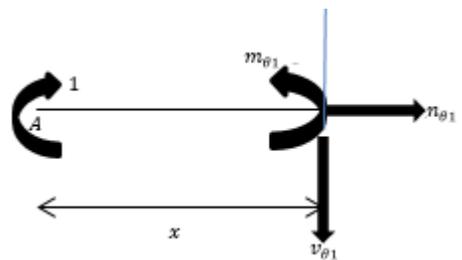
Puesto que queremos calcular la rotación angular (pendiente) en  $A$  de la viga, aplicamos un par ficticio unitario en ese lugar con un sentido idéntico al del giro de las manecillas del reloj o en el sentido contrario, suprimiendo las cargas reales, figura 1-16g. Se escribe la ecuación  $m_\theta$  en función de  $x$  con base en el diagrama de cuerpo libre de la sección cortada, figura 1-16h. La coordenada  $x$  debe ser la misma que la usada en  $M$ .



(g)

$$0 \leq x \leq L$$

$$\sum m_{corte} = 0 \Rightarrow -m_{\theta 1} + 1 = 0 \Rightarrow m_{\theta 1} = 1$$



(h)

### Ecuación del trabajo virtual

Entonces, el desplazamiento vertical de A es

$$\begin{aligned}
 1 \cdot \Delta &= \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx \\
 1 \cdot \delta_{VA} &= \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} (0)(-x) dx + \int_{L/2}^L \left( -P \sin \theta (x) + \frac{PL}{2} \sin \theta \right) (-x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{EI} \left[ 0 + \frac{P \sin \theta}{3} x^3 - \frac{PL}{4} \sin \theta (x^2) \right]_{L/2}^L = \frac{1}{EI} \left[ \frac{P \sin \theta}{3} \left( L^3 - \left( \frac{L}{2} \right)^3 \right) - \frac{PL}{4} \sin \theta \left( L^2 - \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{7PL^3}{24} \sin \theta - \frac{3PL^3}{16} \sin \theta \right] = \frac{5PL^3}{48EI} \sin \theta \\
 \therefore \delta_{VA} &= \frac{5PL^3}{48EI} \sin \theta \downarrow
 \end{aligned}$$

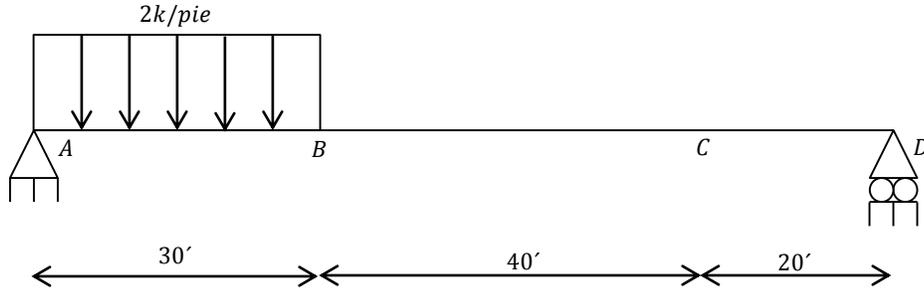
Por otra parte, la pendiente en A es resultado de

$$\begin{aligned}
 1 \cdot \theta &= \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_\theta}{EI} dx \\
 1 \cdot \theta_A &= \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/2} (0)(1) dx + \int_{L/2}^L \left( -P \sin \theta (x) + \frac{PL}{2} \sin \theta \right) (1) dx \right] \\
 &= \frac{1}{EI} \left[ 0 - \frac{P \sin \theta}{2} x^2 + \frac{PL}{2} \sin \theta (x) \right]_{L/2}^L = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{P \sin \theta}{2} \left( L^2 - \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right) + \frac{PL}{2} \sin \theta \left( L - \frac{L}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{3PL^2}{8} \sin \theta + \frac{PL^2}{4} \sin \theta \right] = -\frac{PL^2}{8EI} \sin \theta
 \end{aligned}$$

La magnitud negativa obtenida para  $\theta_A$ , indica que este en realidad es de sentido opuesto al momento virtual unitario.

$$\therefore \theta_A = \frac{PL^2}{8EI} \sin \theta \curvearrowright$$

**Ejercicio 1.17** Determine la deflexión vertical en los puntos  $B$  y  $C$  de la viga indicada en la figura 1-17a con el método del trabajo virtual. Sobre el tramo  $A - B$  actúa una carga de  $2k/pe$ .  $E$  e  $I$  son constantes para toda la viga y  $EI = 276000k - pie^2$ .



(a)  
**Figura 1-17**

**SOLUCIÓN**

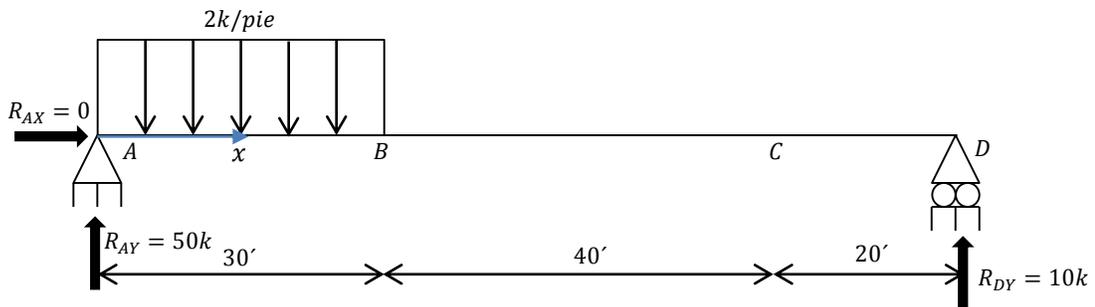
**Momentos reales  $M$**

Se calculan las reacciones en los soportes. Como la viga no está sometida a alguna fuerza horizontal, directamente de suma de fuerzas en la dirección  $X$  se obtiene que  $R_{AX} = 0$ . Luego, las fuerzas reactivas verticales de los apoyos se obtienen de

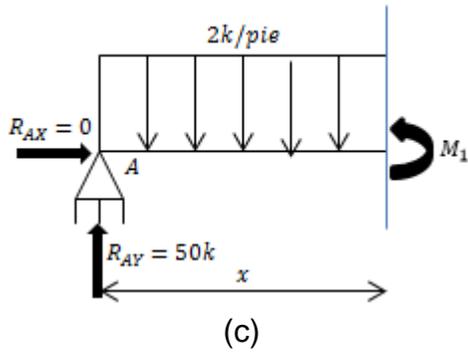
$$+\circlearrowleft \sum MA = 0 \Rightarrow 2(30) \left( \frac{1}{2}(30) \right) - R_{DY}(90) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 10k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 2(30) + 10 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 50k \uparrow$$

Se emplea la coordenada  $x$  con origen en  $A$  para cubrir toda la longitud de la viga, figura 1-17b. Debido a que hay una discontinuidad de la carga uniformemente distribuida en el punto  $B$ , se tienen que considerar dos regiones, la  $A - B$  y la  $B - D$ , y se debe efectuar un seccionamiento en cada una de ellas con el objetivo de describir las funciones de momento  $M$  para toda la viga, figuras 1-17c y 1-117d.



(b)

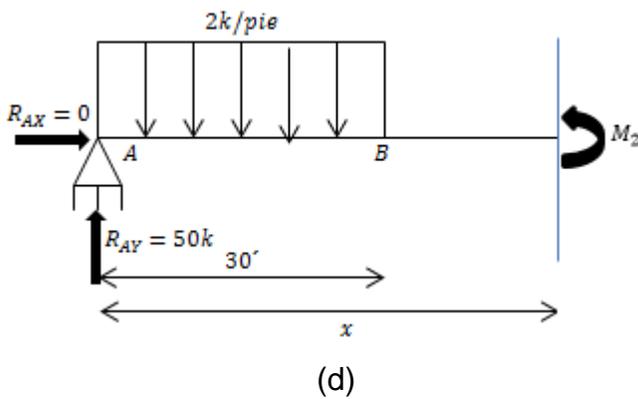


$$0' \leq x \leq 30'$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 + 50(x) - 2(x) \left( \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$M_1 = 50x - x^2$$



$$30' \leq x \leq 90'$$

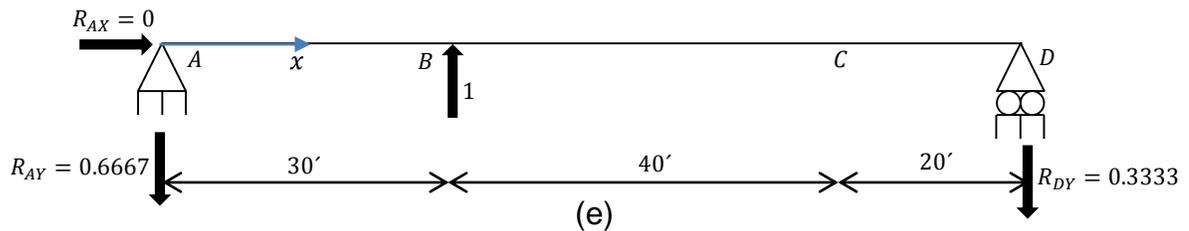
$$+\circlearrowleft \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 + 50(x) - 2(30) \left( x - \frac{1}{2}(30) \right) = 0$$

$$M_2 = 900 - 10x$$

### Momentos virtuales $m$

Para poder calcular el desplazamiento vertical en el punto  $B$ , se coloca una carga virtual de uno en  $B$ , figura 1-17e. Por inspección, las funciones de momento interno  $m$ , que se formulan de la manera habitual, son discontinuas en el punto mencionado.



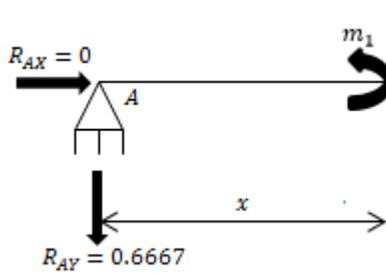
Se calculan las reacciones en los apoyos.

$$+\circlearrowleft \sum MA = 0 \Rightarrow -1(30) + R_{DY}(90) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 0.3333 \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 - 0.3333 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.6667 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

Al seccionar la viga en algún sitio intermedio del tramo  $A - B$  y del tramo  $B - D$  de forma respectiva, figuras 1-17f y 1-17g, se tiene

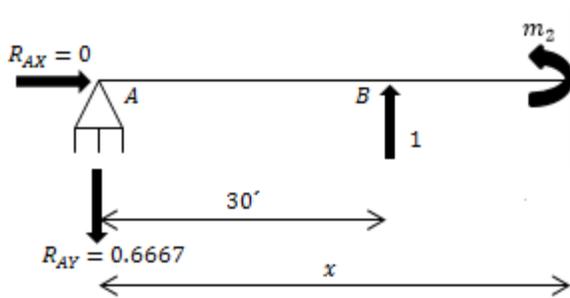


(f)

$$0' \leq x \leq 30'$$

$$\sum m_{corte} = 0$$

$$-m_1 - 0.6667(x) = 0 \Rightarrow m_1 = -0.6667x$$



(g)

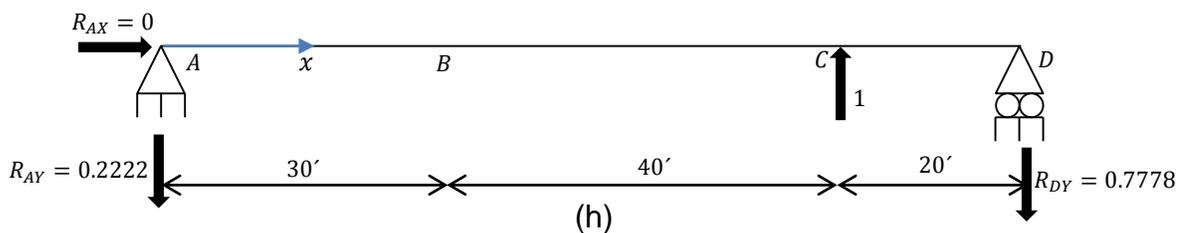
$$30' \leq x \leq 90'$$

$$\sum m_{corte} = 0$$

$$m_2 = -0.6667x + 1(x - 30) = 0$$

$$m_2 = 0.3333x - 30$$

Como también se requiere conocer el desplazamiento vertical en  $C$ , la viga sin cargas reales se somete a una a una carga virtual vertical unitaria en ese punto, figura 1-17h. Aquí, las funciones de momento interno  $m$  son discontinuas en  $C$ .



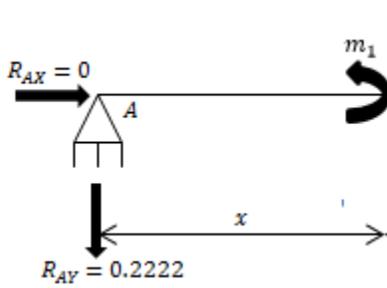
(h)

Al calcular las reacciones en los soportes  $A$  y  $D$ , y al emplear el método de secciones, figuras 1-17i y 1-17j, se tiene

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -1(70) + R_{DY}(90) = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 0.7778 \downarrow$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 1 - 0.7778 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.2222 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$



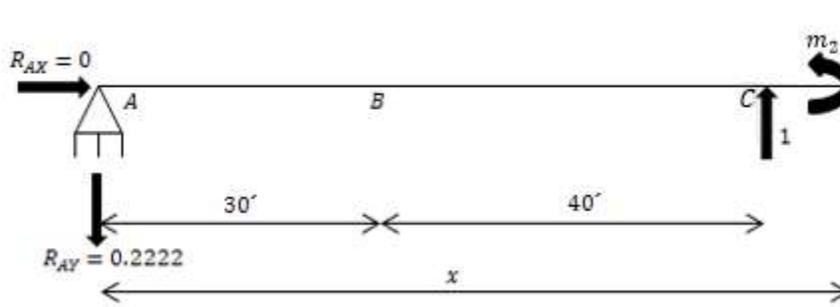
(i)

$$0' \leq x \leq 70'$$

$$\sum m_{corte} = 0$$

$$-m_1 - 0.2222(x) = 0 \Rightarrow m_1 = -0.2222x$$

$$70' \leq x \leq 90'$$



(j)

$$\sum m_{corte} = 0 \Rightarrow -m_2 - 0.2222(x) + 1(x - 70) = 0 \Rightarrow m_2 = 0.7778x - 70$$

### Ecuación del trabajo virtual

La expresión matemática del trabajo virtual para cargas de flexión es

$$1 \cdot \Delta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

Finalmente, se determina el desplazamiento vertical en los puntos B y C.

$$1 \cdot \delta_{VB} = \frac{1}{276000} \left[ \int_0^{30} (50x - x^2)(-0.6667x) dx + \int_{30}^{90} (900 - 10x)(0.3333x - 30) dx \right]$$

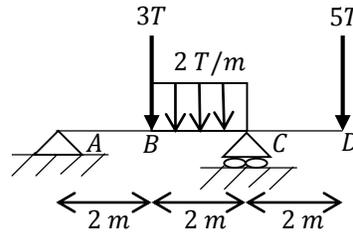
$$= -1.46753 \text{ pies} \qquad \therefore \delta_{VB} = 1.46753 \text{ pies} \downarrow$$

$$1 \cdot \delta_{VC} = \frac{1}{276000} \left[ \int_0^{30} (50x - x^2)(-0.2222x) dx + \int_{30}^{70} (900 - 10x)(-0.2222x) dx \right. \\ \left. + \int_{70}^{90} (900 - 10x)(0.7778x - 70) dx \right]$$

$$= -0.875511 \text{ pies} \qquad \therefore \delta_{VC} = 0.875511 \text{ pies} \downarrow$$

### 1.3 TEOREMA DE CASTIGLIANO

**Ejercicio 1.18** Determine el desplazamiento vertical en el punto  $D$  ( $\delta v_D$ ) de la viga que se visualiza en la figura 1-18a. Tome en cuenta sólo las deformaciones debidas a la flexión y considere que  $EI$  es constante.

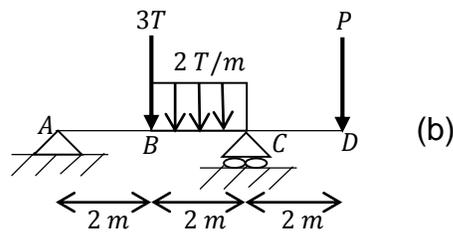


(a)  
**Figura 1-18**

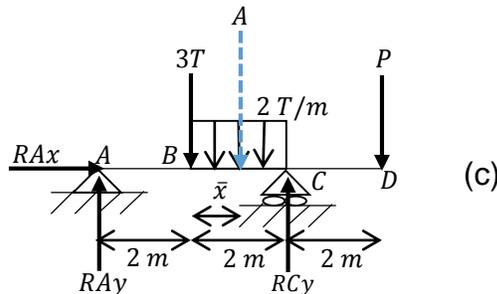
### SOLUCIÓN

#### Fuerza externa $P$

Se coloca una carga  $P$ , cuya magnitud es variable, en el punto y en la dirección donde se requiere conocer el desplazamiento y su sentido se propone arbitrariamente. En este caso, la fuerza  $P$  se aplica verticalmente en el punto  $D$  y se ha supuesto hacia abajo tal y como se muestra en la figura 1-18b, y aunque momentáneamente reemplaza a la fuerza de  $5T$  por encontrarse ubicada en el mismo punto, después será igual a un valor fijo de  $5T$ .



En la figura 1-18c se proporciona un diagrama de cargas de la estructura anterior.



La fuerza resultante de la carga distribuida uniforme es  $A = (2T/m)(2m)$  y su punto de aplicación es  $\bar{x} = (1/2)(2m)$ ; como las fuerzas reactivas  $RAx$ ,  $RAy$  y  $RCy$  son in-

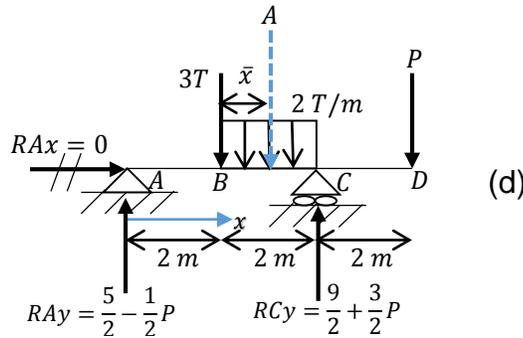
cógnitas, sus sentidos se han supuesto arbitrariamente.

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en una secuencia y al emplear los resultados calculados previamente, se tiene

$$\begin{aligned} \sum \curvearrowright MA = 0 &\Rightarrow 3(2) + (2)(2) \left( 2 + \frac{1}{2}(2) \right) - RCy(4) + P(6) = 0 \\ 6 + 12 - 4RCy + 6P &= 0 \Rightarrow \therefore RCy = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}P \uparrow \\ +\uparrow \sum Fy = 0 &\Rightarrow R Ay - 3 - (2)(2) + \left( \frac{9}{2} + \frac{3}{2}P \right) - P = 0 \Rightarrow \therefore R Ay = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}P \uparrow \\ +\rightarrow \sum Fx = 0 &\Rightarrow \therefore R Ax = 0 \end{aligned}$$

**Momentos internos  $M$**

Los resultados obtenidos se indican esquemáticamente en la figura 1-18d.

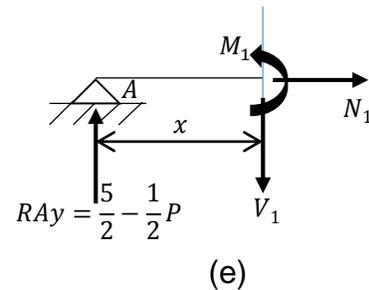


Las funciones de momento, que son discontinuas en los puntos  $B$  y  $C$ , se obtienen al aplicar el método de las secciones; para ello, es necesario cortar a la estructura perpendicularmente a su eje a través de secciones arbitrarias en las regiones  $A - B, B - C$  y  $C - D$ , figuras 1-18e, 1-18f y 1-18g. Se ha definido una sola coordenada  $x$  para toda la viga, por lo que es válida para toda la región  $A - D$  ( $0 \leq x \leq 6m$ ), su origen ha sido asociado en  $A$ , y es positiva hacia la derecha.

Las funciones de momento para cada región y sus correspondientes derivadas parciales con respecto a  $P$  son

$$0 \leq x \leq 2m$$

$$\begin{aligned} \sum \curvearrowright M_{\text{corte}} = 0 \\ -M_1 + \left( \frac{5}{2} - \frac{1}{2}P \right) (x) = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}Px \\ \frac{\partial M_1}{\partial P} = -\frac{1}{2}x \end{aligned}$$



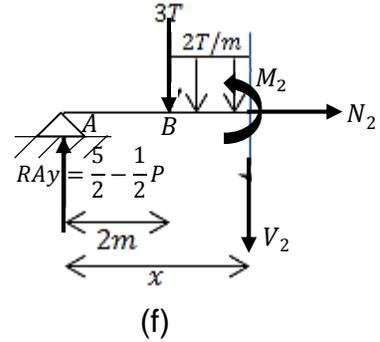
$$2m \leq x \leq 4m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

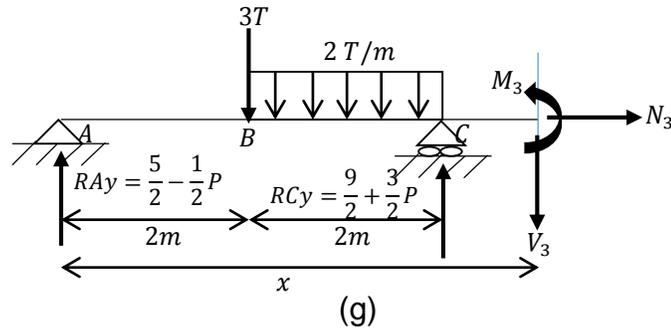
$$-M_2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}P\right)(x) - 3(x-2) - 2(x-2)\left(\frac{(x-2)}{2}\right) = 0$$

$$M_2 = -(x-2)^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}Px + 6$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = -\frac{1}{2}x$$



$$4m \leq x \leq 6m$$



$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_3 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}P\right)(x) - 3(x-2) - 2(2)(x-3) + \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}P\right)(x-4) = 0$$

$$M_3 = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}Px - 3x + 6 - 4x + 12 + \frac{9}{2}x - 18 + \frac{3}{2}Px - 6P$$

$$M_3 = Px - 6P$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial P} = x - 6$$

### Teorema del Castigliano

Hacemos  $P = 5T$  en las ecuaciones de momento, debido a que ese es su valor real. Por consiguiente,

$$M_1 = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}(5)x = 0 \quad 0 \leq x \leq 2m$$

$$M_2 = -(x - 2)^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(5)x + 6 = -x^2 + x + 2 \quad 2m \leq x \leq 4m$$

$$M_3 = 5x - 6(5) = 5x - 30 \quad 4m \leq x \leq 6m$$

La ecuación para conocer el desplazamiento en cualquier punto es

$$\Delta = \frac{\partial u_i}{\partial P_i} = \int_{L_1}^{L_2} M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$$

Al aplicarla, tenemos

$$\begin{aligned} \delta_{VD} &= \frac{1}{EI} \int_0^2 (0) \left( -\frac{1}{2}x \right) dx \\ &+ \frac{1}{EI} \int_2^4 (-x^2 + x + 2) \left( -\frac{1}{2}x \right) dx + \frac{1}{EI} \int_4^6 (5x - 30)(x - 6) dx \end{aligned}$$

Resolviendo integrales por separado se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_2^4 (-x^2 + x + 2) \left( -\frac{1}{2}x \right) dx &= \frac{1}{EI} \int_2^4 \left( \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x \right) dx = \left[ \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_2^4 \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{8}(4^4 - 2^4) - \frac{1}{6}(4^3 - 2^3) - \frac{1}{2}(4^2 - 2^2) \right] = \frac{1}{EI} \left( \frac{44}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_4^6 (5x - 30)(x - 6) dx &= \frac{1}{EI} \int_4^6 (5x^2 - 60x + 180) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{5}{3}x^3 - 30x^2 + 180x \right]_4^6 \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{5}{3}(6^3 - 4^3) - 30(6^2 - 4^2) + 180(6 - 4) \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{40}{3} \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\delta_{VD} = \frac{1}{EI} \left[ 0 + \frac{44}{3} + \frac{40}{3} \right] = \frac{28}{EI}$$

Como la suma resultante de todas las integrales definidas es positiva, el desplazamiento tiene el mismo sentido que el propuesto para la carga  $P$ . Por consiguiente,

$$\delta_{VD} = \frac{28}{EI} \downarrow$$

**Ejercicio 1.19.** Determine la pendiente en el punto  $C$  ( $\theta_C$ ) de la viga en voladizo que se muestra en la figura 1-19a mediante el Teorema del Castigliano; tome en cuenta sólo las deformaciones debidas a la flexión y considere que  $EI$  es constante.

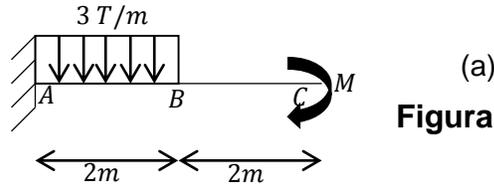
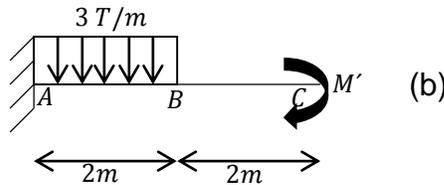


Figura 1-19

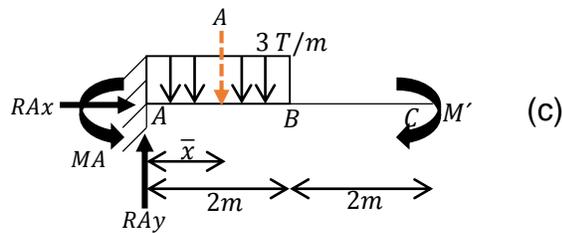
**SOLUCIÓN**

**Momento de par externo  $M'$**

Debido a que se nos pide calcular la pendiente en  $C$ , colocamos un par externo  $M'$  sobre la viga en ese punto, el cual se opta que sea de sentido horario y parcialmente reemplaza al momento puntual  $M$  por estar ubicado en el mismo punto, tal y como se observa en la figura 1-19b. Después  $M'$  será igual al valor fijo de  $M$ .



El diagrama de cargas de la estructura anterior es proporcionado en la figura 1-19c.



La fuerza resultante de la carga distribuida uniforme es  $A = (3T/m)(2m)$  y su punto de aplicación es  $\bar{x} = (1/2)(2m)$ ; como las reacciones  $RAx$ ,  $RAy$  y  $MA$  son incógnitas, sus sentidos se han supuesto arbitrariamente.

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se obtiene

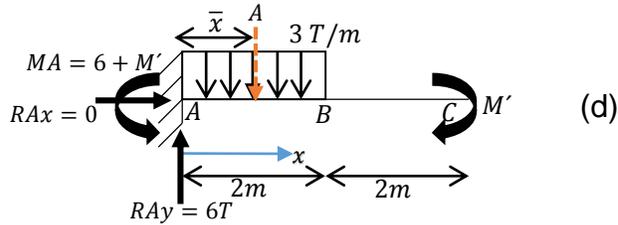
$$\sum \curvearrowright MA = 0 \Rightarrow (3)(2) \left( \frac{1}{2}(2) \right) + M' - M_A = 0 \Rightarrow \therefore M_A = 6 + M' \curvearrowright$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \Rightarrow RAy - (3)(2) = 0 \Rightarrow \therefore RAy = 6T \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow \therefore R_{Ax} = 0$$

**Momentos internos  $M$**

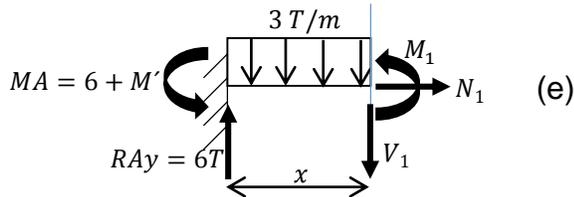
Los resultados obtenidos se muestran en la figura 1-19d.



Debido a que la distribución de la carga presenta una discontinuidad en el punto  $B$ , las funciones de momento no serán iguales en las regiones  $A - B$  y  $B - C$ ; es evidente que la viga debe ser seccionada perpendicularmente a su eje a través de secciones arbitrarias en tales regiones. Se ha definido una sola coordenada  $x$  para toda la viga, por lo que es válida para toda la región  $A - C$  ( $0 \leq x \leq 4m$ ), su origen ha sido asociado en  $A$ , y es positiva hacia la derecha.

Con base en las figuras 1-19e y 1-19f, las funciones de momento para cada región y sus correspondientes derivadas parciales con respecto a  $M'$  son

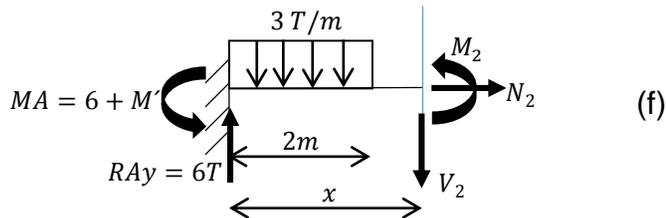
$$0 \leq x \leq 2m$$



$$+\circlearrowleft \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_1 = -(6 + M') + 6(x) - 3(x) \left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M_1 = -6 - M' + 6x - \frac{3}{2}x^2 \quad \frac{\partial M_1}{\partial M'} = -1$$

$$2m \leq x \leq 4m$$



$$\sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -M_2 - (6 + M') + 6(x) - 3(2)(x - 1) = 0$$

$$M_2 = M' \quad \frac{\partial M_2}{\partial M'} = 1$$

### Teorema del Castigliano

Si se establece que  $M' = M$  en las ecuaciones de momento, debido a que ese es su valor real, tenemos que

$$M_1 = -6 - M + 6x - \frac{3}{2}x^2 \quad 0 \leq x \leq 2m$$

$$M_2 = M \quad 2m \leq x \leq 4m$$

La ecuación para conocer la rotación en cualquier punto es

$$\theta = \frac{\partial u_i}{\partial M_i} = \int_{L_1}^{L_2} M \left( \frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI}$$

Al aplicarla se tiene

$$\theta_c = \frac{1}{EI} \int_0^2 \left( -6 - M + 6x - \frac{3}{2}x^2 \right) (-1) dx + \frac{1}{EI} \int_2^4 (M)(1) dx$$

Resolviendo integrales por separado se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^2 \left( -6 - M + 6x - \frac{3}{2}x^2 \right) (-1) dx &= \frac{1}{EI} \int_0^2 \left( 6 + M - 6x + \frac{3}{2}x^2 \right) dx \\ &= \left[ (6 + M)(x) - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right]_0^2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{EI} \left[ (6 + M)(2) - 3(2)^2 + \frac{1}{2}(2)^3 \right] = \frac{1}{EI} (2M + 4)$$

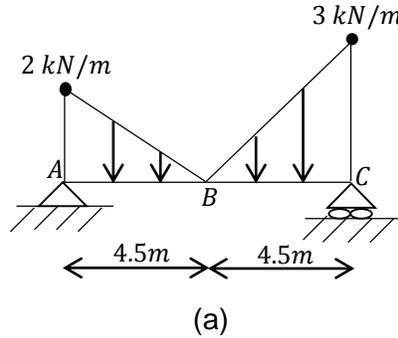
$$\frac{1}{EI} \int_2^4 (M)(1) dx = \frac{1}{EI} \int_2^4 (M) dx = \frac{1}{EI} [M(x)]_2^4 = \frac{1}{EI} [M(4 - 2)] = \frac{1}{EI} (2M)$$

$$\theta = \frac{1}{EI} (2M + 4 + 2M) = \frac{4M + 4}{EI} = 4 \left[ \frac{M + 1}{EI} \right]$$

Como la suma resultante de todas las integrales definidas es positiva, la pendiente tiene el mismo sentido que el propuesto para el momento de par  $M'$ . Así que,

$$\theta_c = 4 \left[ \frac{M + 1}{EI} \right] \curvearrowright$$

**Ejercicio 1.20** Determine la rotación tangencial en el punto  $B$  de la viga que se presenta en la figura 1-20a. Suponga que el material y la sección transversal no cambian a lo largo de la estructura, es decir, que  $E$  e  $I$  son constantes.

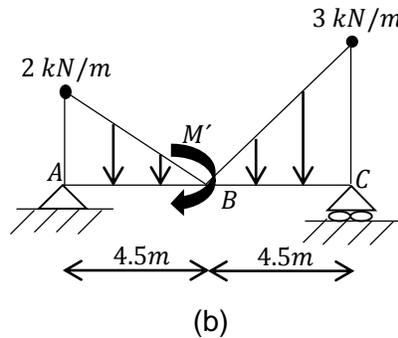


**Figura 1-20**

**SOLUCIÓN**

**Momento de par externo  $M'$**

Se incorpora en la estructura un momento de par ficticio variable  $M'$  en  $B$ , puesto que en ese punto se desea conocer la rotación, justo como se observa en la figura 1-20b.

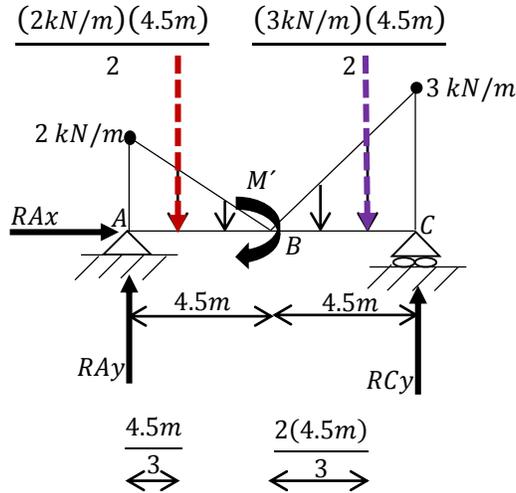


Se determinan las resultantes de las cargas distribuidas con intensidad de variación lineal, además de su ubicación. Después se identifican las reacciones en los soportes. En la figura 1-20c se representa el diagrama de cargas.

Las fuerzas reactivas en los apoyos son resultado de

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow -\frac{2(4.5)}{2} \left( \frac{4.5}{3} \right) - M' - \frac{3(4.5)}{2} \left( 4.5 + \frac{2(4.5)}{3} \right) + RCy(9) = 0 \\ \therefore RCy &= \frac{51}{8} + \frac{M'}{9} \quad \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow RAx = 0 \end{aligned}$$

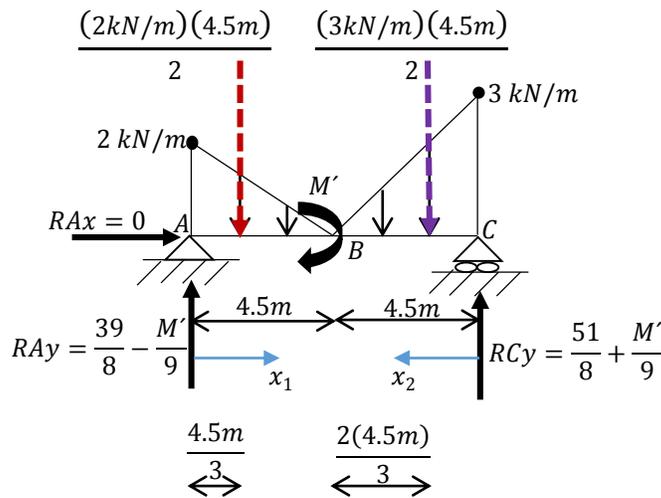
$$+\uparrow \sum Fy = 0 \Rightarrow R_{Ay} - \frac{2(4.5)}{2} - \frac{3(4.5)}{2} + \frac{51}{8} + \frac{M'}{9} = 0 \Rightarrow \therefore R_{Ay} = \frac{39}{8} - \frac{M'}{9} \uparrow$$



(c)

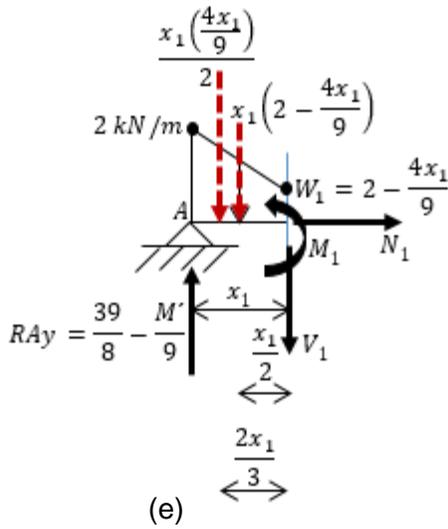
### Momentos internos $M$

Los resultados de visualizan en la figura 1-20d. A partir de las figuras 1-20e y 1-20f, se formulan los momentos internos empleando el método de las secciones y a la vez se calculan sus derivadas parciales; se emplean dos coordenadas  $x$ , las cuales son  $x_1$  y  $x_2$ , cuyos orígenes se asocian en  $A$  y  $C$  y se extienden en las regiones  $A - B$  y  $C - B$  de forma respectiva.



(d)

$$0 \leq x_1 \leq 4.5m$$



La intensidad  $W_1$  en función de  $x_1$  se obtiene de

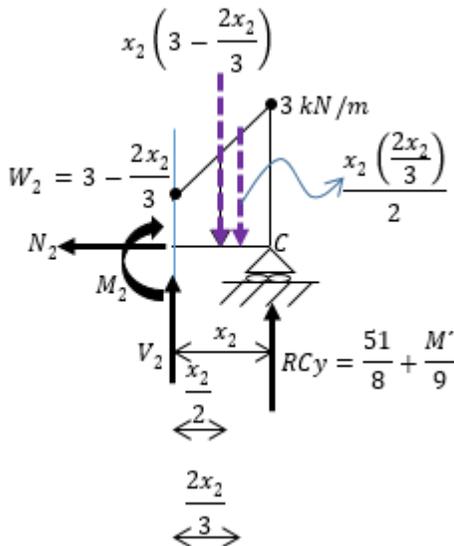
$$\frac{2kN/m}{4.5m} = \frac{W_1}{4.5m - x_1} \Rightarrow W_1 = 2 - \frac{4x_1}{9}$$

Obsérvese como es conviene dividir la carga distribuida trapezoidal en una carga triangular y una carga distribuida uniforme.

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{39}{8} - \frac{M'}{9}\right)(x_1) + \left(\frac{x_1\left(\frac{4x_1}{9}\right)}{2}\right)\left(\frac{2x_1}{3}\right) + x_1\left(2 - \frac{4x_1}{9}\right)\left(\frac{x_1}{2}\right) + M_1 = 0$$

$$M_1 = \frac{39}{8}x_1 - \frac{M'}{9}x_1 - x_1^2 + \frac{2}{27}x_1^3 \quad \frac{\partial M_1}{\partial M'} = -\frac{1}{9}x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 4.5m$$



La intensidad  $W_2$  en función de  $x_2$  se obtiene de

$$\frac{3kN/m}{4.5m} = \frac{W_2}{4.5m - x_2} \Rightarrow W_2 = 3 - \frac{2x_2}{3}$$

$$\left( \sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -M_2 - x_2 \left( 3 - \frac{2x_2}{3} \right) \left( \frac{x_2}{2} \right) - \left( \frac{x_2 \left( \frac{2x_2}{3} \right)}{2} \right) \left( \frac{2x_2}{3} \right) + \left( \frac{51}{8} + \frac{M'}{9} \right) (x_2) = 0 \right.$$

$$M_2 = \frac{51}{8} x_2 + \frac{M'}{9} x_2 - \frac{3}{2} x_2^2 + \frac{1}{9} x_2^3 \quad \frac{\partial M_2}{\partial M'} = \frac{1}{9} x_2$$

### Teorema del Castigliano

Haciendo  $M' = 0$  en las ecuaciones de momento puesto que en la viga real no hay un momento de par aplicado en  $B$  se tiene

$$M_1 = \frac{39}{8} x_1 - \frac{0}{9} x_1 - x_1^2 + \frac{2}{27} x_1^3 = \frac{39}{8} x_1 - x_1^2 + \frac{2}{27} x_1^3 \quad 0 \leq x_1 \leq 4.5m$$

$$M_2 = \frac{51}{8} x_2 + \frac{0}{9} x_2 - \frac{3}{2} x_2^2 + \frac{1}{9} x_2^3 = \frac{51}{8} x_2 - \frac{3}{2} x_2^2 + \frac{1}{9} x_2^3 \quad 0 \leq x_2 \leq 4.5m$$

Aplicando la siguiente expresión matemática

$$\theta = \int_{L_1}^{L_2} M \left( \frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI}$$

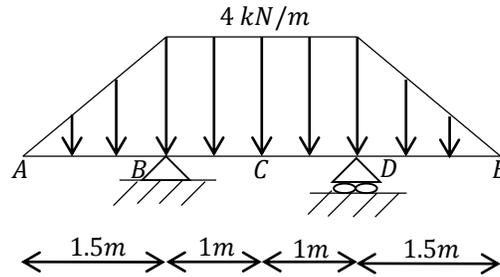
en la viga se obtiene

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{EI} \int_0^{4.5} \left( \frac{39}{8} x_1 - x_1^2 + \frac{2}{27} x_1^3 \right) \left( -\frac{1}{9} x_1 \right) dx \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^{4.5} \left( \frac{51}{8} x_2 - \frac{3}{2} x_2^2 + \frac{1}{9} x_2^3 \right) \left( \frac{1}{9} x_2 \right) dx = \frac{567}{640EI} \end{aligned}$$

Dado que la pendiente resultó positiva, esta tiene un sentido horario al igual que el momento de par ficticio. En consecuencia,

$$\theta_B = \frac{567}{640EI} = \frac{0.8859}{EI} \curvearrowright$$

**Ejercicio 1.21** Calcule la deflexión del punto  $C$  de la viga mostrada en la figura 1-21a. Considere  $EI$  como constante.



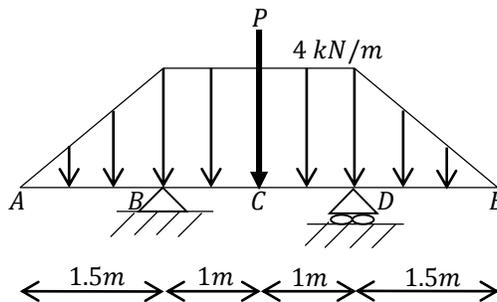
(a)

**Figura 1-21**

### SOLUCIÓN

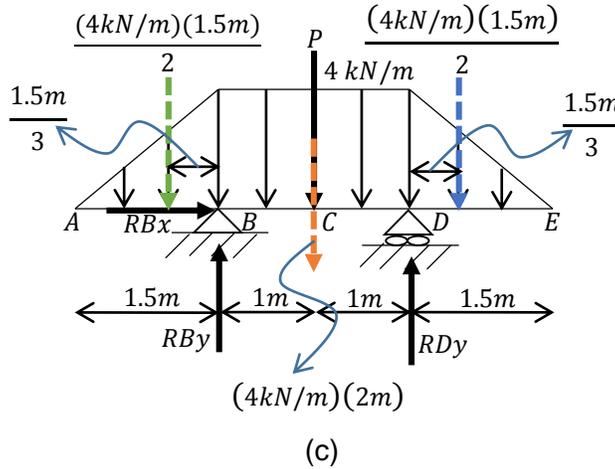
#### Fuerza externa $P$

Aplicamos una carga ficticia vertical  $P$  hacia abajo (puede ir hacia arriba) en el punto  $C$  sobre la viga, figura 1-21b.



(b)

En la figura 1-21c se representa el diagrama de cargas de la estructura anterior. Se divide la carga trapezoidal distribuida en dos cargas triangulares y una carga uniforme. Las resultantes, que son representadas por las áreas, actúan en el centroide de sus respectivas áreas. Luego, el sentido de cada fuerza reactiva es supuesto indistintamente.



Se calculan las reacciones en los soportes por medio de las ecuaciones de equilibrio.

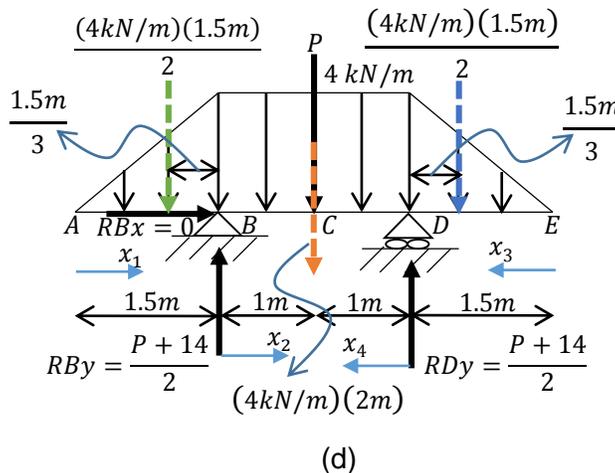
$$\sum \curvearrowright MD = 0 \Rightarrow \frac{4(1.5)}{2} \left( \frac{1.5}{3} + 2 \right) - RBy(2) + P(1) + 4(2)(1) - \frac{4(1.5)}{2} \left( \frac{1.5}{3} \right) = 0$$

$$\therefore RBy = \frac{P + 14}{2} \uparrow \quad + \rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore RBx = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -\frac{4(1.5)}{2} + \frac{P + 14}{2} - P - 4(2) + RDy - \frac{4(1.5)}{2} \Rightarrow \therefore RDy = \frac{P + 14}{2} \uparrow$$

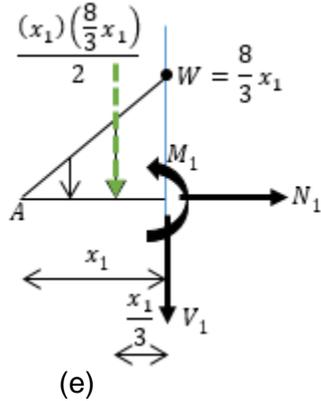
### Momentos internos $M$

Los resultados se muestran en el diagrama correspondiente a la figura 1-21d. Obsérvese que hay discontinuidades de carga en los puntos  $B, C$  y  $D$ . Se distinguen cuatro tramos distintos y se opta por usar una coordenada  $x$  para cubrir cada uno. Las coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  con orígenes en  $A, B, E$  y  $D$ , abarcan las regiones  $A - B, B - C, E - D$  y  $D - C$ , respectivamente.



A partir de los diagramas de cuerpo libre de las figuras 1-21e y 1-21f, determinamos  $M$  y sus derivadas parciales con respecto a  $P$ .

$$0 \leq x_1 \leq 1.5m$$

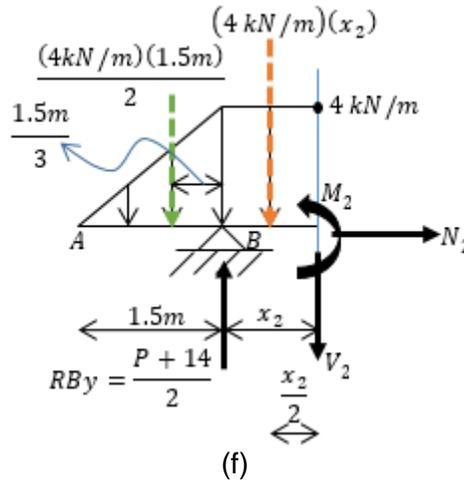


La intensidad  $W$  en función de  $x_1$  es

$$\frac{4kN/m}{1.5} = \frac{W}{x_1} \Rightarrow W = \frac{8}{3}x_1$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow \left( \frac{(x_1) \left( \frac{8}{3}x_1 \right)}{2} \right) \left( \frac{x_1}{3} \right) + M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{4}{9}x_1^2 \quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = 0$$

$$0 \leq x_2 \leq 1m$$



$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow \frac{4(1.5)}{2} \left( \frac{1.5}{3} + x_2 \right) - \left( \frac{P + 14}{2} \right) (x_2) + 4(x_2) \left( \frac{x_2}{2} \right) + M_2 = 0$$

$$M_2 = -2x_2^2 + \frac{P}{2}x_2 + 4x_2 - 1.5 \quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = \frac{x_2}{2}$$

Dada la simetría de la viga, las funciones de momento en los tramos  $E - D$  y  $D - C$  son análogas a las de los tramos  $A - B$  y  $B - C$ . En consecuencia,

$$0 \leq x_3 \leq 1.5m$$

$$M_3 = -\frac{4}{9}x_3^2 \quad \frac{\partial M_3}{\partial P} = 0$$

$$0 \leq x_4 \leq 1m$$

$$M_4 = -2x_4^2 + \frac{P}{2}x_4 + 4x_4 - 1.5 \quad \frac{\partial M_4}{\partial P} = \frac{x_4}{2}$$

### Teorema del Castigliano

Dado que originalmente no había una carga puntual en el punto  $C$  sobre la viga, se establece  $P = 0$  (su valor real). Entonces,

$$M_1 = -\frac{4}{9}x_1^2 \quad 0 \leq x_1 \leq 1.5m$$

$$M_2 = -2x_2^2 + \frac{(0)x_2}{2} + 4x_2 - 1.5 = -2x_2^2 + 4x_2 - 1.5 \quad 0 \leq x_2 \leq 1m$$

$$M_3 = -\frac{4}{9}x_3^2 \quad 0 \leq x_3 \leq 1.5m$$

$$M_4 = -2x_4^2 + 4x_4 - 1.5 \quad 0 \leq x_4 \leq 1m$$

Al aplicar la ecuación

$$\Delta = \int_{L_1}^{L_2} M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$$

resulta

$$\delta_{VC} = \frac{1}{EI} \left( \int_0^{1.5} \left( -\frac{4}{9}x_1^2 \right) (0) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^1 (-2x_2^2 + 4x_2 - 1.5) \left( \frac{x_2}{2} \right) dx_2 \right. \\ \left. \int_0^{1.5} \left( -\frac{4}{9}x_3^2 \right) (0) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^1 (-2x_4^2 + 4x_4 - 1.5) \left( \frac{x_4}{2} \right) dx_4 \right) = \frac{1}{12EI}$$

Debido a que la magnitud del desplazamiento calculado resultó positiva, este también va hacia abajo como  $P$ . Por lo tanto,

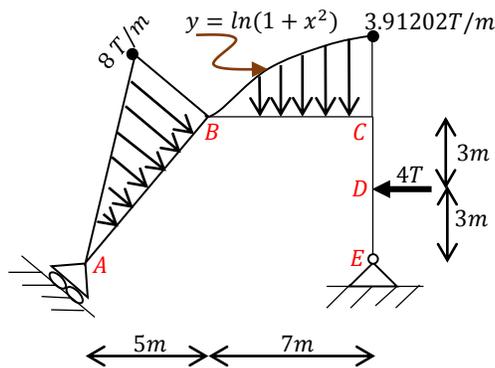
$$\delta_{VC} = \frac{1}{12EI} = \frac{0.08333}{EI} \downarrow$$

## CAPÍTULO 2

### ANÁLISIS DE MARCOS ESTÁTICAMENTE DETERMINADOS

#### 2.1 REACCIONES EN LOS SOPORTES Y FUNCIONES DE LAS FUERZAS CORTANTE Y NORMAL, Y DEL MOMENTO FLECTOR

**Ejercicio 2.1** Determinar las expresiones algebraicas que describen la variación de las acciones internas con el método de las secciones en el marco visualizado en la figura 2-1a. Con referencia a las cargas aplicadas sobre el marco, obsérvese que perpendicularmente al eje del miembro  $A - B$  y sobre su longitud, se encuentra una carga distribuida cuya intensidad varía linealmente desde cero en el apoyo  $A$  hasta  $8T/m$  en el punto  $B$ ; sobre el miembro  $B - C$  se extiende una presión cuya intensidad varía logarítmicamente (específicamente de la forma  $y = \ln(1 + x^2)$ ) desde cero en el punto  $B$  hasta  $3.91202 T/m$  en el punto  $C$ ; la carga de  $4T$  tiene su punto de aplicación justo a la mitad del miembro  $E-C$ . Considere también que el soporte en  $A$  está girado de tal forma que su plano de deslizamiento es perpendicular al miembro  $A - B$ .



(a)

Figura 2-1

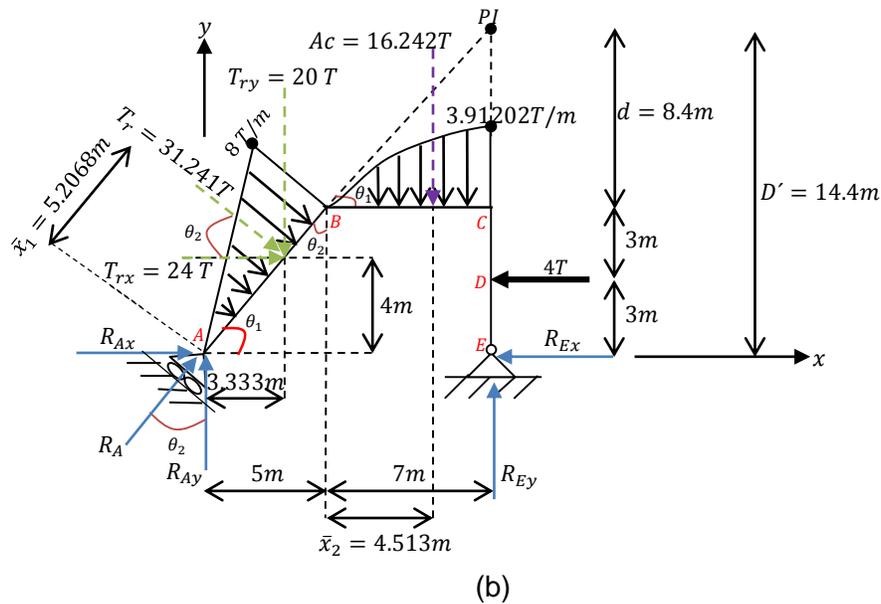
### SOLUCIÓN

#### Verificación del grado de indeterminación

El marco es isostático ya que se cumple la condición  $r + 3m = 3n + c$ , puesto que:  $m = 3$  porque la estructura tiene tres miembros ( $A - B$ ;  $B - C$ ;  $E - C$ ),  $r = 3$  debido a que en el soporte  $A$ , por ser un rodillo, se genera una fuerza reactiva perpendicular a su plano de deslizamiento, mientras que el soporte  $D$  por ser articulado tiene dos incógnitas de reacción (una horizontal y una vertical),  $n = 4$  ya que hay cuatro nodos ( $A$ ;  $B$ ;  $C$ ;  $E$ ), y  $c = 0$  por no haber condiciones impuestas por la construcción.

### Cálculo de las reacciones en los soportes

**Diagrama de cargas.** Es mostrado en la figura 2-1b. Se han definido en sus cuadrantes positivos a los ejes  $x$  y  $y$  más convenientes para aplicar las ecuaciones de equilibrio en la estructura; en esta ocasión, las columnas son prolongadas hasta su punto de intersección  $PI$  (más adelante se explicará la razón). Para la carga triangular y la carga con intensidad descrita por la función logarítmica, deben calcularse su área bajo la curva, respectivamente, además del centroide de sus áreas correspondientes. Por otra parte, se identifica cada fuerza reactiva en los soportes suponiendo su sentido arbitrariamente. Es necesario descomponer a la carga concentrada equivalente  $T_r$  y a la reacción  $R_A$ , individualmente, en sus componentes rectangulares horizontal y vertical.



De la figura 2-1b, por trigonometría se deduce que

$$\frac{D'}{12} = \frac{6}{5} \Rightarrow D' = \frac{6(12)}{5} = 14.4m; d = 14.4m - 6m = 8.4m$$

La longitud del miembro inclinado es  $L_{A-B} = \sqrt{(5m)^2 + (6m)^2} = \sqrt{61}m = 7.8102m$

$$\sin \theta_2 = \frac{5}{\sqrt{61}} \quad \cos \theta_2 = \frac{6}{\sqrt{61}} \quad \tan \theta_2 = \frac{5}{6}$$

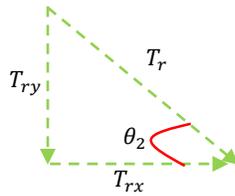
A continuación se efectúa un análisis de las cargas distribuidas. Para la carga triangular se tiene que la carga concentrada equivalente es

$$T_r = \frac{(7.8102m)(8T/m)}{2} = 31.241T$$

y su punto de aplicación de tal resultante se localiza a una distancia de

$$\bar{x}_1 = \frac{2}{3}(7.8102m) = 5.2068m$$

Las componentes rectangulares horizontal y vertical de  $T_r$ , figura 2-1c, son



(c)

$$T_{ry} = T_r(\sin \theta_2) = 31.241T \left( \frac{5}{\sqrt{61}} \right) = 20T$$

$$T_{rx} = T_r(\cos \theta_2) = 31.241T \left( \frac{6}{\sqrt{61}} \right) = 24T$$

El área bajo la curva de la carga cuya intensidad es descrita por la función logarítmica se determina con la siguiente ecuación:

$$Ac = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} ydx = \int_0^7 \ln(1 + x^2)dx$$

Resolviendo la integral de manera indefinida se tiene

$$\int \ln(1 + x^2)dx$$

Sea

$$u = \ln(1 + x^2) \quad dv = dx$$

Entonces

$$du = \frac{2x}{1 + x^2} dx \quad v = x$$

Al integrar por partes tendremos

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \ln(1 + x^2)dx = x \ln(x^2 + 1) - \int \left( \frac{2x(x)}{1 + x^2} \right) dx = x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx$$

La integral que obtuvimos,  $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ , es más sencilla que la original pero todavía no es obvia, así que efectuamos lo siguiente para resolverla:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int x^2(1+x^2)^{-1} dx$$

Esta última integral es del tipo:

$$\int (x^m)(a+bx+cx^2)^n dx = \frac{x^{m-1}(a+bx+cx^2)^{n+1}}{c(2n+m+1)} - \frac{b(n+m)}{c(2n+m+1)}$$

$$* \int x^{m-1}(a+bx+cx^2)^n dx - \frac{a(m-1)}{c(2n+m+1)} \int x^{m-2}(a+bx+cx^2)^n dx$$

En este caso,  $m = 2$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  y  $n = -1$ .

Sustituyendo y simplificando se tiene

$$\int (x^2)(1+x^2)^{-1} dx = \frac{x^{2-1}(1+x^2)^{-1+1}}{1(2(-1)+2+1)} - \frac{(0)(-1+2)}{1(2(-1)+2+1)} \int x^{2-1}(1+x^2)^{-1} dx$$

$$- \frac{1(2-1)}{1(2(-1)+2+1)} \int x^{2-2}(1+x^2)^{-1} dx = x - \int \frac{dx}{1+x^2}$$

La integral obtenida,  $\int \frac{dx}{1+x^2}$ , ya es de solución obvia, pues directamente se sabe que

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tan}(x)$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int x^2(1+x^2)^{-1} dx = x - \text{arc tan}(x)$$

En consecuencia,

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) + 2(\text{arc tan}(x) - x)$$

Finalmente, la carga concentrada equivalente es

$$Ac = \int_0^7 \ln(1+x^2) dx = [x \ln(1+x^2) + 2(\text{arc tan}(x) - x)]_0^7 \approx 16.242T$$

El centroide del área se determina con la siguiente expresión matemática:

$$\bar{x}_2 = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx} = \frac{\int_0^7 x(\ln(1+x^2))dx}{\int_0^7 (\ln(1+x^2))dx}$$

El denominador ya fue resuelto.

Resolviendo el numerador tenemos

$$\int_0^7 x(\ln(1+x^2))dx$$

La integral en forma indefinida es

$$\int x(\ln(1+x^2))dx$$

Sea  $z = 1 + x^2$ . Entonces  $dz = 2xdx$ , y por tanto  $xdx = \frac{1}{2}dz$ . Así, la regla de sustitución da

$$\int x(\ln(1+x^2))dx = \frac{1}{2} \int \ln(z)dz$$

La integral que obtuvimos,  $\int \ln(z)dz$ , es más sencilla que la original pero todavía no es obvia, así que aplicamos la regla del producto para derivación para resolverla.

Sea

$$u = \ln(z) \quad dv = dz$$

Entonces

$$du = \frac{1}{z}dz \quad v = z$$

Al integrar por partes tendremos  $\int u dv = uv - \int v du$ , es decir,

$$\int \ln(z)dz = (\ln(z))(z) - \int z\left(\frac{1}{z}dz\right) = z\ln(z) - \int dz = z\ln(z) - z = z[\ln(z) - 1]$$

Por lo tanto,

$$\int x(\ln(1+x^2))dx = \frac{1}{2}z[\ln(z) - 1]$$

Sustituyendo  $z = 1 + x^2$  en la ecuación anterior se obtiene

$$\int x(\ln(1+x^2))dx = \frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2) - 1]$$

Así, tenemos

$$\int_0^7 x(\ln(1+x^2))dx = \left[ \frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2) - 1] \right]_0^7 = 73.3006$$

Finalmente, la línea de acción de la resultante está localizada a una distancia de

$$\bar{x}_2 = \frac{73.3006}{16.242} = 4.513m$$

**Ecuaciones de equilibrio.** La aplicación de las ecuaciones de equilibrio en la siguiente secuencia permite una solución directa para cada una de las incógnitas. Si la solución de tales ecuaciones proporciona una magnitud negativa para una reacción desconocida, esto indica que el sentido de la reacción es opuesto al que se supuso en el diagrama de cargas.

El haber prolongado las columnas hasta su punto de intersección  $PI$ , nos permite calcular directamente el valor de  $R_{Dx}$  si lo despejamos al tomar momentos alrededor de  $PI$ , ya que las reacciones  $R_A$  y  $R_{Dy}$ , al pasar por este punto, no producen momento. En consecuencia, los momentos de  $R_{Ax}$  y  $R_{Ay}$  con respecto a  $PI$  se anulan entre sí, ya que son las componentes rectangulares de  $R_A$  y por ello no se consideraran en la siguiente ecuación:

$$\sum \curvearrowright MPI = 0$$

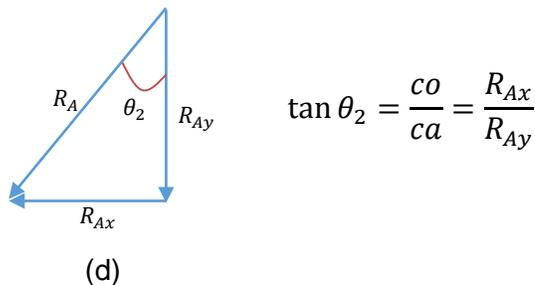
$$R_{Dx}(14.4) + 4(11.4) - 16.242(7 - 4.513) - 20(12 - 3.3333) - 24(14.4 - 4) = 0$$

$$R_{Dx} = \frac{417.7279}{14.4} \Rightarrow \therefore R_{Dx} = 29.0089T \leftarrow$$

De la sumatoria de fuerzas en la dirección  $x$  igual a cero es posible calcular  $R_{Ax}$ .

$$\begin{aligned} +\rightarrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_{Ax} + T_{rx} - 4 - R_{Dx} = 0 \Rightarrow R_{Ax} + 24 - 4 - 29.0089 = 0 \\ \therefore R_{Ax} &= 9.0089T \rightarrow \end{aligned}$$

Los valores de  $R_{Ay}$  y  $R_A$  se determinan a partir de la figura 2-1d.



$$\frac{R_{Ax}}{R_{Ay}} = \frac{5}{6} \Rightarrow R_{Ay} = \frac{6}{5} R_{Ax} = \frac{6}{5} (9.0089T) = 10.8107T \downarrow$$

Las resultante  $R_A$  es

$$R_A = \sqrt{(R_{Ax})^2 + (R_{Ay})^2} = \sqrt{(9.0089T)^2 + (10.8107T)^2} = 14.0724 T$$

La reacción faltante se puede conocer al plantear que la suma de fuerzas en  $y$  es nula.

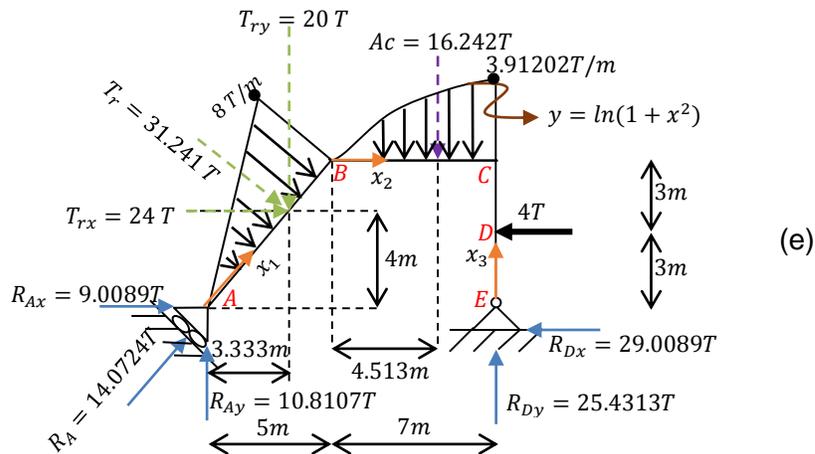
$$+\uparrow \sum Fy = 0 \Rightarrow 10.8107 - 20 - 16.242 + R_{Dy} = 0 \Rightarrow \therefore R_{Dy} = 25.4313 T$$

Como comprobación, la suma de momentos con respecto al punto  $A$  para todo el marco debe ser igual a cero.

$$\curvearrowright \sum MA = 24(4) + 20(3.3333) + 16.242(9.513) - 4(3) - 25.4313(12) \approx 0 \text{ ok}$$

### Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 2-1e.



Ya que se han calculado las fuerzas reactivas en los soportes, se deducen ecuaciones que describan la variación de las acciones internas aplicando el método de secciones.

La función de la fuerza cortante será discontinua en los puntos donde el tipo o la magnitud de la carga distribuida cambia, o bien donde se apliquen fuerzas concentradas. La función del momento interno, será discontinua, además de lo anterior, en los puntos donde se apliquen momentos de par. En ambos casos, la carga distribuida y la fuerza concentrada, o una de sus componentes, actúan perpendicularmente al eje del miembro de su ubicación. Por su parte, la función de la fuerza axial será discontinua en los puntos donde se aplique una carga puntual o

donde el tipo o la magnitud de la carga distribuida cambia, pero ahora todas estas cargas, o una de sus componentes, actúan en la dirección del eje del miembro donde se ubican. Un cambio en la geometría de la estructura también puede provocar una variación en las funciones de las acciones internas. De acuerdo a lo anterior, podemos distinguir cuatro tramos distintos en la estructura:  $A - B$ ,  $B - C$ ,  $E - D$  y  $D - C$ . Las funciones de las acciones internas deben determinarse para cada uno de esos tramos, lo cual implica cortar a la estructura a través de secciones arbitrarias ubicadas en ellos.

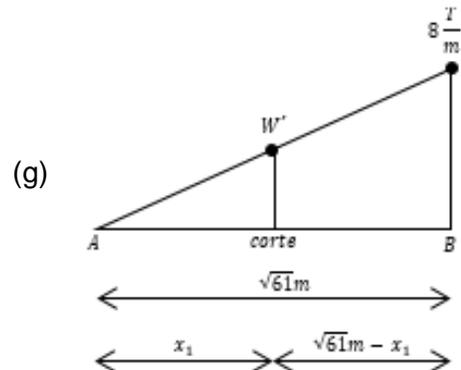
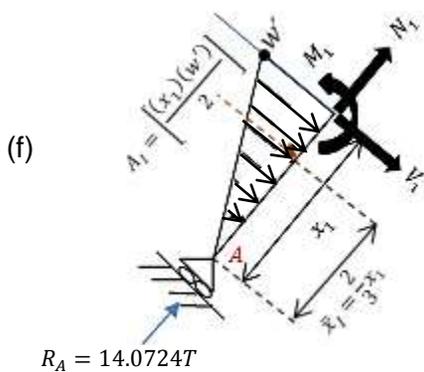
En el último esquema se han especificado las coordenadas  $x$  por separado y sus orígenes asociados. Las coordenadas  $x_1, x_2$  y  $x_3$  que tienen sus orígenes en  $A, B$  y  $E$ , son válidas sólo dentro de las regiones desde  $A$  hasta  $B$  para  $x_1$ , de  $B$  a  $C$  para  $x_2$ , y de  $E$  a  $C$  para  $x_3$ . La punta de la flechita indica el sentido positivo de la coordenada, por tanto,  $x_1$  es positiva hacia arriba y a la derecha,  $x_2$  es positiva hacia la derecha y  $x_3$  es positiva hacia arriba. En cada diagrama de cuerpo libre para un segmento de la estructura, los elementos mecánicos aparecen actuando en sus direcciones positivas y sus expresiones algebraicas se deducen aplicando las ecuaciones de equilibrio.

MIEMBRO  $A - B$ .

Sobre este miembro se extiende únicamente una carga triangular; al no haber discontinuidad de carga, se requiere efectuar un sólo corte perpendicular al eje del miembro.

Corte en el tramo  $A - B$ . Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $A - B$ ) a una distancia  $x_1$  de  $A$ ; en la figura 2-1f se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de estructura con longitud  $x_1$ , en el que se observan la fuerza resultante  $A_1$  de la carga triangular seccionada, así como su punto de aplicación  $\bar{x}_1$ , para definir a los elementos mecánicos. En la figura 2-1g se muestra un esquema para determinar por trigonometría el valor en función de  $x_1$  de la intensidad  $W'$ .

$$0 \leq x_1 \leq \sqrt{61}m$$



$$\frac{8T/m}{\sqrt{61}m} = \frac{w'}{x_1} \Rightarrow w' = 1.0243 x_1$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 - \left[ \frac{(x_1)(1.0243x_1)}{2} \right] \left( \frac{1}{3} x_1 \right) = 0 \Rightarrow M_1 = -0.170716 x_1^3$$

$$\text{en } x_1 = \sqrt{61}m, M_1 = -81.3333 T \cdot m$$

$$\sum FX = 0 \Rightarrow \frac{(x_1)(1.0243x_1)}{2} + V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = -0.512148x_1^2$$

$$\text{o también } V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = -0.512148x_1^2$$

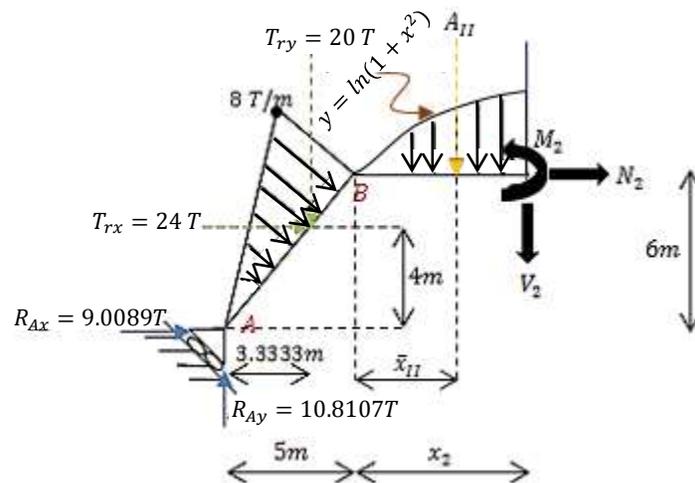
$$\sum FY = 0 \Rightarrow N_1 + 14.0724 = 0 \Rightarrow N_1 = -14.0724$$

MIEMBRO B – C.

La distribución de la carga que se extiende sobre este miembro no presenta discontinuidad, así que sólo es necesario realizar un corte perpendicular al eje del miembro.

Corte en el tramo B – C. En la figura 1-2h se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción izquierda de la estructura que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo B – C. El equilibrio estático del cuerpo libre implica que

$$0 \leq x_2 \leq 7m$$



(h)

Previo a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, deben calcularse el área y su centroide de la presión del corte cuya intensidad es descrita por la función logarítmica.

$$A_{II} = \int_0^{x_2} \ln(1+x^2) dx = x_2 \cdot \ln(x_2^2 + 1) + 2[\tan^{-1}(x_2) - x_2]$$

$$\bar{x}_{II} = \frac{\int_0^{x_2} x(\ln(1+x^2)) dx}{\int_0^{x_2} \ln(1+x^2) dx} = \frac{\frac{(x_2^2 + 1) \cdot \ln(x_2^2 + 1)}{2} - \frac{x_2^2}{2}}{x_2 \cdot \ln(x_2^2 + 1) + 2[\tan^{-1}(x_2) - x_2]}$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_2 + 10.8107(5 + x_2) - 9.0089(6) - 24(2) - 20(1.6667 + x_2)$$

$$- [x_2 \cdot \ln(x_2^2 + 1) + 2[\tan^{-1}(x_2) - x_2]] \left[ x_2 - \frac{\frac{(x_2^2 + 1) \cdot \ln(x_2^2 + 1)}{2} - \frac{x_2^2}{2}}{x_2 \cdot \ln(x_2^2 + 1) + 2[\tan^{-1}(x_2) - x_2]} \right] = 0$$

$$M_2 = \frac{-x_2^2 \cdot \ln(x_2^2 + 1)}{2} + \frac{\ln(x_2^2 + 1)}{2} - 2x \cdot \tan^{-1}(x_2) + \frac{3}{2}x_2^2 - 9.1893x_2 - 81.3339$$

$$\text{en } x_2 = 0, M_2 = -81.3339T.m; \text{ en } x_2 = 7m, M_2 = -186.052T.m$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 10.8107 - 20 - \{x_2 \cdot \ln(x_2^2 + 1) + 2[\tan^{-1}(x_2) - x_2]\} - V_2 = 0$$

$$V_2 = -x_2^2 \cdot \ln(x_2^2 + 1) - 2 \tan^{-1}(x_2) + 2x_2 - 9.1893$$

$$\text{o también } V_2 = \frac{dM_2}{dx_2} = -x_2^2 \cdot \ln(x_2^2 + 1) - 2 \tan^{-1}(x_2) + 2x_2 - 9.1893$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 9.0089 + 24 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -33.0089$$

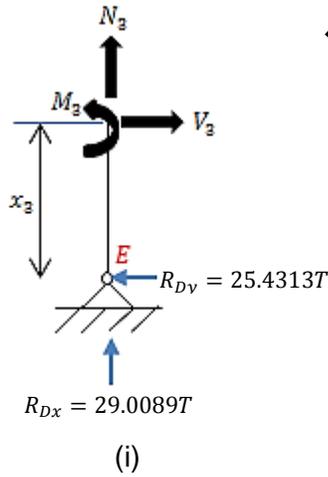
Miembro  $E - C$ .

En este miembro se distinguen dos tramos, el  $E - D$  y el  $D - C$ , debido a que la carga puntual de  $4T$  aplicada en  $D$  provocará que las funciones de la fuerza cortante y del momento sean discontinuas en ese punto; por tanto, se tienen que hacer dos cortes perpendiculares al eje del miembro  $E - C$ , específicamente uno en cada tramo y ambos considerando como origen del sistema coordenado al punto  $E$ .

Corte en el tramo  $E - D$ . Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $E - D$ ) a una distancia  $x_3$  de  $E$ ; en la figura 1-2i se ofrece el diagrama

de cuerpo libre que representa la porción de la estructura ubicada por debajo del corte, las acciones internas entre los puntos  $E$  y  $D$  se definen como

$$0 \leq x_3 \leq 3m$$



$$\sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -M_3 + 29.0089(x_3) = 0 \Rightarrow M_3 = 29.0089x_3$$

$$\text{en } x_3 = 3, M_3 = 87.0267$$

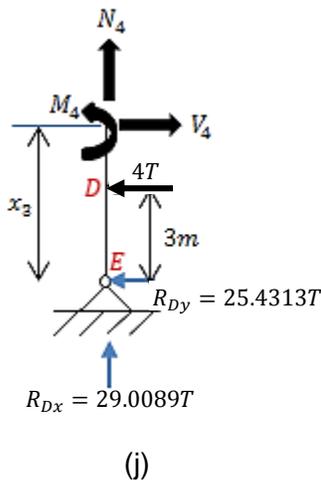
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow V_3 - 29.0089 = 0 \Rightarrow V_3 = 29.0089$$

$$\text{o también } V_3 = \frac{dM_3}{dx_3} = 29.0089$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow N_3 + 25.4313 = 0 \Rightarrow N_3 = -25.4313$$

Corte en el tramo  $D - C$ . Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $D - C$ ) a una distancia  $x_3$  de  $E$ ; el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento inferior de la estructura, figura 2-1j, y su análisis son

$$3m \leq x_3 \leq 6m$$



$$\sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -M_4 + 29.0089(x_3) + 4(x_3 - 3) = 0$$

$$M_4 = 33.0089x_3 - 12$$

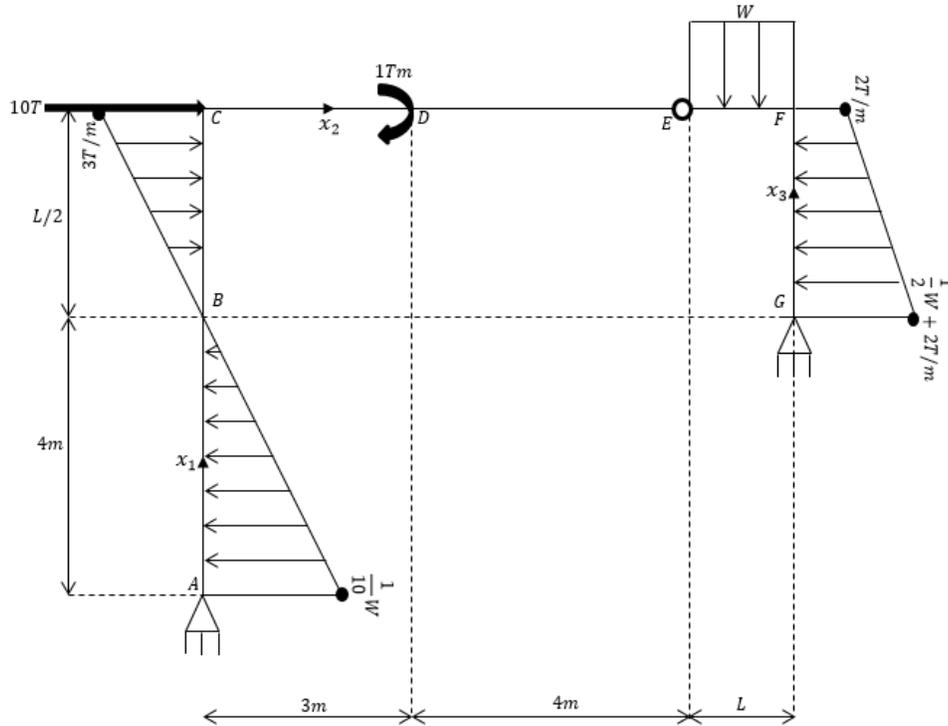
$$\text{en } x_3 = 0, M_4 = 87.0267; \text{ en } x_3 = 6, M_4 = 186.053$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow V_4 - 4 - 29.0089 = 0 \Rightarrow V_4 = 33.0089$$

$$\text{o también } V_4 = \frac{dM_4}{dx_3} = 33.0089$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow N_4 + 25.4313 = 0 \Rightarrow N_4 = -25.4313$$

**Ejercicio 2.2** Calcule las reacciones en los soportes del siguiente marco triarticulado de la figura 2-2a. Deduzca las funciones de las fuerzas cortante y normal, y del momento flector para los tres miembros utilizando las coordenadas  $x$  mostradas.



(a)  
Figura 2-2

## SOLUCIÓN

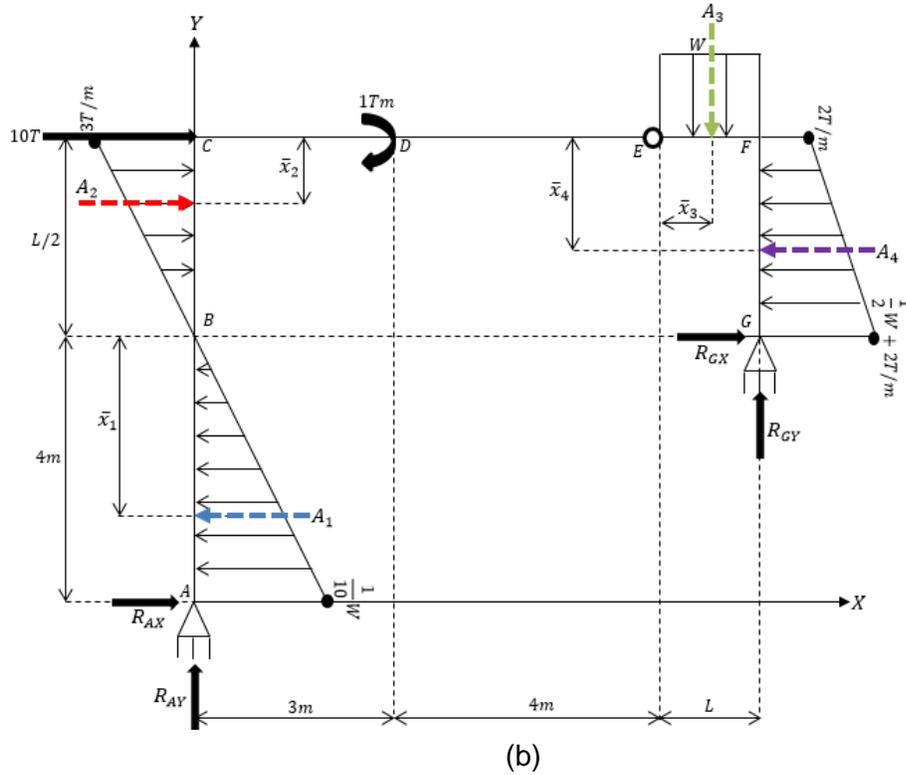
### Verificación del grado de indeterminación

El marco es isostático ya que se cumple la condición  $r + 3m = 3n + c$ , puesto que:  $m$  vale tres porque la estructura tiene tres miembros ( $A - C; C - F; G - F$ ),  $r = 4$  debido a que en cada apoyo articulado hay dos incógnitas de reacción (una horizontal y una vertical),  $n = 4$  ya que hay cuatro nodos ( $A; C; F; G$ ), y  $c$  vale uno por haber una ecuación de condición, la que indica que para el punto  $E$ , al situarse una articulación, el momento flexionante es nulo.

### Cálculo de las reacciones en los soportes

**Diagrama de cargas.** Es mostrado en la figura 2-2b. Se han establecido los ejes coordenados  $X$  y  $Y$  más convenientes para aplicar las ecuaciones de equilibrio en la estructura. Para cada carga distribuida deben calcularse su área bajo la curva, es

decir, la carga concentrada equivalente (fuerza resultante) y su correspondiente centroide de área (punto de aplicación). Por otra parte, se identifican las fuerzas reactivas en los soportes suponiendo sus respectivos sentidos arbitrariamente.



Se calculan de las cargas concentradas equivalentes de las cargas distribuidas, además de su punto de aplicación.

- Carga triangular del tramo  $A - B$ .

$$A_1 = \frac{(4) \left( \frac{1}{10} W \right)}{2} = \frac{1}{5} W; \bar{x}_1 = \frac{2}{3} (4m) = \frac{8}{3} m$$

- Carga triangular del tramo  $B - C$ .

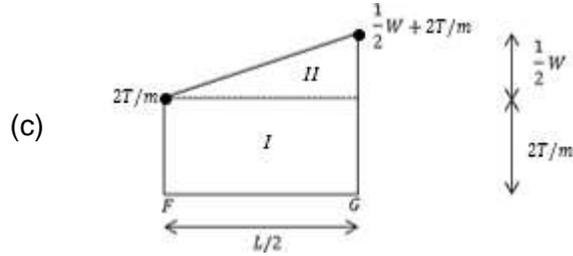
$$A_2 = \frac{\left( \frac{L}{2} \right) (3)}{2} = \frac{3}{4} L; \bar{x}_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{6} L$$

- Carga uniformemente repartida.

$$A_3 = WL; \bar{x}_2 = \frac{L}{2}$$

- Carga trapezoidal distribuida.

Rotamos la presión para mayor facilidad, figura 2-2c, y conviene dividirla en dos cargas más sencillas, justo como se muestra en la figura.



$$A_I = \left(\frac{L}{2}\right)(2) = L$$

$$A_{II} = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}W\right)}{2} = \frac{1}{8}WL$$

$$\bar{x}_I = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{4}$$

$$\bar{x}_{II} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{3}$$

$$\bar{x}_I A_I = \left(\frac{L}{4}\right)(L) = \frac{1}{4}L^2$$

$$\bar{x}_{II} A_{II} = \left(\frac{L}{3}\right)\left(\frac{1}{8}WL\right) = \frac{1}{24}WL^2$$

Los resultados obtenidos pueden visualizarse en la tabla 2-1.

| Componente     | A                   | $\bar{x}$     | $\bar{x}A$                          |
|----------------|---------------------|---------------|-------------------------------------|
| I = rectángulo | L                   | $\frac{L}{4}$ | $\frac{1}{4}L^2$                    |
| II = triángulo | $\frac{1}{8}WL$     | $\frac{L}{3}$ | $\frac{1}{24}WL^2$                  |
| $\Sigma =$     | $L + \frac{1}{8}WL$ |               | $\frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{24}WL^2$ |

Tabla 2-1

$$\therefore A_4 = \sum A = L + \frac{1}{8}WL$$

$$\therefore \bar{x}_4 = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{\frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{24}WL^2}{L + \frac{1}{8}WL}$$

**Ecuaciones de equilibrio.** Se aplican al diagrama de cargas para obtener los valores de las reacciones en los apoyos.

Planteamos una ecuación de condición tomando momentos con respecto a  $E$  sólo para la parte izquierda del marco.

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum ME_{izq} = 0 &\Rightarrow -R_{AX} \left(4 + \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{1}{5}W\right) \left(\frac{L}{2} + \frac{8}{3}\right) + R_{AY}(7) - \left(\frac{3}{4}L\right) \left(\frac{1}{6}L\right) + 1 = 0 \\ -R_{AX} \left(4 + \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{1}{5}W\right) \left(\frac{L}{2} + \frac{8}{3}\right) + R_{AY}(7) - \left(\frac{3}{4}L\right) \left(\frac{1}{6}L\right) + 1 &= 0 \\ -R_{AX} \left(4 + \frac{L}{2}\right) + \frac{1}{10}WL + \frac{8}{15}W + 7R_{AY} - \frac{1}{8}L^2 + 1 &= 0 \\ 7R_{AY} - \left(4 + \frac{L}{2}\right)R_{AX} = \frac{1}{8}L^2 - \frac{1}{10}WL - \frac{8}{15}W - 1 & \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

Tomando momentos alrededor de  $E$  sólo para la parte derecha del marco tenemos

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum ME_{der} = 0 &\Rightarrow (WL) \left(\frac{L}{2}\right) + \left(L + \frac{1}{8}WL\right) \left(\frac{\frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2}{L + \frac{1}{8}WL}\right) - R_{GX} \left(\frac{L}{2}\right) - R_{GY}(L) = 0 \\ \frac{1}{2}WL^2 + \frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2 - R_{GX} \left(\frac{L}{2}\right) - R_{GY}(L) = 0 &\Rightarrow -L \left(\frac{1}{2}R_{GX} + R_{GY}\right) = L \left(-\frac{13}{24}WL - \frac{L}{4}\right) \\ \frac{1}{2}R_{GX} + R_{GY} = \frac{13}{24}WL + \frac{L}{4} & \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

De la sumatoria de fuerzas en la dirección  $X$  igual a cero es posible obtener una relación entre las reacciones  $R_{GX}$  y  $R_{AX}$ .

$$\begin{aligned} +\rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{5}W + \frac{3}{4}L + 10 - \left(L + \frac{1}{8}WL\right) + R_{GX} + R_{AX} = 0 \\ R_{GX} + R_{AX} = \frac{1}{8}WL + \frac{1}{5}W - 10 + \frac{1}{4}L & \quad \text{--- (3)} \end{aligned}$$

La ecuación de equilibrio restante permite obtener una relación entre las reacciones  $R_{AY}$  y  $R_{GY}$ .

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - WL + R_{GY} = 0 \Rightarrow R_{AY} + R_{GY} = WL \quad \text{--- (4)}$$

Resolvemos el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas usando el método de sustitución e igualación.

Despejando  $R_{GX}$  de (2) y (3) respectivamente, se tiene

$$R_{GX} = \frac{13}{12}WL + \frac{L}{2} - 2R_{GY} \quad \text{--- (5)}$$

$$R_{GX} = \frac{1}{8}WL + \frac{1}{5}W - 10 + \frac{1}{4}L - R_{AX} \quad \text{--- (6)}$$

Igualando (5) con (6) da

$$\frac{13}{12}WL + \frac{L}{2} - 2R_{GY} = \frac{1}{8}WL + \frac{1}{5}W - 10 + \frac{1}{4}L - R_{AX} \quad \text{--- (7)}$$

Despejando  $R_{GY}$  de (7) tenemos

$$R_{GY} = \frac{23}{48}WL - \frac{1}{10}W + 5 + \frac{1}{8}L + \frac{1}{2}R_{AX} \quad \text{--- (8)}$$

La sustitución de (8) en (4) conlleva a

$$R_{AY} + \frac{23}{48}WL - \frac{1}{10}W + 5 + \frac{1}{8}L + \frac{1}{2}R_{AX} = WL \quad \text{--- (9)}$$

Despejando  $R_{AY}$  de (9) se tiene

$$R_{AY} = \frac{1}{56}L^2 - \frac{1}{70}WL - \frac{8}{105}W - \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7} + \frac{L}{14}\right)R_{AX} \quad \text{--- (10)}$$

El valor de  $R_{AX}$  se obtiene al sustituir (10) en (9).

$$\frac{1}{56}L^2 - \frac{1}{70}WL - \frac{8}{105}W - \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7} + \frac{L}{14}\right)R_{AX} + \frac{23}{48}WL - \frac{1}{10}W + 5 + \frac{1}{8}L + \frac{1}{2}R_{AX} - WL = 0$$

$$R_{AX} \left(\frac{15}{14} + \frac{L}{14}\right) = -\frac{1}{56}L^2 + \frac{899}{1680}WL + \frac{37}{210}W - \frac{34}{7} - \frac{1}{8}L$$

$$R_{AX} = \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \quad \text{--- (11)}$$

Es posible determinar el valor de  $R_{AY}$  si sustituimos (11) en (10).

$$R_{AY} = \frac{1}{56}L^2 - \frac{1}{70}WL - \frac{8}{105}W - \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7} + \frac{L}{14}\right) \left(\frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)}\right)$$

$$R_{AY} = \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \quad \text{--- (12)}$$

Despejando  $R_{GY}$  de (4) se tiene

$$R_{GY} = WL - R_{AY} \quad \text{--- (13)}$$

El valor de  $R_{GY}$  se calcula sustituyendo (12) en (13).

$$R_{GY} = WL - \left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right)$$

$$R_{GY} = -\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48} \uparrow \quad \text{--- (14)}$$

Despejando  $R_{GX}$  de (2) da

$$R_{GX} = \frac{13}{12}WL + \frac{1}{2}L - 2R_{GY} \quad \text{--- (15)}$$

Para conocer el valor de  $R_{GX}$  sustituimos (14) en (15).

$$R_{GX} = \frac{13}{12}WL + \frac{1}{2}L - 2 \left( -\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48} \right)$$

$$R_{GX} = \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} + L \left( \frac{W}{8} + \frac{1}{2} \right) - \frac{175W + 288}{24} \rightarrow \quad \text{--- (16)}$$

Como comprobación de los resultados, debe cumplirse que la suma de momentos con respecto al punto A para todo el marco es nula.

$$\sum MA =$$

$$- \left[ \frac{4 \left( \frac{1}{10}W \right)}{2} \right] \left( \frac{1}{3}(4) \right) + \left[ \frac{\left( \frac{L}{2} \right)(3)}{2} \right] \left( 4 + \frac{2}{3} \left( \frac{L}{2} \right) \right) + 10 \left( \frac{L}{2} + 4 \right) + 1 + (W)(L) \left( 7 + \frac{L}{2} \right) -$$

$$\left( L + \frac{1}{8}WL \right) \left[ \left( \frac{L}{2} - \frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2 \right) + 4 \right] + \left( \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} + L \left( \frac{W}{8} + \frac{1}{2} \right) - \frac{175W + 288}{24} \right)$$

$$(4) - \left( -\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48} \right) (7 + L)$$

$$= -\frac{4}{15}W + 3L + \frac{1}{4}L^2 + 5L + 40 + 1 + 7WL + \frac{1}{2}WL^2 - \frac{L^2}{2} - \frac{1}{16}WL^2 + \frac{L^2}{4} + \frac{1}{24}WL^2$$

$$-4L - \frac{1}{2}WL - \frac{23}{48}WL^2 - \frac{13}{2}WL - 4L + \frac{4}{15}W - 41 = 0 \quad OK$$

**Funciones de fuerza cortante, fuerza normal y momento flector.**

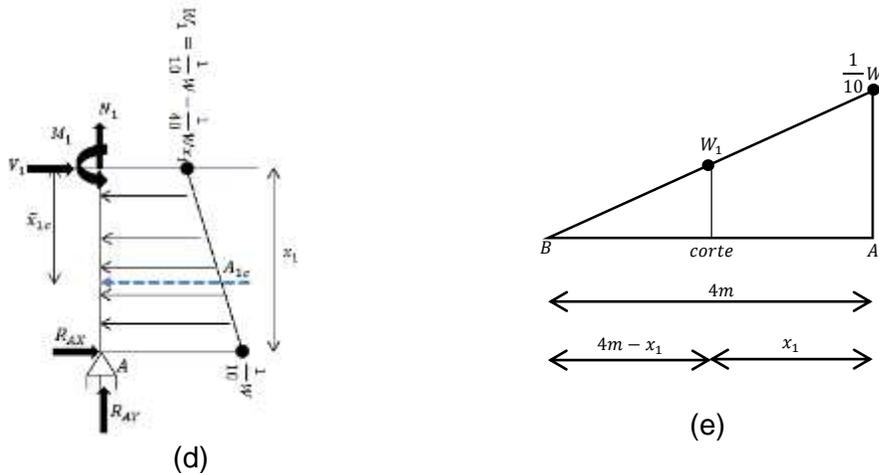
Una vez que se han calculado las fuerzas reactivas en los soportes, pueden determinarse expresiones algebraicas que describan la variación de los elementos mecánicos; para ello es necesario efectuar cortes en cada miembro de la estructura. En el diagrama de cuerpo libre para un segmento de la estructura,  $V$ ,  $N$  y  $M$  aparecen actuando en sus direcciones positivas de acuerdo a la convención de signos más usual y sus funciones se obtienen aplicando las ecuaciones de equilibrio.

MIEMBRO  $A - C$ .

La distribución de la carga que está aplicada sobre este miembro presenta una discontinuidad en el punto  $B$ ; en consecuencia, es necesario efectuar dos cortes perpendiculares al eje del miembro  $A - C$ , uno en el tramo  $A - B$  y otro en el tramo  $B - C$ . Desde el inicio del problema se ha especificado una coordenada  $x$  con origen asociado en  $A$ , etiquetada como  $x_1$ .

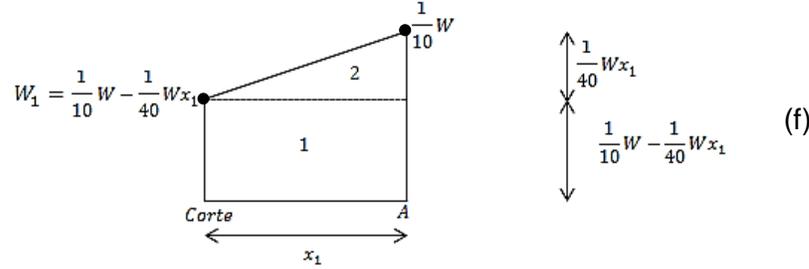
Corte en el tramo  $A - B$ . Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $A - B$ ) a una distancia  $x_1$  de  $A$ . En la figura 2-2d se representa el diagrama de cuerpo libre de la porción de la estructura ubicada por debajo del corte para definir las acciones internas. A la derecha del diagrama se muestra un esquema para determinar por trigonometría el valor en función de  $x_1$  de la intensidad  $W_1$ , figura 2-2e.

$$0 \leq x_1 \leq 4m$$



$$\frac{\frac{1}{10}W}{4} = \frac{W_1}{4 - x_1} \Rightarrow W_1 = \frac{\frac{1}{10}W(4 - x_1)}{4} = \frac{1}{40}(4W - Wx_1) = \frac{1}{10}W - \frac{1}{40}Wx_1$$

Previo a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, deben calcularse el área y su centroide de la carga trapezoidal distribuida. Se rota la presión y se divide en dos cargas más sencillas, una rectangular y una triangular, figura 2-2f.



$$A_{1'} = (x_1) \left( \frac{1}{10} W - \frac{1}{40} W x_1 \right) = \frac{1}{10} W x_1 - \frac{1}{40} W x_1^2 \quad A_{2'} = \frac{(x_1) \left( \frac{1}{40} W x_1 \right)}{2} = \frac{1}{80} W x_1^2$$

$$\therefore A_{1c} = \sum A = \frac{1}{10} W x_1 - \frac{1}{80} W x_1^2$$

$$\bar{x}_1 \cdot A_{1'} = \left( \frac{1}{2} x_1 \right) \left( \frac{1}{10} W x_1 - \frac{1}{40} W x_1^2 \right) = \frac{1}{20} W x_1^2 - \frac{1}{80} W x_1^3$$

$$\bar{x}_2 \cdot A_{2'} = \left( \frac{2}{3} x_1 \right) \left( \frac{1}{80} W x_1^2 \right) = \frac{1}{120} W x_1^3 \quad \sum \bar{x} A = \frac{1}{20} W x_1^2 - \frac{1}{240} W x_1^3$$

$$\therefore \bar{x}_{1c} = \frac{\sum \bar{x} A}{\sum A} = \frac{\frac{1}{20} W x_1^2 - \frac{1}{240} W x_1^3}{\frac{1}{10} W x_1 - \frac{1}{80} W x_1^2}$$

donde  $\bar{x}_{1c} < x_1$ .

$$+ \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 - \left( \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) (x_1)$$

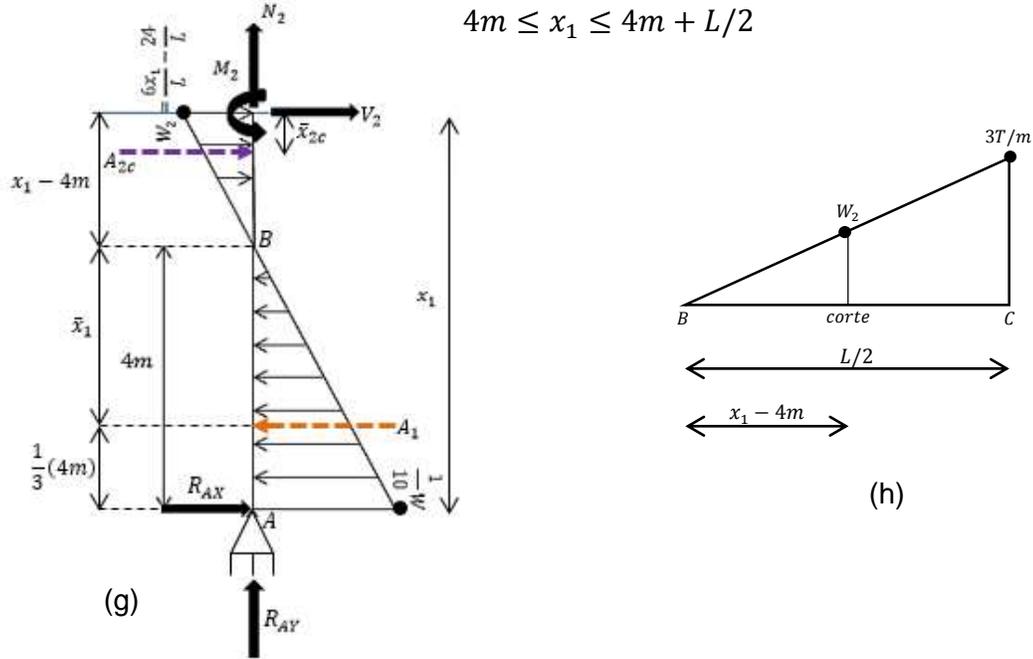
$$+ \left( \frac{1}{10} W x_1 - \frac{1}{80} W x_1^2 \right) \left( \frac{\frac{1}{20} W x_1^2 - \frac{1}{240} W x_1^3}{\frac{1}{10} W x_1 - \frac{1}{80} W x_1^2} \right) = 0$$

$$M_1 = -\frac{1}{240} W x_1^3 + \frac{1}{20} W x_1^2 + \left( \frac{30L^2 + L(210 - 899W) - 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) (x_1)$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = -\frac{1}{80} W x_1^2 + \frac{1}{10} W x_1 + \left( \frac{30L^2 + L(210 - 899W) - 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right)$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow N_1 = -\left(\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48}\right)$$

Corte en el tramo  $B - C$ . En la figura 2-2g se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento de la estructura que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo  $B - C$ . En la figura 2-2h se observa un esquema para determinar el valor en función de  $x_1$  de la intensidad  $W_2$ .



$$\frac{3}{\frac{L}{2}} = \frac{W_2}{x_1 - 4} \Rightarrow W_2 = \frac{3(x_1 - 4)}{\frac{L}{2}} = \frac{3x_1}{\frac{L}{2}} - \frac{12}{\frac{L}{2}} = \frac{6x_1}{L} - \frac{24}{L}$$

La fuerza resultante de la carga triangular seccionada es

$$A_{2c} = \frac{(x_1 - 4) \left( \frac{6x_1}{L} - \frac{24}{L} \right)}{2}$$

y el centroide de su área a través del cual actúa es

$$\bar{x}_{2c} = \frac{1}{3}(x_1 - 4)$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_2 - \left( \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) (x_1)$$

$$+ \left( \frac{1}{5}W \right) \left( x_1 - \frac{4}{3} \right) - \left( \frac{(x_1 - 4) \left( \frac{6x_1}{L} - \frac{24}{L} \right)}{2} \right) \left( \frac{1}{3}(x_1 - 4) \right) = 0$$

$$M_2 = -\frac{1}{L}x_1^3 + \frac{12}{L}x_1^2 + \left( \frac{30L^3 + 35L^2(6 - 25W) + 32L(2W + 75) - 86400}{120L(L + 15)} \right) (x_1) - \frac{4(LW - 240)}{15L}$$

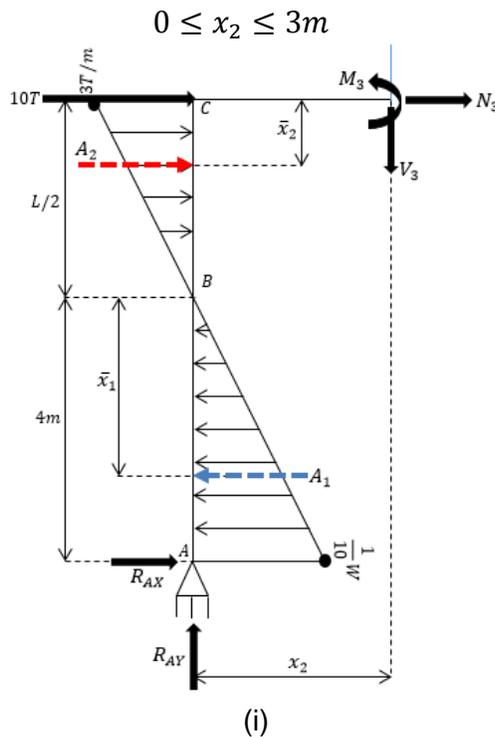
$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_1} = -\frac{3}{L}x_1^2 + \frac{24}{L}x_1 + \frac{30L^3 + 35L^2(6 - 25W) + 32L(2W + 75) - 86400}{120L(L + 15)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow N_2 = -\left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right)$$

MIEMBRO C - F.

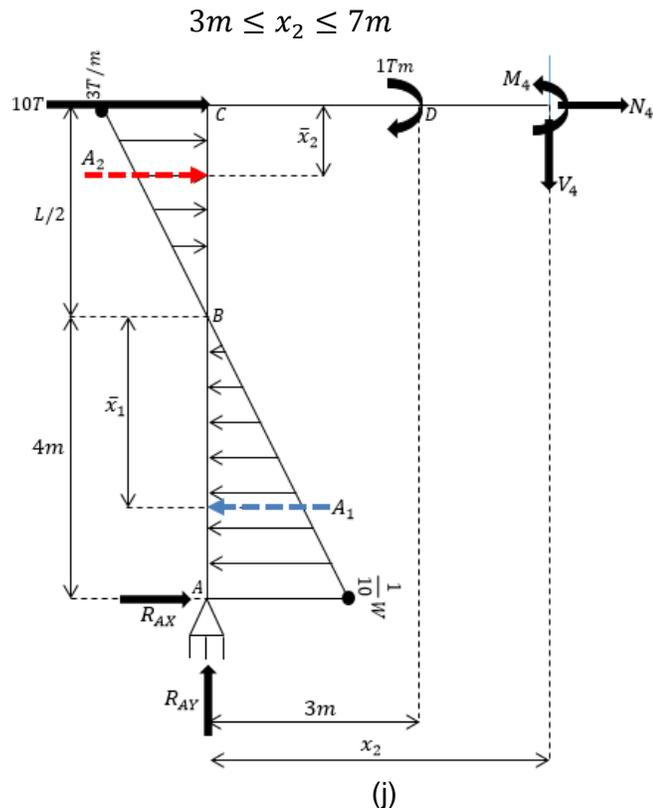
El momento de par aplicado en *D* provocará que la función de momento interno sea discontinua en ese punto; por otra parte, en *E* la carga distribuida presenta una discontinuidad. Por tanto, deben realizarse tres cortes perpendiculares al eje de este miembro, uno en el tramo *C - D*, otro en el tramo *D - E* y finalmente uno en el tramo *E - F*, todos considerando como origen del sistema coordenado al punto *C* de acuerdo a las instrucciones.

Corte en el tramo *C - D*. Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento *C - D*) a una distancia  $x_2$  del punto *C*; el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda del corte es proporcionado en la figura 2-2i.



$$\begin{aligned}
 \sum M_{corte} = 0 &\Rightarrow -M_3 - \left( \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) \left( 4 + \frac{L}{2} \right) \\
 &+ \left( \frac{1}{5}W \right) \left( \frac{L}{2} + \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{3}{4}L \right) \left( \frac{L}{6} \right) + \left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) = 0 \\
 M_3 &= \left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) \\
 &- \frac{875L^2W + 40L(175W - 246) + 64(7W - 1020)}{240(L + 15)} \\
 V_3 = \frac{dM_3}{dx_2} &= \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \\
 + \rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow N_3 = - \left( \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} - \frac{1}{5}W + \frac{3}{4}L + 10 \right) \\
 N_3 &= \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} - \frac{L}{2} - \frac{175W + 288}{24}
 \end{aligned}$$

Corte en el tramo  $D - E$ . En la figura 2-2j se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento izquierdo de la estructura que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo  $D - E$ .



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_4 - \left( \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) \left( 4 + \frac{L}{2} \right) + \left( \frac{1}{5}W \right) \left( \frac{L}{2} + \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{3}{4}L \right) \left( \frac{L}{6} \right) + \left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) + 1 = 0$$

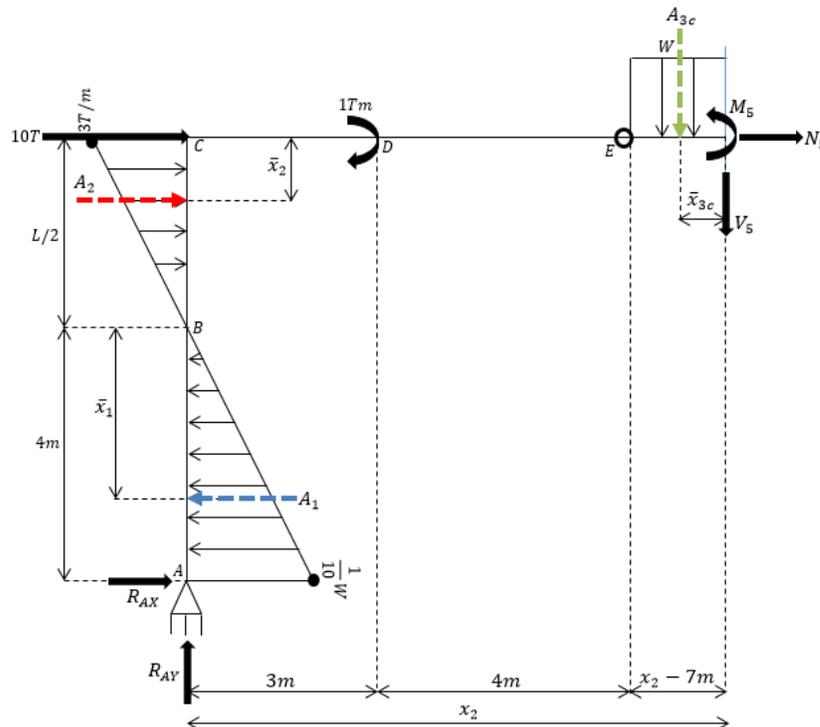
$$M_4 = \left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) - \frac{7(13189W + 11760)}{240(L + 15)} - \frac{175LW}{48} + \frac{7(175W + 288)}{48}$$

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx_2} = \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48}$$

$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_4 = \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} - \frac{L}{2} - \frac{175W + 288}{24}$$

Corte en el tramo  $E - F$ . Se secciona al miembro  $C - F$  a una distancia arbitraria medida desde el punto  $C$ ; el corte debe ser justo después de que la carga distribuida uniformemente comience. El diagrama de cuerpo libre para la sección cortada se muestra en la figura 2-2k.

$$7m \leq x_2 \leq 7m + L$$



(k)

La fuerza resultante de la carga uniformemente distribuida seccionada es

$$A_{3c} = W(x_2 - 7)$$

y el centroide de su área a través del cual actúa es

$$\bar{x}_{3c} = \frac{x_2 - 7}{2}$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_5 - \left( \frac{-30L^2 - L(210 - 899W) + 8(37W - 1020)}{120(L + 15)} \right) \left( 4 + \frac{L}{2} \right) + \left( \frac{1}{5}W \right) \left( \frac{L}{2} + \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{3}{4}L \right) \left( \frac{L}{6} \right)$$

$$+ \left( \frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{25LW}{48} - \frac{175W + 288}{48} \right) (x_2) + 1 - W(x_2 - 7) \left( \frac{x_2 - 7}{2} \right) = 0$$

$$M_5 = -\frac{W}{2}x_2^2 + \left( \frac{125L^2W + 40L(67W - 36) + 16(1579W - 615)}{240(L + 15)} \right) (x_2)$$

$$- \frac{7(125L^2W + 80L(23W - 18) + 8(1583W - 1230))}{240(L + 15)}$$

$$V_5 = \frac{dM_5}{dx_2} = \left( \frac{125L^2W + 40L(67W - 36) + 16(1579W - 615)}{240(L + 15)} \right) - Wx_2$$

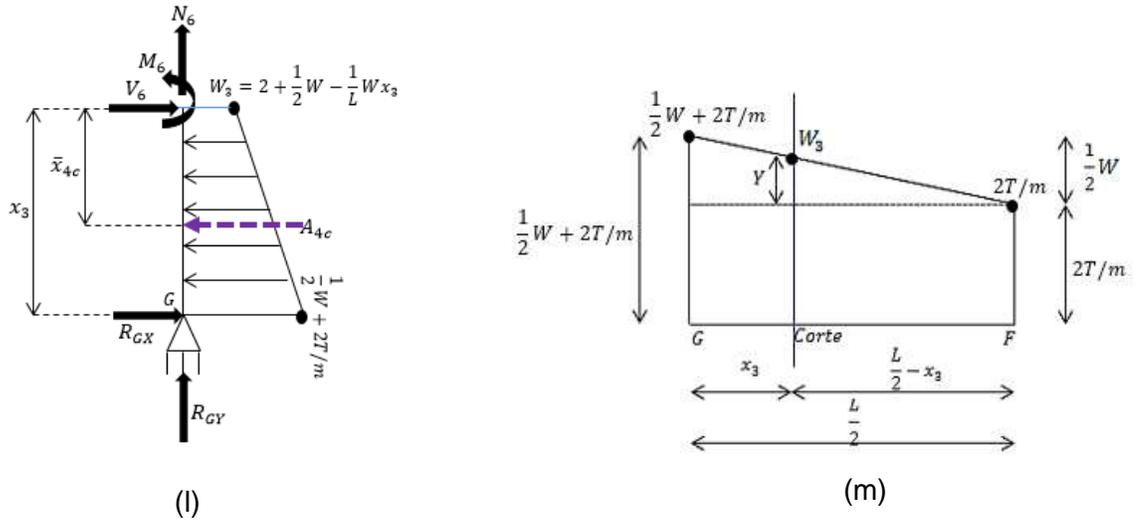
$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_5 = \frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} - \frac{L}{2} - \frac{175W + 288}{24}$$

#### MIEMBRO $G - F$ .

La distribución de la carga que se extiende sobre este miembro no presenta discontinuidad, así que sólo es necesario efectuar un corte perpendicular al eje del miembro.

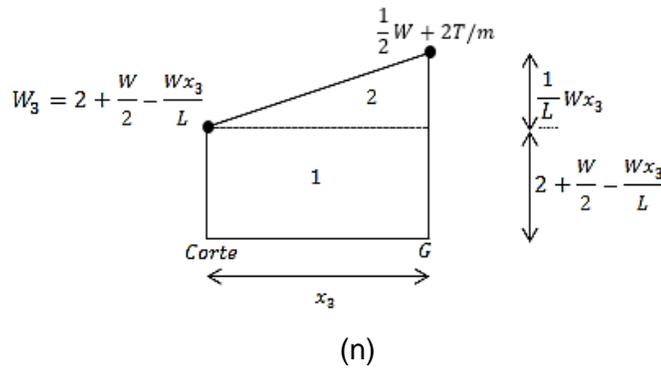
Corte en el tramo  $G - F$ . El origen de la coordenada  $x$  a utilizar, etiquetada como  $x_3$ , se asocia al punto  $F$ . A continuación, en la figura 2-2l se proporciona un diagrama de cuerpo libre del segmento de estructura con longitud  $x_3$ . A la derecha se muestra un esquema para determinar el valor en función de  $x_3$  de la intensidad  $W_3$ , figura 2-2m.

$$0 \leq x_3 \leq \frac{L}{2}$$



$$\frac{\frac{1}{2}W}{\frac{L}{2}} = \frac{Y}{\frac{L}{2} - x_3} \Rightarrow Y = \frac{\left(\frac{1}{2}W\right)\left(\frac{L}{2} - x_3\right)}{\frac{L}{2}} = \frac{W}{2} - \frac{Wx_3}{L} \quad \therefore W_3 = 2 + Y = 2 + \left(\frac{W}{2} - \frac{Wx_3}{L}\right)$$

Previo a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, con base en la figura 2-2n se calcula el área y el centroide de área de la carga trapezoidal distribuida seccionada.



$$A_{1''} = (x_3) \left( 2 + \left( \frac{W}{2} - \frac{Wx_3}{L} \right) \right) = 2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{L}x_3^2 \quad A_{2''} = \frac{(x_3) \left( \frac{Wx_3}{L} \right)}{2} = \frac{W}{2L}x_3^2$$

$$\therefore A_{4c} = \sum A = 2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2$$

$$\bar{x}_1 \cdot A_{1''} = \left(\frac{1}{2}x_3\right) \left(2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{L}x_3^2\right) = x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{2L}x_3^3$$

$$\bar{x}_2 \cdot A_{2''} = \left(\frac{2}{3}x_3\right) \left(\frac{W}{2L}x_3^2\right) = \frac{W}{3L}x_3^3 \quad \sum \bar{x}A = x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{6L}x_3^3$$

$$\therefore \bar{x}_{4c} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{6L}x_3^3}{2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2}$$

donde  $\bar{x}_{4c} < x_3$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_6 - \left(\frac{13189W + 11760}{120(L + 15)} + L\left(\frac{W}{8} + \frac{1}{2}\right) - \frac{175W + 288}{24}\right)(x_3)$$

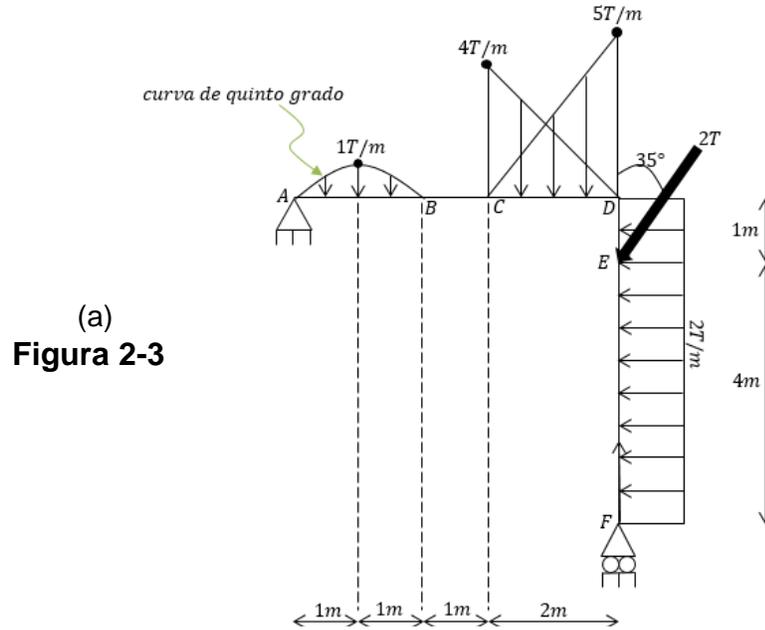
$$+ \left(2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2\right) \left(\frac{x_3^2 + \frac{W}{4}x_3^2 - \frac{W}{6L}x_3^3}{2x_3 + \frac{W}{2}x_3 - \frac{W}{2L}x_3^2}\right) = 0$$

$$M_6 = -\frac{W}{6L}x_3^3 + \left(\frac{W}{4} + 1\right)x_3^2 - \left(\frac{15L^2(W + 4) - 10L(65W + 54) + 16(4W - 615)}{120(L + 15)}\right)(x_3)$$

$$V_6 = \frac{dM_6}{dx_3} = -\frac{W}{2L}x_3^2 + \frac{(W + 4)}{2}x_3 - \frac{15L^2(W + 4) - 10L(65W + 54) + 16(4W - 615)}{120(L + 15)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow N_6 = -\left(-\frac{13189W + 11760}{240(L + 15)} + \frac{23LW}{48} + \frac{175W + 288}{48}\right)$$

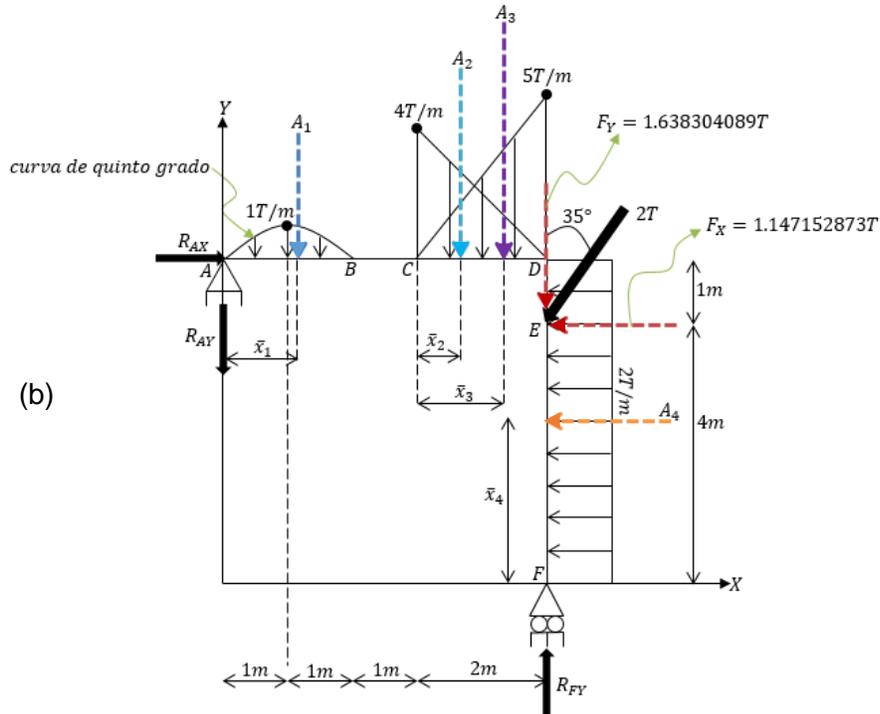
**Ejercicio 2.3** Obtenga las expresiones algebraicas que describen la variación de la fuerza axial, de la fuerza cortante y del momento flector en la estructura que se muestra en la figura 2-3a, la cual está sometida a la acción de las cargas indicadas.



**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**

**Diagrama de cargas.** El diagrama de cargas del marco se observa en la figura 2-3b.



Se determinan las fuerzas resultantes de las cargas distribuidas, así como su punto de aplicación.

- Carga cuya intensidad es descrita por la curva de quinto grado.

El siguiente procedimiento debe llevarse a cabo para determinar el área bajo la curva que representa la fuerza resultante y para localizar el punto donde actúa tal fuerza, es decir el centroide de su área.

Siendo conocidos tres puntos de la curva, la expresión más sencilla que la ajusta es

$$y = ax^5 + bx + c \text{ --- (I)}$$

Si tomamos como origen el punto A, entonces

$$\text{en } x = 0m, y = 0; \quad \text{en } x = 1m, y = 1T; \quad \text{en } x = 2m, y = 0$$

Las constantes  $a, b$  y  $c$  pueden calcularse construyendo un sistema de ecuaciones reemplazando cada punto conocido de manera individual en la ecuación (I).

$$\begin{aligned} a(0)^5 + b(0) + c &= 0 \\ a(1)^5 + b(1) + c &= 1 \\ a(2)^5 + b(2) + c &= 0 \end{aligned}$$

Simplificando se tiene

$$\begin{aligned} 0a + 0b + c &= 0 \text{ --- (1)} \\ a + b + c &= 1 \text{ --- (2)} \\ 32a + 2b + c &= 0 \text{ --- (3)} \end{aligned}$$

Si aplicamos el método de Gauss – Jordan para resolver el sistema simultáneo de ecuaciones, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -30 & -31 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{31}{30} & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiando renglones  $-32R_1 + R_2$   $-\frac{1}{30}R_2$   $-\frac{31}{30}R_3 + R_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$-R_2 + R_1$   $-R_3 + R_1$

$$\therefore a = -\frac{1}{15}, b = \frac{16}{15}, c = 0$$

De tal modo que

$$y = -\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x$$

El área bajo la curva es

$$A_1 = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x\right) dx = \left[-\frac{1}{90}x^6 + \frac{8}{15}x^2\right]_0^2 = \frac{64}{45}T$$

El centroide del área es

$$\bar{x}_1 = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx} = \frac{\int_0^2 x \left(-\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x\right) dx}{\int_0^2 \left(-\frac{1}{15}x^5 + \frac{16}{15}x\right) dx} = \frac{\left[-\frac{1}{105}x^7 + \frac{16}{45}x^3\right]_0^2}{\frac{64}{45}} = \frac{\frac{512}{315}}{\frac{64}{45}} = \frac{8}{7}m$$

- Carga triangular de menor intensidad.

$$A_2 = \frac{(2m)(4T/m)}{2} = 4T \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{3}(2m) = \frac{2}{3}m$$

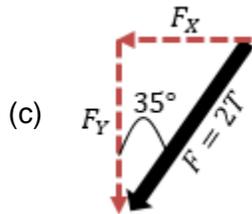
- Carga triangular de mayor intensidad.

$$A_3 = \frac{(2m)(5T/m)}{2} = 5T \quad \bar{x}_2 = \frac{2}{3}(2m) = \frac{4}{3}m$$

- Carga distribuida uniformemente.

$$A_4 = (2m)(5T/m) = 10T \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2}(5m) = \frac{5}{2}m$$

Se resuelve  $F = 2T$  en sus componentes rectangulares  $X$  y  $Y$ , figura 2-3c.



$$F_x = 2T(\text{sen}35^\circ) = 1.147152873 T$$

$$F_y = 2T(\text{cos} 35^\circ) = 1.638304089 T$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

$$\sum MA = 0 \Rightarrow \left(\frac{64}{45}\right)\left(\frac{8}{7}\right) + (4)\left(3 + \frac{2}{3}\right) + (5)\left(3 + \frac{4}{3}\right) + 1.638304089(5)$$

$$+ 1.147152873(1) + (10)\left(\frac{5}{2}\right) - R_{FY}(5) = 0$$

$$R_{FY} = -\left[\frac{\frac{512}{315} + \frac{44}{3} + \frac{65}{3} + 8.191520445 + 1.147152873 + 25}{-5}\right] = \frac{72.29740348}{5}$$

$$\therefore R_{FY} = 14.45948070T \uparrow$$

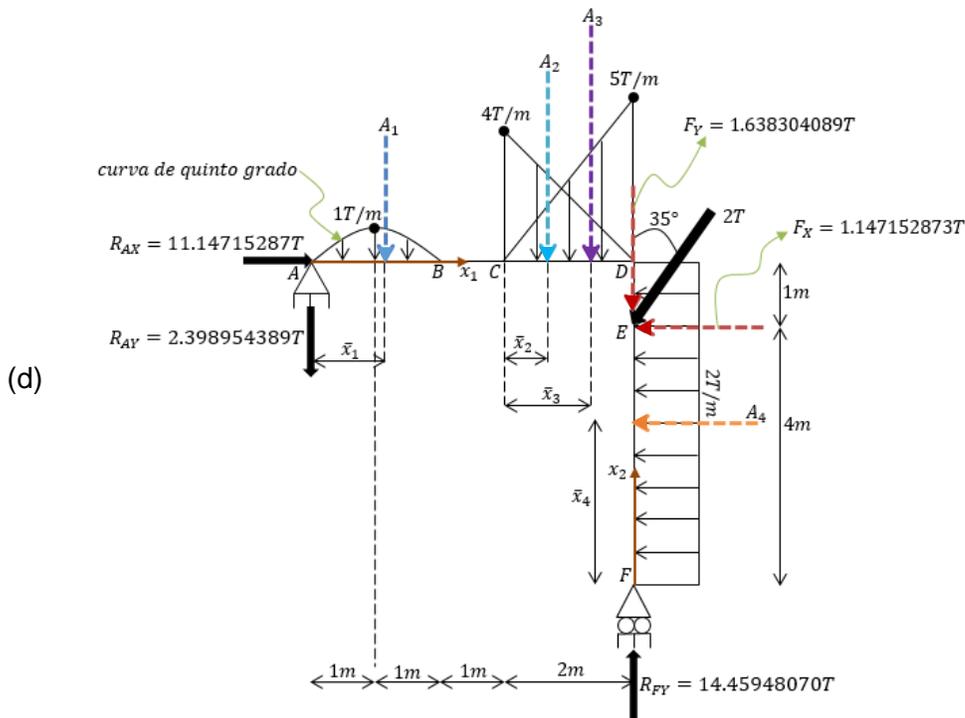
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{AY} - \frac{64}{45} - 4 - 5 - 1.638304089 + 14.45948070 = 0$$

$$R_{AY} = -2.398954389 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 2.398954389T \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow R_{AX} - 1.147152873 - 10 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 11.14715287T \rightarrow$$

**Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector**

Los resultados obtenidos se visualizan esquemáticamente en la figura 2-3d.



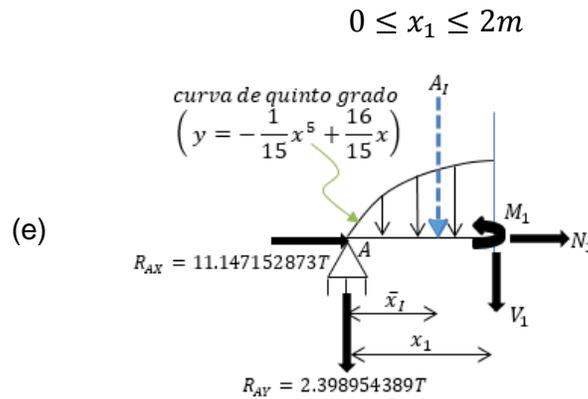
La distribución de la carga que actúa sobre el marco presenta discontinuidades en los puntos  $B, C, D$  y  $E$  y en el punto  $D$  existe un cambio en la geometría de la estructura; por tanto, para obtener las expresiones algebraicas que definan la variación de las acciones internas es necesario cortar la estructura a través de secciones arbitrarias en los tramos  $A - B, B - C, C - D, F - E$  y  $E - D$ . Se ha definido una sola coordenada  $x$  por miembro. La coordenada  $x_1$  con origen en  $A$ , es válida para la región que va desde  $A$  hasta  $D$  y es positiva hacia la derecha. La coordenada  $x_2$ , por su parte, tiene origen en  $F$ , es válida dentro de la región desde  $F$  hasta  $D$  y es positiva hacia arriba.

Miembro  $A - D$ .

Obsérvese que en los puntos  $B$  y  $C$  existen discontinuidades en la distribución de la

carga, ya que de  $A$  a  $B$  se extiende una carga repartida variable en forma de curva de grado cinco, desde  $B$  hasta  $C$  no hay carga alguna y del punto  $C$  al  $D$  se extienden dos presiones triangulares de distinta intensidad que se traslapan. Entonces, necesariamente el miembro  $A - D$  debe ser cortado perpendicularmente a su eje tres veces, siempre considerando como origen del sistema coordenado al punto  $A$ .

Corte en el tramo  $A - B$ . Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $A - B$ ) a una distancia  $x_1$  de  $A$ ; en la figura 2-3e se representa el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la estructura para definir las acciones internas.



Previo al establecimiento del equilibrio estático del cuerpo libre, deben calcularse el área y su centroide de la presión seccionada cuya intensidad es descrita por la función polinomial de quinto grado.

$$\bar{x}_I = \frac{\int_0^{x_1} x \left( -\frac{1}{15} x^5 + \frac{16}{15} x \right) dx}{\int_0^{x_1} \left( -\frac{1}{15} x^5 + \frac{16}{15} x \right) dx} = \frac{\int_0^{x_1} \left( -\frac{1}{15} x^6 + \frac{16}{15} x^2 \right) dx}{\int_0^{x_1} \left( -\frac{1}{15} x^5 + \frac{16}{15} x \right) dx} = \frac{\left[ -\frac{1}{105} x^7 + \frac{16}{45} x^3 \right]_0^{x_1}}{\left[ -\frac{1}{90} x^6 + \frac{8}{15} x^2 \right]_0^{x_1}}$$

$$\bar{x}_I = \frac{-\frac{1}{105} x_1^7 + \frac{16}{45} x_1^3}{-\frac{1}{90} x_1^6 + \frac{8}{15} x_1^2}$$

$$A_I = \int_0^{x_1} \left( -\frac{1}{15} x^5 + \frac{16}{15} x \right) dx = -\frac{1}{90} x_1^6 + \frac{8}{15} x_1^2$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 - 2.398954389(x_1) - \left( -\frac{1}{90} x_1^6 + \frac{8}{15} x_1^2 \right)$$

$$\left( x_1 - \frac{-\frac{1}{105} x_1^7 + \frac{16}{45} x_1^3}{-\frac{1}{90} x_1^6 + \frac{8}{15} x_1^2} \right) = 0$$

$$M_1 = -2.398954389(x_1) - \frac{1}{105}x_1^7 + \frac{16}{45}x_1^3 + \frac{1}{90}x_1^7 - \frac{8}{15}x_1^3$$

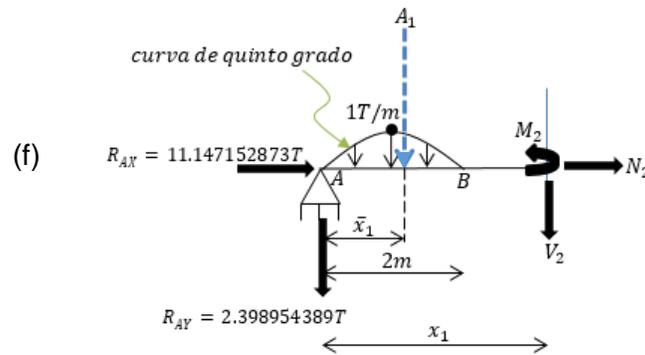
$$M_1 = \frac{1}{630}x_1^7 - \frac{8}{45}x_1^3 - 2.398954389x_1$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = \frac{1}{90}x_1^6 - \frac{8}{15}x_1^2 - 2.398954389$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 11.14715287 + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = -11.14715287$$

Corte en el tramo  $B - C$ . En la figura 2-3f se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento izquierdo de la estructura que se produce al cortarla en algún sitio intermedio del tramo  $B - C$ . El equilibrio estático del cuerpo libre implica que

$$2m \leq x_1 \leq 3m$$



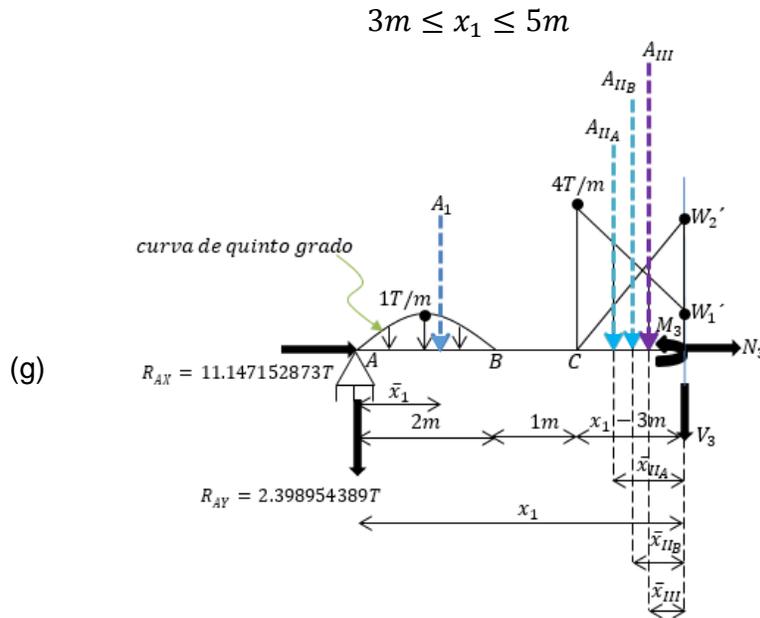
$$\curvearrowright \sum Mcorte = 0 \Rightarrow -M_2 - 2.398954389(x_1) - \left(\frac{64}{45}\right)\left(x_1 - \frac{8}{7}\right) = 0$$

$$M_2 = -3.821176611x_1 + \frac{512}{315}$$

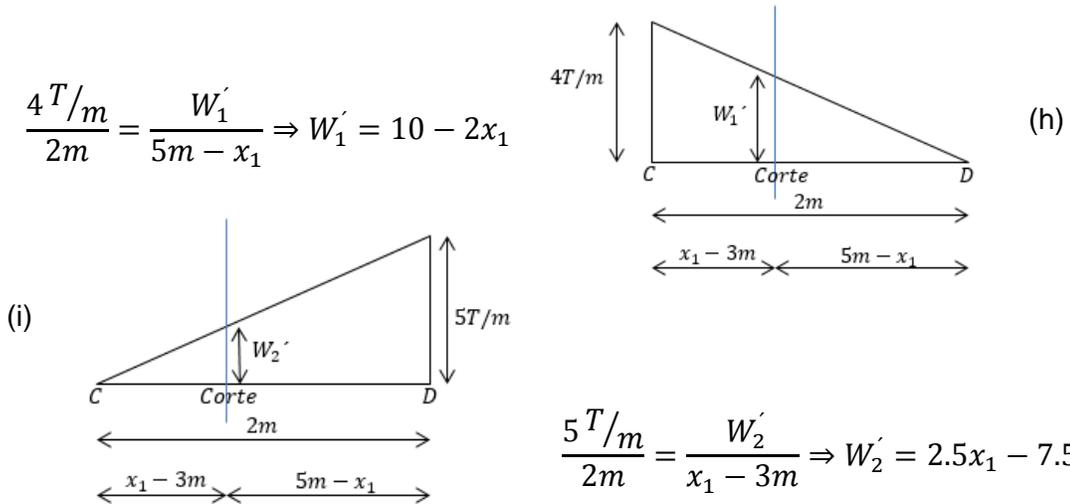
$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_1} = -3.821176611$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 11.14715287 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -11.14715287$$

Corte en el tramo  $C - D$ . Se secciona la estructura en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $C - D$ ) a una distancia  $x_1$  de A; en la figura 2-3g se representa el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda del corte para definir las acciones internas.

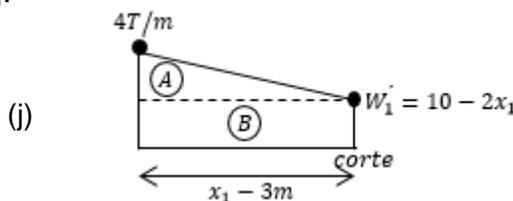


Con base en las figuras 2-3h y 2-3i se determinan por trigonometría los valores en función de  $x_1$  de las intensidades  $W_1'$  y  $W_2'$ , respectivamente.



A continuación, se analizan las presiones trapezoidal y triangular generadas al haber hecho el corte anterior en la estructura.

Es conveniente subdividir a la carga distribuida cuya intensidad varía linealmente desde  $4T/m$  en el punto C hasta  $W_1'$  en el punto D, de tal modo que se formen dos cargas más simples de analizar, una rectangular y una triangular, justo como se observa en la figura 2-3j.



Las cargas concentradas equivalentes, así como con su punto de aplicación son

$$A_{IIA} = \left[ \frac{(x_1 - 3)(4 - (10 - 2x_1))}{2} \right] \quad \bar{x}_{IIA} = \frac{2}{3}(x_1 - 3)$$

$$A_{IIB} = (x_1 - 3)(10 - 2x_1) \quad \bar{x}_{IIB} = \frac{1}{2}(x_1 - 3)$$

La fuerza resultante de la carga distribuida cuya intensidad varía linealmente desde 0 en el punto  $C$  hasta  $W_2'$  en el punto  $D$  y su brazo de palanca son

$$A_{III} = \left[ \frac{(x_1 - 3)(2.5x_1 - 7.5)}{2} \right] \quad \bar{x}_{III} = \frac{1}{3}(x_1 - 3)$$

El equilibrio estático del cuerpo libre del corte en el tramo  $C - D$  implica que

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_3 - 2.398954389(x_1) - \left(\frac{64}{45}\right)\left(x_1 - \frac{8}{7}\right) - \left[\frac{(x_1 - 3)(4 - (10 - 2x_1))}{2}\right]\left(\frac{2}{3}(x_1 - 3)\right)$$

$$-(x_1 - 3)(10 - 2x_1)\left(\frac{1}{2}(x_1 - 3)\right) - \left[\frac{(x_1 - 3)(2.5x_1 - 7.5)}{2}\right]\left(\frac{1}{3}(x_1 - 3)\right) = 0$$

$$M_3 = -2.398954389x_1 - \frac{64}{45}x_1 + \frac{512}{315} + x_1^3 - 11x_1^2 + 39x_1 - 45 - \frac{2}{3}x_1^3 + 6x_1^2$$

$$-18x_1 + 18 - \frac{5}{12}x_1^3 + \frac{15}{4}x_1^2 - \frac{45}{4}x_1 + \frac{45}{4} = -\frac{x_1^3}{12} - \frac{5x_1^2}{4} + 5.928823389x_1 - \frac{17797}{1260}$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_1} = -\frac{x_1^2}{4} - \frac{5x_1}{2} + 5.928823389$$

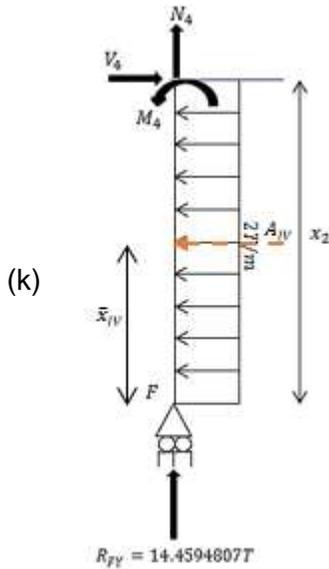
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 11.14715287 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -11.14715287$$

Miembro  $F - D$ .

Aunque la carga distribuida uniforme de  $2T/m$  no provoca que las funciones de las acciones internas varíen en la región  $F - D$  debido a que tal presión se encuentra aplicada a lo largo de todo el miembro citado, la carga puntual de  $2T$  en  $E$  hará que las funciones de la fuerza cortante, de la fuerza axial y del momento flector sean discontinuas en ese punto; por tanto, se tienen que hacer dos cortes perpendiculares al eje del miembro  $F - D$ .

Corte en el tramo  $F - E$ . A continuación, en la figura 2-3k se muestra un diagrama de cuerpo libre de la sección cortada. La fuerza resultante de la carga distribuida uniforme es  $A_{IV} = (2T/m)(x_2)$  y su punto de aplicación es  $\bar{x}_{IV} = x_2/2$ . Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$0m \leq x_2 \leq 4m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_4 + 2(x_2) \left( \frac{x_2}{2} \right) = 0 \Rightarrow M_4 = x_2^2$$

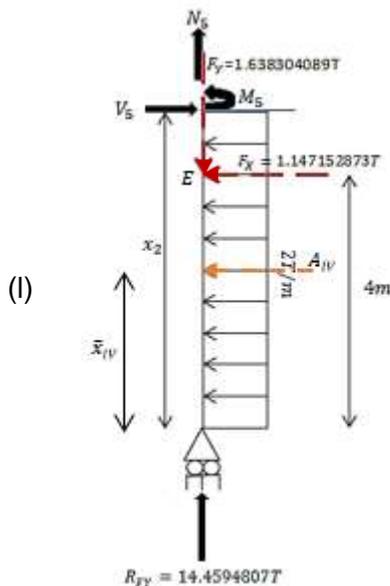
$$V_4 = \frac{dM_4}{dx_2} = 2x_2$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 14.4594807 + N_4 = 0$$

$$N_4 = -14.4594807$$

Corte en el tramo  $E - D$ . El siguiente diagrama de cuerpo libre, figura 2-3l, corresponde al segmento inferior con longitud  $x_2$  que se origina al seccionar el marco en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $E - D$ ). Por lo tanto,

$$4m \leq x_2 \leq 5m$$



$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_5 + 2(x_2) \left( \frac{x_2}{2} \right) + 1.147152873(x_2 - 4) = 0$$

$$M_5 = x_2^2 + 1.147152873x_2 - 4.588611492$$

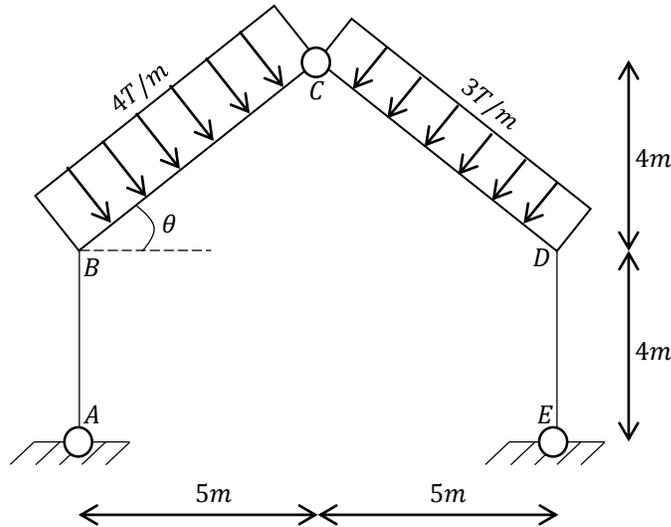
$$V_5 = \frac{dM_5}{dx_2} = 2x_2 + 1.147152873$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 14.4594807 + N_5 = 0$$

$$N_5 = -14.4594807$$

## 2.2 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE, DE FUERZA NORMAL Y DE MOMENTO FLECTOR

**Ejercicio 2.4** Calcular las reacciones del marco isostático triarticulado en dos aguas que se muestra en la figura 2-4a. Determine además las expresiones algebraicas que describen la variación de las acciones internas en cada miembro y úselas para realizar los diagramas correspondientes. Considere que las cargas uniformemente repartidas actúan perpendicularmente a los miembros  $B - C$  y  $D - C$ , respectivamente.



(a)

**Figura 2-4**

### SOLUCIÓN

#### Cálculo de las reacciones en los soportes

**Diagrama de cargas.** En la figura 2-4b se muestra el diagrama de cuerpo libre de la estructura.

Se proporciona el cálculo de las cargas concentradas equivalentes de las presiones, así como su punto de aplicación.

- Carga distribuida uniforme de  $4T/m$ .

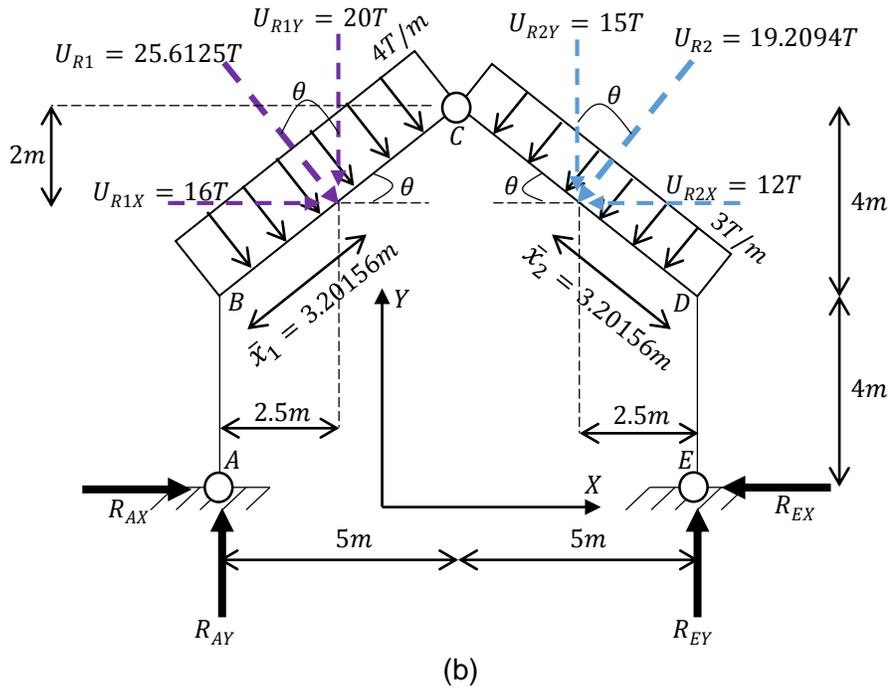
La longitud del miembro  $B - C$  es

$$L_{B-C} = \sqrt{(5m)^2 + (4m)^2} = \sqrt{41}m$$

Por lo tanto,

$$U_{R1} = (4T/m)(\sqrt{41}m) = 25.6125T$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{41}m) = 3.20156m$$



- Carga distribuida uniforme de  $3T/m$

La longitud del miembro  $D - C$  es

$$L_{D-C} = \sqrt{41}m$$

Por lo tanto,

$$U_{R2} = (3T/m)(\sqrt{41}m) = 19.2094T$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{41}m) = 3.20156m$$

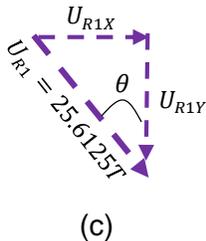
Con base en las figuras 2-4c y 2-4d, se determinan las componentes rectangulares  $X, Y$  de las fuerzas resultantes  $U_{R1}$  y  $U_{R2}$ .

- Para  $U_{R1} = 25.6125T$

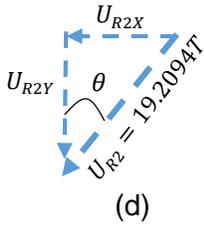
$$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{5} = 38.6598^\circ$$

$$\sin \theta = \frac{U_{R1X}}{U_{R1}} \Rightarrow U_{R1X} = U_{R1} \sin \theta = 25.6125T(\sin 38.6598^\circ) = 16T$$

$$\cos \theta = \frac{U_{R1Y}}{U_{R1}} \Rightarrow U_{R1Y} = U_{R1} \cos \theta = 25.6125T(\cos 38.6598^\circ) = 20T$$



- Para  $U_{R2} = 19.2094T$



$$\sin \theta = \frac{U_{R2X}}{U_{R2}} \Rightarrow U_{R2X} = U_{R2} \sin \theta = 19.2094T (\sin 38.6598^\circ) = 12T$$

$$\cos \theta = \frac{U_{R2Y}}{U_{R2}} \Rightarrow U_{R2Y} = U_{R2} \cos \theta = 19.2094T (\cos 38.6598^\circ) = 15T$$

**Ecuaciones de equilibrio.** La convención de signos que se usará para las siguientes ecuaciones es indistinta; si el lector opta por tomar las opuestas, deberá llegar a los mismos resultados.

Tomando en cuenta que el momento en una articulación siempre es nulo, es posible plantear que la suma de momentos en  $C$  es igual a cero, ya sea para la parte derecha, o como en este caso, para la parte izquierda.

$$\oplus \sum MCizq = 0 \Rightarrow R_{AY}(5m) - R_{AX}(8m) - U_{R1X}(2m) - U_{R1Y}(2.5m) = 0$$

$$5R_{AY} - 8R_{AX} - [16(2) + 20(2.5)] = 0 \Rightarrow 5R_{AY} - 8R_{AX} = 82 \text{ --- (1)}$$

Luego, para todo el marco tenemos

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} + R_{EY} - U_{R1Y} - U_{R2Y} = 0 \Rightarrow R_{AY} + R_{EY} - (20 + 15) = 0$$

$$R_{AY} + R_{EY} = 35 \text{ --- (2)}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - R_{EX} + U_{R1X} - U_{R2X} = 0 \Rightarrow R_{AX} - R_{EX} + 16 - 12 = 0$$

$$R_{AX} - R_{EX} = -4 \text{ --- (3)}$$

$$\oplus \sum MA = 0 \Rightarrow U_{R1X}(6m) + U_{R1Y}(2.5m) + U_{R2Y}(7.5m) - U_{R2X}(6m) - R_{EY}(10m) = 0$$

$$16(6) + 20(2.5) + 15(7.5) - 12(6) - 10R_{EY} = 0 \Rightarrow -10R_{EY} = -186.5 \text{ --- (4)}$$

Se procede a resolver el sistema de ecuaciones enumerado anteriormente.

Si se despeja  $R_{EY}$  de la ecuación (4), se tiene

$$R_{EY} = -\frac{186.5}{-10} = 18.65$$

Como el resultado obtenido es positivo, el sentido propuesto es correcto.

$$\therefore R_{EY} = 18.65T \uparrow$$

Sustituyendo  $R_{EY} = 18.65$  en la ecuación (2) y despejando  $R_{AY}$ , se obtiene

$$R_{AY} = 35 - 18.65 = 16.35T$$

De nuevo el sentido propuesto es adecuado.

$$\therefore R_{AY} = 16.35T \uparrow$$

Sustituyendo  $R_{AY} = 16.35$  en la ecuación (1) y despejando  $R_{AX}$ , da

$$5(16.35) - 8R_{AX} = 82 \Rightarrow R_{AX} = \frac{82 - 5(16.35)}{-8} = -0.03125$$

El signo negativo indica que el sentido de  $R_{AX}$  es opuesto al supuesto.

$$\therefore R_{AX} = 0.03125T \leftarrow$$

Sustituyendo  $R_{AX} = -0.03125$  en la ecuación (3) y despejando  $R_{EX}$  resulta

$$-0.03125 - R_{EX} = -4 \Rightarrow R_{EX} = -(-4 + 0.03125) = 3.96875$$

Por el signo resultante, efectivamente  $R_{EX}$  actúa hacia la izquierda como se propuso en el diagrama de cargas.

$$\therefore R_{EX} = 3.96875T \leftarrow$$

**Forma alterna.** Otra manera de calcular las reacciones en los apoyos del marco triarticulado es haciendo uso de las reacciones en la articulación; para ello, es necesario partir la estructura en dos, justo en donde se ubica la articulación, en este caso en  $C$ , figura 2-4e. Después se aplican las ecuaciones de equilibrio en ambas porciones del marco. Una vez más los sentidos de todas las fuerzas reactivas se proponen arbitrariamente; forzosamente las reacciones de la articulación son de igual magnitud y dirección, pero de sentido opuesto y pueden ser calculadas si tomamos momentos respecto de  $A$  en la porción 1 y respecto de  $E$  en la porción 2 usando una convención de signos arbitraria (da lo mismo considerar como positivo a un momento horario o a un momento antihorario) y se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones con incógnitas  $C_X$  y  $C_Y$ .

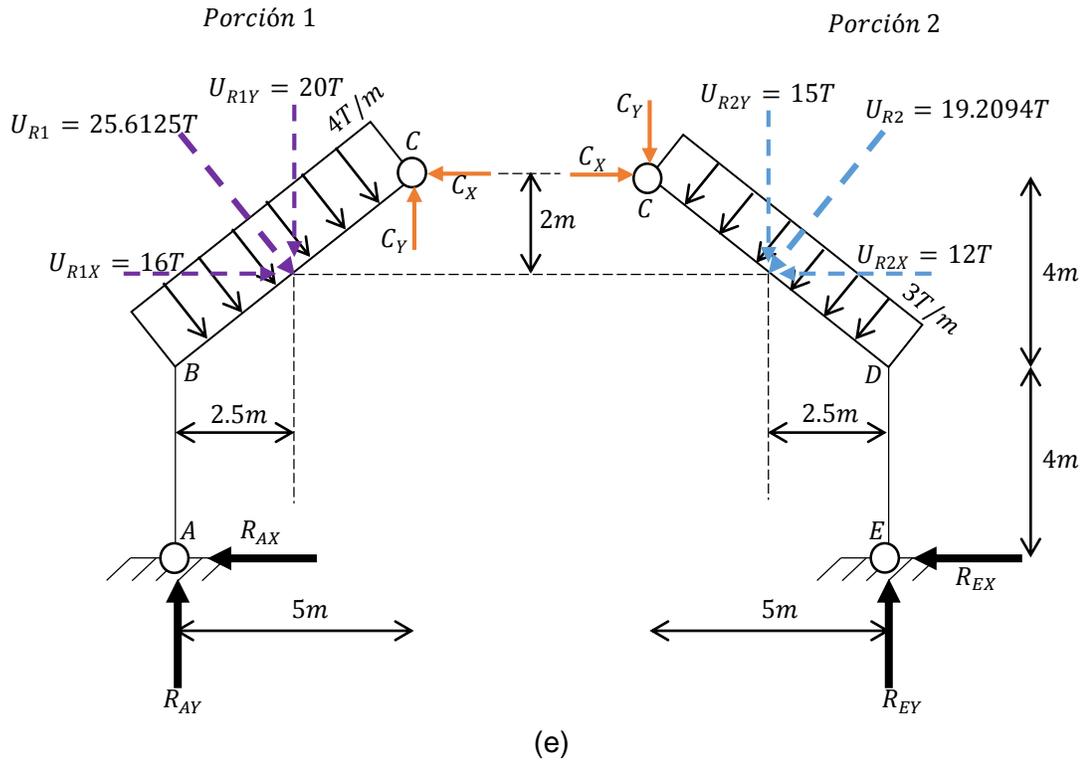
Para la porción 1 tenemos

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -C_Y(5m) - C_X(8m) + U_{R1Y}(2.5m) + U_{R1X}(6m) = 0$$

$$-5C_Y - 8C_X + 16(6) + 20(2.5) = 0 \Rightarrow -5C_Y - 8C_X = -146 \Rightarrow 5C_Y + 8C_X = 146 \text{ --- (a)}$$

Para la porción 2 tenemos

$$\begin{aligned} \sum ME = 0 &\Rightarrow -C_Y(5m) + C_X(8m) - U_{R2Y}(2.5m) - U_{R2X}(6m) = 0 \\ -5C_Y + 8C_X - [12(6) + 15(2.5)] &= 0 \Rightarrow 8C_X - 5C_Y = 109.5 \text{ --- (b)} \end{aligned}$$



Se resuelve el sistema de ecuaciones (a) y (b).

Sumando la ecuación (a) con la ecuación (b) resulta

$$\begin{aligned} 5C_Y + 8C_X &= 146 \\ + \\ -5C_Y + 8C_X &= 109.5 \\ \hline 16C_X &= 255.5 \\ C_X &= \frac{255.5}{16} = 15.96875 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $C_X = 15.96875$  en la ecuación (b) y despejando  $C_Y$  da

$$8(15.96875) - 5C_Y = 109.5 \Rightarrow C_Y = \frac{109.5 - 8(15.96875)}{-5} = 3.65$$

Si la suma de fuerzas en cualquier dirección es nula en la porción 1, obtenemos

$$C_X = 15.96875T \leftarrow \text{ y } C_Y = 3.65T \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 16 - 15.96875 - R_{AX} = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0.03125 \Rightarrow R_{AX} = 0.03125T \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$3.65 - 20 + R_{AY} = 0 \Rightarrow R_{AY} = 16.35 \Rightarrow R_{AY} = 16.35T \uparrow$$

De manera análoga, para la porción 2 se tiene

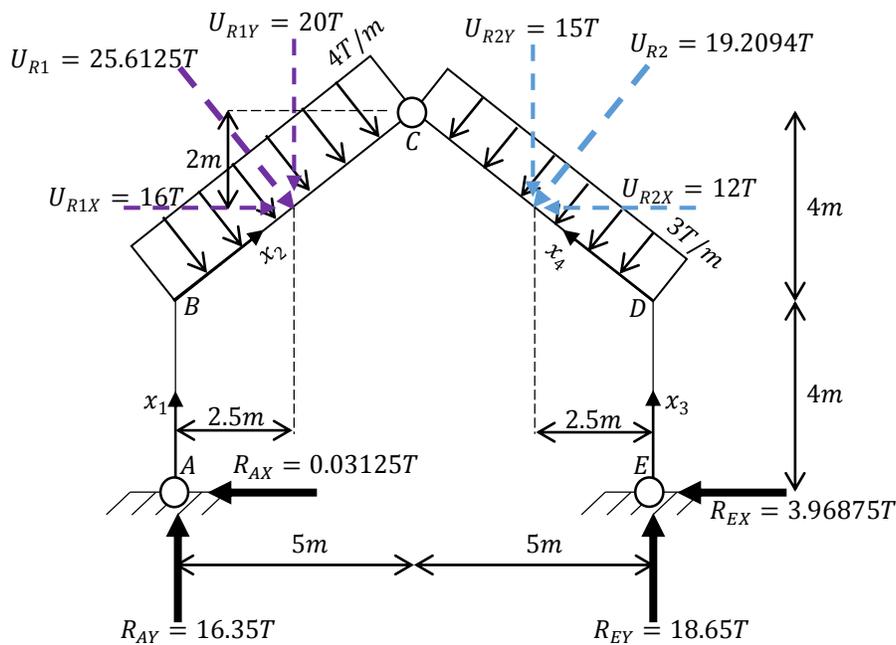
$$C_X = 15.96875T \rightarrow \text{ y } C_Y = 3.65T \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 15.96875 - 12 - R_{EX} = 0 \Rightarrow R_{EX} = 3.96875T \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -3.65 - 15 + R_{EY} = 0 \Rightarrow R_{EY} = 18.65T \uparrow$$

### Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector

Los resultados obtenidos se muestran esquemáticamente en la figura 2-4f.



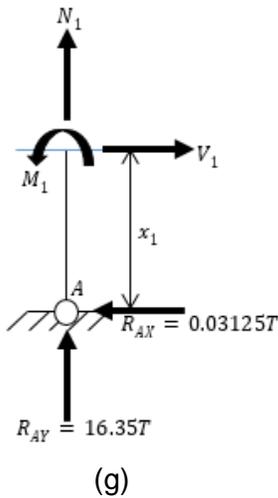
(f)

La distribución de la carga que actúa sobre el marco presenta discontinuidades en  $B, C$  y  $D$ , y en cada uno de esos puntos existe además un cambio en la geometría de la estructura; por tanto, para obtener funciones que definan la variación de los elementos mecánicos es necesario cortar la estructura a través de secciones arbitrarias en los tramos  $A - B, B - C, E - D$  y  $D - C$ . En la figura anterior se observa la forma en las que han sido definidas las coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ .

Miembro  $A - B$ .

Corte en el tramo  $A - B$ . Se secciona la estructura perpendicularmente al eje del miembro en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $A - B$ ) a una distancia  $x_1$  de  $A$ ; en la figura 2-4g se muestra el diagrama de cuerpo libre de la porción inferior de la estructura para definir las acciones internas. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$0 \leq x_1 \leq 4m$$



$$\curvearrowright \sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -M_1 + 0.03125x_1 = 0 \Rightarrow M_1 = 0.03125x_1$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow V_1 - 0.03125 = 0 \Rightarrow V_1 = 0.03125$$

o también:

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = 0.03125$$

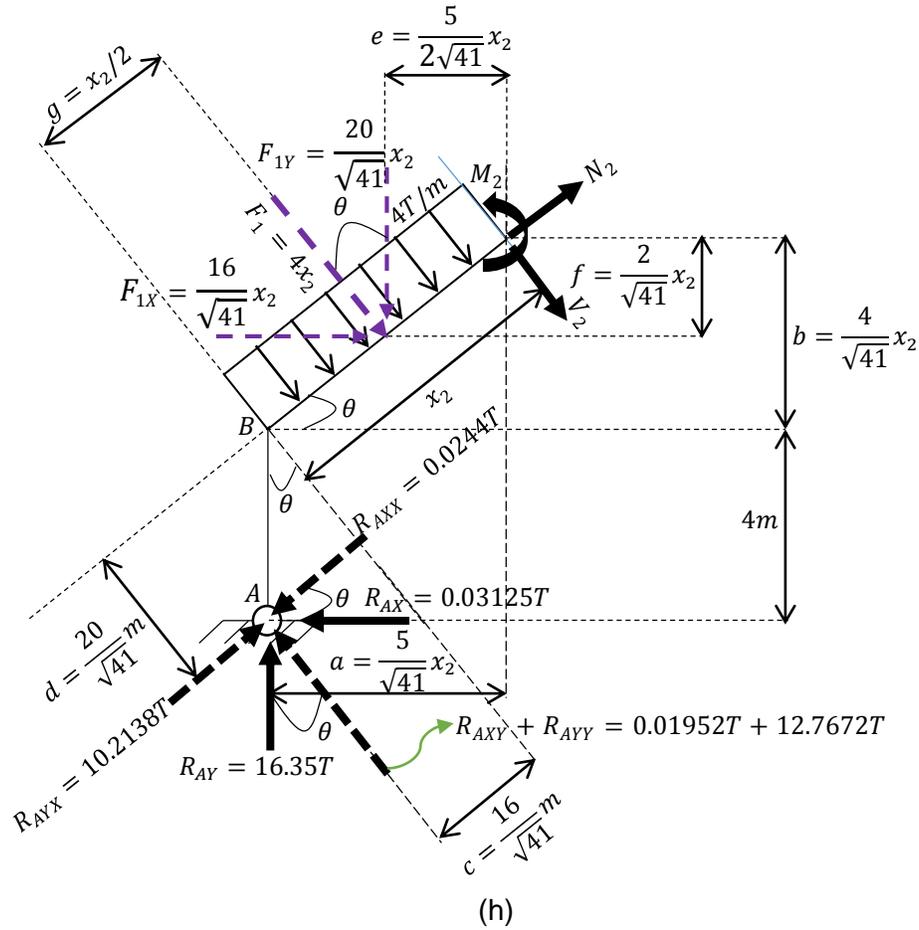
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 16.35 + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = -16.35$$

Miembro  $B - C$ .

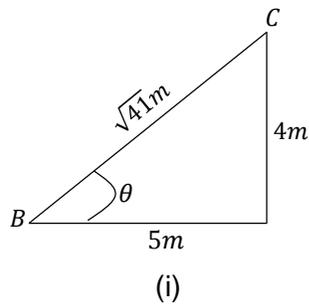
Corte en el tramo  $B - C$ . En la figura 2-4h se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción izquierda de la estructura que se produce al cortarla (perpendicularmente al eje del miembro) en algún sitio intermedio del tramo  $B - C$ .

La fuerza resultante de la carga distribuida uniforme es  $F_1 = (4T/m)(x_2) = 4x_2$  y su punto de aplicación es  $g = x_2/2$ .

$$0 \leq x_2 \leq \sqrt{41}m$$



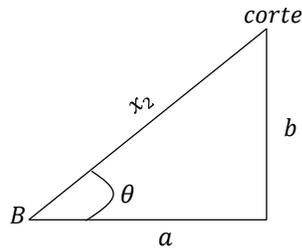
Con los datos del marco original, es posible determinar  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  usando trigonometría, figura 2-4i.



$$\sin \theta = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

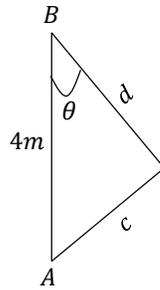
De la porción del corte considerada, las distancias  $a, b, c$  y  $d$  se deducen aplicando identidades trigonométricas, figura 2-4j.



$$a = x_2 \cos \theta = \frac{5}{\sqrt{41}} x_2$$

$$b = x_2 \sin \theta = \frac{4}{\sqrt{41}} x_2$$

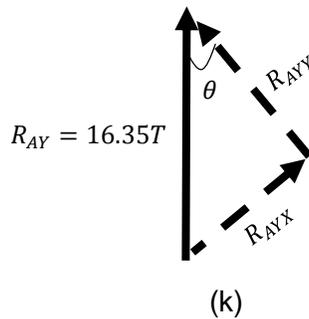
(j)



$$c = (4m) \sin \theta = 4m \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = \frac{16}{\sqrt{41}} m$$

$$d = (4m) \cos \theta = 4m \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = \frac{20}{\sqrt{41}} m$$

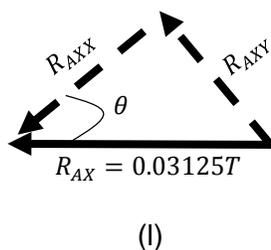
Para aplicar las ecuaciones de equilibrio en el cuerpo libre, descomponemos  $R_{AY}$ ,  $R_{AX}$  y  $F_1$  en sus componentes rectangulares cuyas líneas de acción coinciden con la fuerza cortante  $V_2$  y la fuerza normal  $N_2$ , figuras 2-4k, 2-4l y 2-4m.



- Para  $R_{AY} = 16.35T$

$$R_{AYX} = 16.35T \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = 10.2138T$$

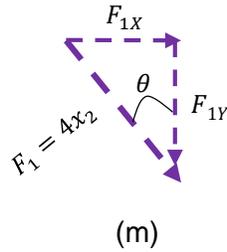
$$R_{AYY} = 16.35T \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = 12.7672T$$



- Para  $R_{AX} = 0.03125T$

$$R_{AXX} = 0.03125T \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = 0.0244T$$

$$R_{AXY} = 0.03125T \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = 0.01952T$$



- Para  $F_1 = 4x_2$

$$F_{1X} = 4x_2 \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = \frac{16}{\sqrt{41}} x_2$$

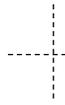
$$F_{1Y} = 4x_2 \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = \frac{20}{\sqrt{41}} x_2$$

El equilibrio estático del cuerpo libre implica lo siguiente:

La suma de momentos en el punto del corte es nula.

$$\oplus \sum M_{corte} = 0$$

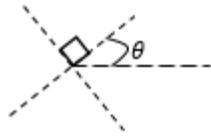
- Opción 1.

Tomando momentos alrededor del punto del corte considerando los ejes  que pasan por tal punto, se puede despejar directamente  $M_2$ .

$$\begin{aligned} -M_2 + R_{AY}(a) + R_{AX}(4 + b) - F_{1X}(f) - F_{1Y}(e) &= 0 \\ -M_2 + 16.35 \left( \frac{5}{\sqrt{41}} x_2 \right) + 0.03125 \left( 4 + \frac{4}{\sqrt{41}} x_2 \right) - \frac{16}{\sqrt{41}} x_2 \left( \frac{2}{\sqrt{41}} x_2 \right) \\ - \frac{20}{\sqrt{41}} x_2 \left( \frac{5}{2\sqrt{41}} x_2 \right) &= 0 \Rightarrow M_2 = -2x_2^2 + 12.7867x_2 + 0.125 \end{aligned}$$

Si  $x_2 = \sqrt{41}$ , entonces  $M_2 = 0$ , lo cual es correcto ya que el momento en una articulación es nulo.

- Opción 2.

Tomando momentos alrededor del punto del corte considerando los ejes  que pasan por tal punto, se puede despejar directamente  $M_2$ .

$$\begin{aligned} -M_2 + (R_{AXY} + R_{AYY})(c + x_2) + (R_{AXX} - R_{AYX})(d) - F_1(x_2 - g) &= 0 \\ -M_2 + (0.01952 + 12.7672) \left( \frac{16}{\sqrt{41}} + x_2 \right) + (0.0244 - 10.2138) \left( \frac{20}{\sqrt{41}} \right) \\ -4x_2 \left( \frac{x_2}{2} \right) &= 0 \Rightarrow M_2 = -2x_2^2 + 12.7867x_2 + 0.125 \end{aligned}$$

La suma de fuerzas en la dirección del cortante es igual a cero. Por lo tanto,

$$\nearrow + \sum F_Y = 0 \Rightarrow R_{AXY} + R_{AYY} - F_1 + V_2 = 0$$

$$0.01952 + 12.7672 - 4x_2 - V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = 12.7867 - 4x_2$$

o también

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_2} = 12.7867 - 4x_2$$

La suma de fuerzas en la dirección de la normal es igual a cero. Por lo tanto,

$$\nearrow + \sum F_X = 0 \Rightarrow R_{AYX} - R_{AXX} + N_2 = 0 \Rightarrow 10.2138 - 0.0244 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -10.1894$$

Miembro  $E - D$ .

Corte en el tramo  $E - D$ . Se secciona la estructura perpendicularmente al eje del miembro en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $E - D$ ) a una distancia  $x_3$  de  $E$ ; en la figura 2-4n se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento de estructura con longitud  $x_3$ . Por lo tanto,

$$0 \leq x_3 \leq 4m$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_3 + 3.96875x_3 = 0$$

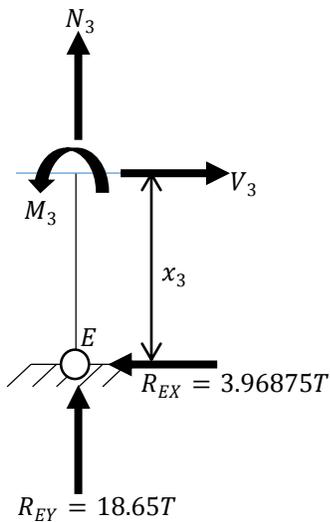
$$M_3 = 3.96875x_3$$

$$\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow V_3 - 3.96875 = 0 \Rightarrow V_3 = 3.96875$$

o también:

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx_3} = 3.96875$$

$$\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow 18.65 + N_3 = 0 \Rightarrow N_3 = -18.65$$

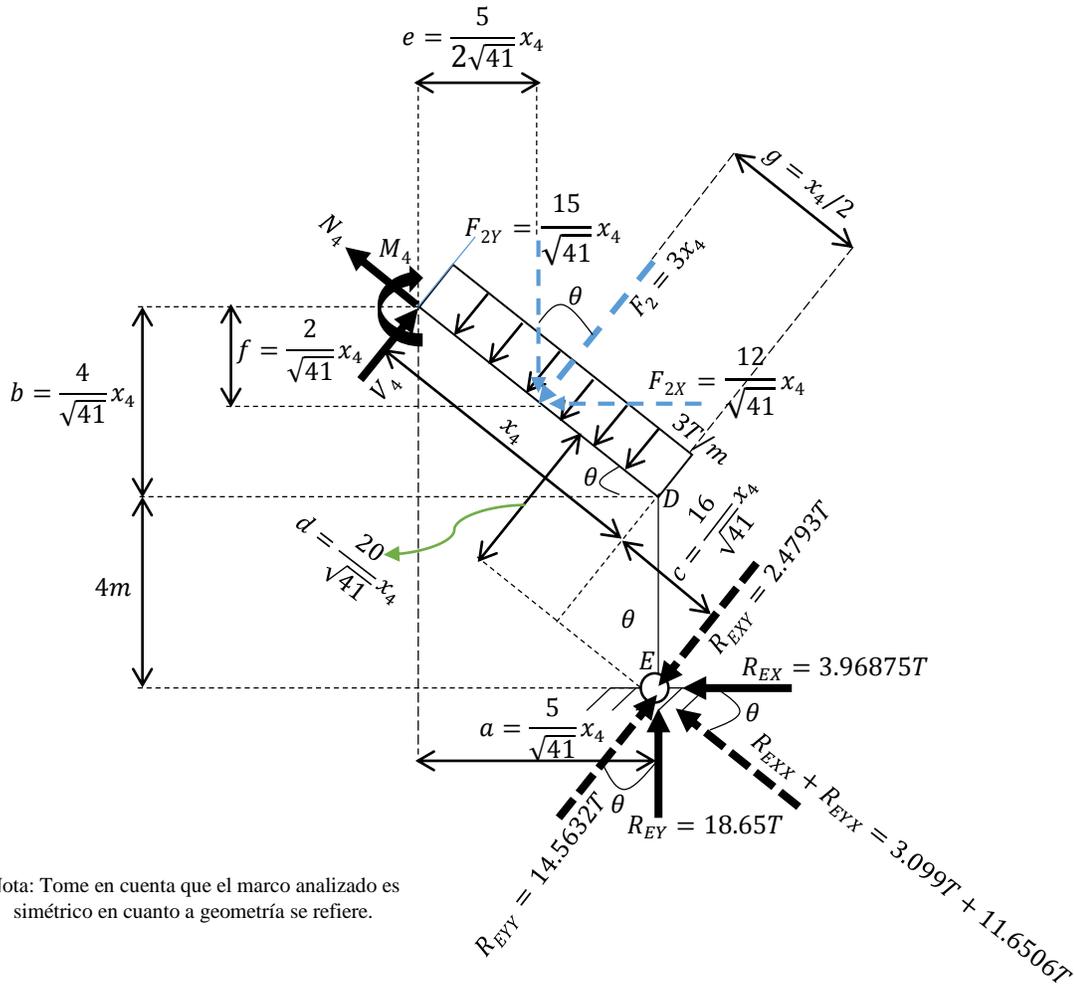


(n)

Miembro  $D - C$ .

Corte en el tramo  $D - C$ . Se secciona la estructura perpendicularmente al eje del miembro en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $D - C$ ) a una distancia  $x_4$  de  $D$ ; el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción derecha de la estructura que se origina al haber efectuado el corte es mostrado en la figura 2-4ñ.

$$0 \leq x_4 \leq \sqrt{41}m$$

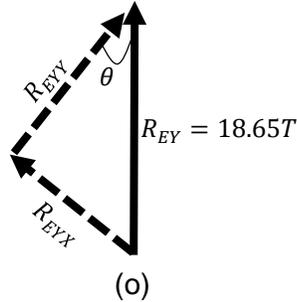


(ñ)

La fuerza resultante de la carga distribuida uniforme es  $F_2 = (3T/m)(x_2) = 3x_2$  y su punto de aplicación es  $g = x_4/2$ .

Tome en cuenta que el marco analizado es simétrico en cuanto a geometría se refiere.

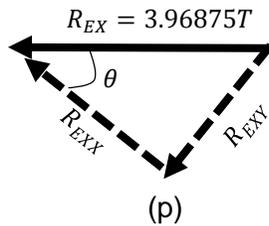
Para aplicar las ecuaciones de equilibrio en el cuerpo libre, descomponemos  $R_{EY}$ ,  $R_{EX}$  y  $F_2$  en sus componentes rectangulares cuyas líneas de acción coinciden con la fuerza cortante  $V_4$  y la fuerza normal  $N_4$ , figuras 2-4o, 2-4p y 2-4q.



- Para  $R_{EY} = 18.65T$

$$R_{EYX} = 18.65T \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = 11.6506T$$

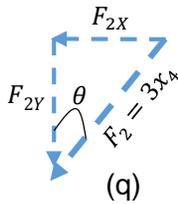
$$R_{EYY} = 18.65T \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = 14.5632T$$



- Para  $R_{EX} = 3.96875T$

$$R_{EXX} = 3.96875T \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = 3.099T$$

$$R_{EXY} = 3.96875T \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = 2.4793T$$



- Para  $F_2 = 3x_4$

$$F_{2X} = 3x_4 \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = \frac{12}{\sqrt{41}} x_4$$

$$F_{2Y} = 3x_4 \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = \frac{15}{\sqrt{41}} x_4$$

El equilibrio estático del cuerpo libre implica que

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_4 + F_2 \left( \frac{x_4}{2} \right) (R_{EXX} + R_{EYX})(d) + (R_{EXY} - R_{EYY})(x_4 + c) = 0$$

$$M_4 + 3x_4 \left( \frac{x_4}{2} \right) + (3.099 + 11.6506) \left( \frac{20}{\sqrt{41}} \right) + (2.4793 - 14.5632) \left( \frac{16}{\sqrt{41}} + x_4 \right) = 0$$

$$M_4 = -1.5x_4^2 + 12.0839x_4 - 15.875$$

Si  $x_4 = \sqrt{41}$ , entonces  $M_4 = 0$ , lo cual es correcto ya que el momento en una articulación es nulo.

Cuando se corta sobre la superficie derecha, el cortante es igual a la derivada negativa del momento. En consecuencia,

$$V_4 = -\frac{dM_4}{dx_4} = 3x_4 - 12.0839$$

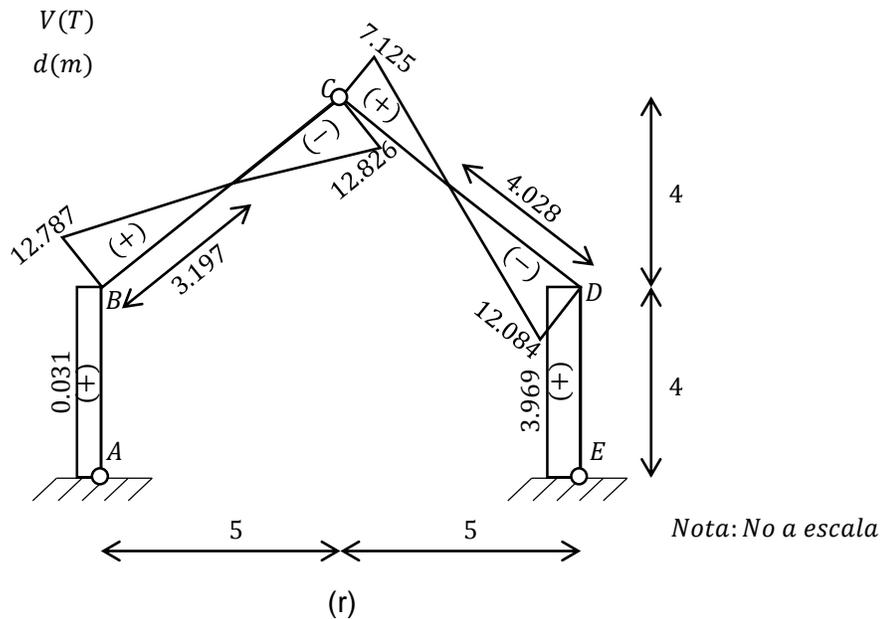
La suma de fuerzas en la dirección de la normal es igual a cero. Así que,

$$+\sum FX = 0 \Rightarrow R_{EXX} + R_{EYX} + N_4 = 0 \Rightarrow 3.099 + 11.6506 + N_4 = 0 \Rightarrow N_4 = -14.7496$$

**Diagramas de fuerza cortante, de momento flector y de fuerza normal**

Las funciones deducidas se evalúan y luego se grafican los datos, así como se hizo para las vigas.

**Diagrama de fuerza cortante, figura 2-4r.**



La posición donde el cortante es igual a cero, es decir, donde se ubica el momento máximo, es

$$0 = 12.7867 - 4x_2 \quad \therefore x_{2max} = 3.19668m \quad \text{--- Miembro } B - C$$

$$0 = 3x_4 - 12.0839 \quad \therefore x_{4max} = 4.02797m \quad \text{--- Miembro } D - C$$

**Diagrama de momento flexionante, figura 2-4s.**

Obsérvese que el momento es nulo en la articulación C y en otro punto intermedio al Miembro D - C. Para hallar su posición hacemos

$$0 = -1.5x_4^2 + 12.0839x_4 - 15.875 \Rightarrow x_{4,1} = 1.65285m; x_{4,2} = 6.4031m$$

Por otra parte, el momento máximo es

$$M_{2max} = -2(3.19668)^2 + 12.7867(3.19668) + 0.125 = 20.56246T.m \text{ --- Miembro } B - C$$

$$M_{4max} = -1.5(4.02797)^2 + 12.0839(4.02797) - 15.875 = 8.46177T.m \text{ --- Miembro } D - C$$

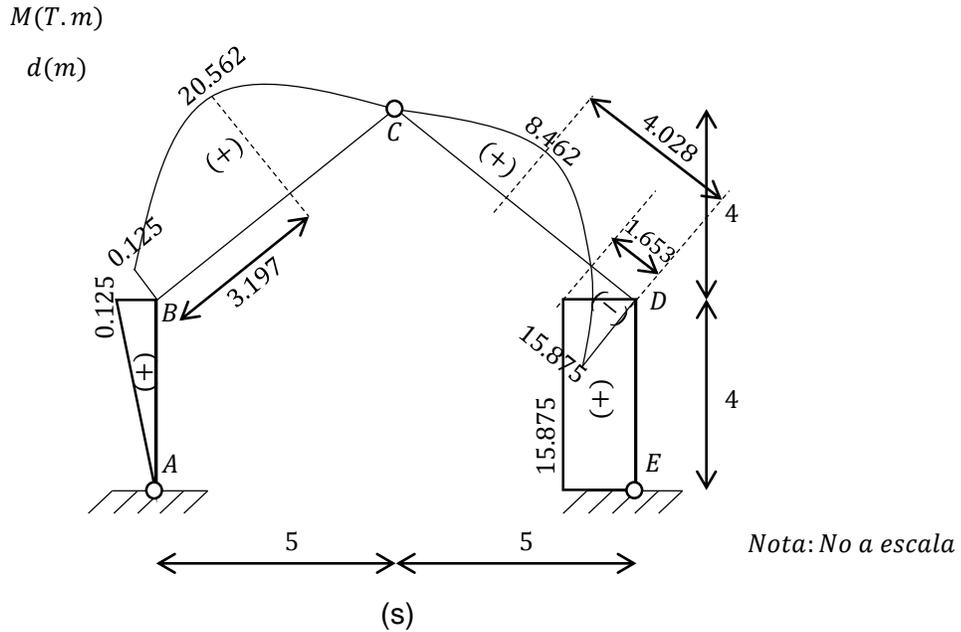
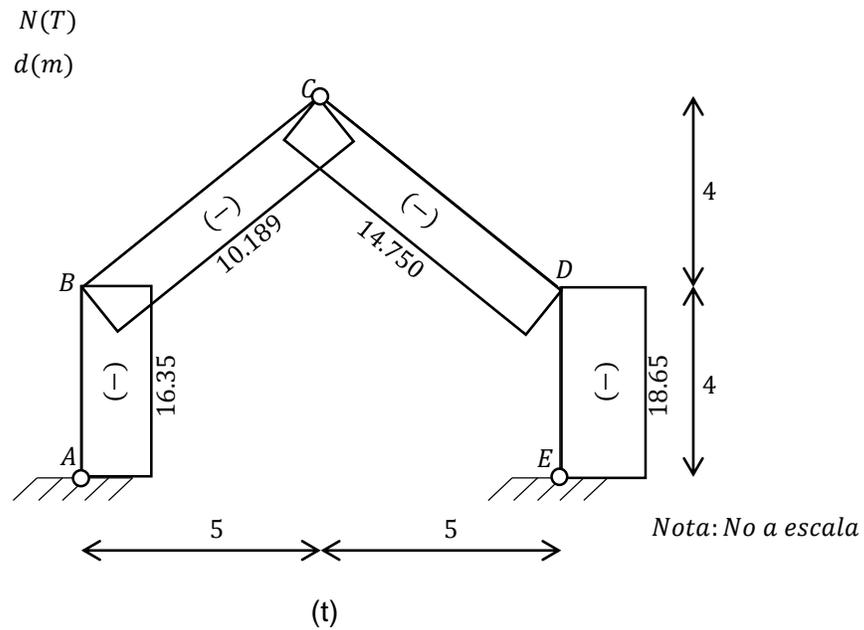
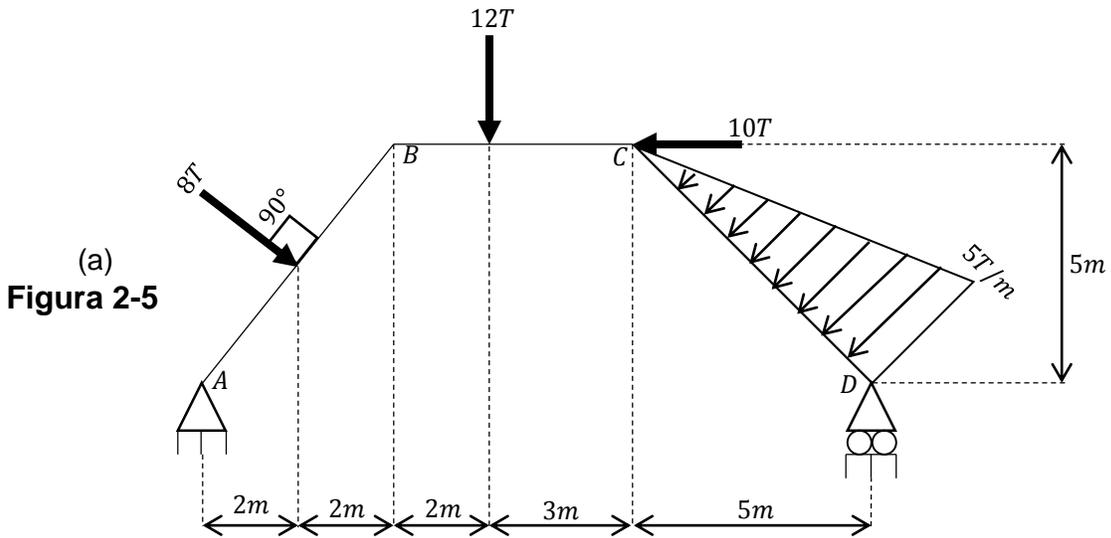


Diagrama de fuerza normal, figura 2-4t.



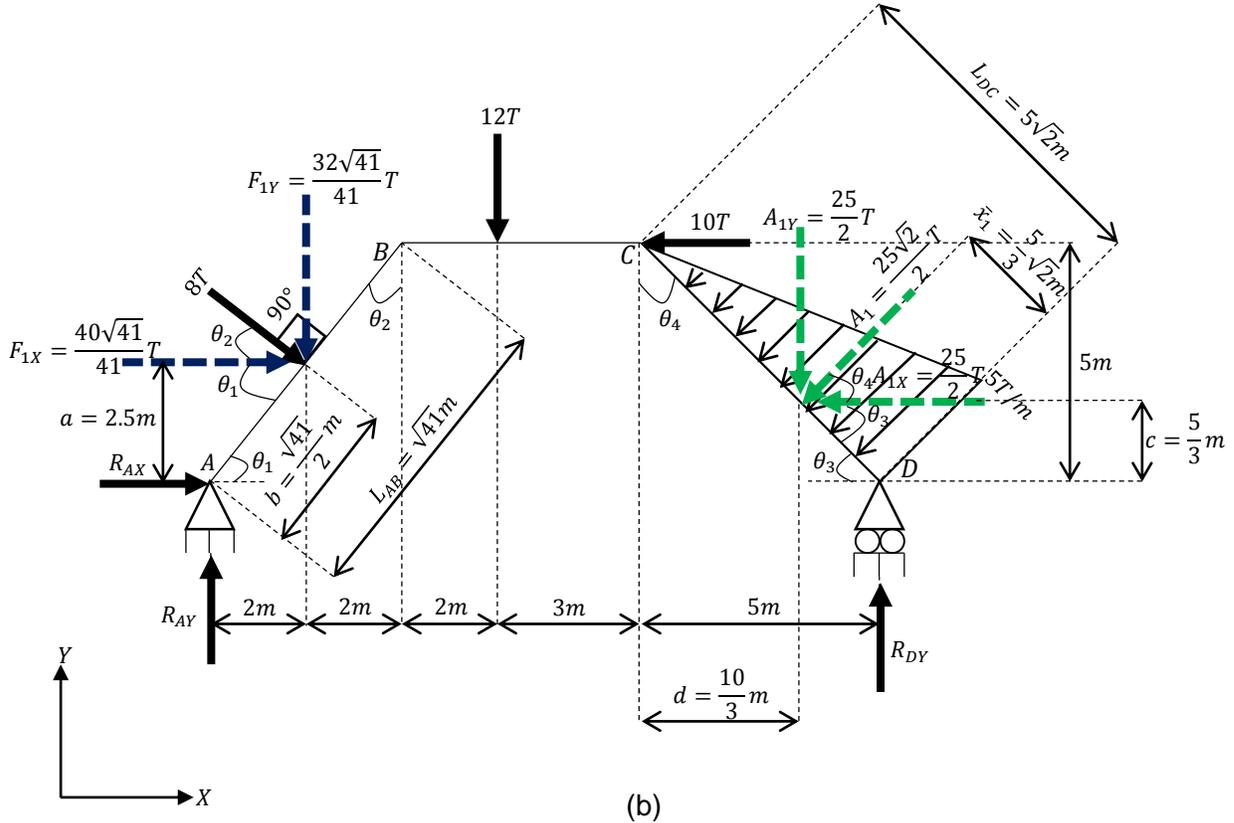
**Ejercicio 2.5** Dibuje los diagramas de fuerza cortante, de fuerza normal y de momento flexionante del marco visualizado en la figura 2-5a.



**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**

**Diagrama de cargas.** Se muestra en la figura 2-5b.



La longitud del miembro  $A - B$  es

$$L_{AB} = \sqrt{(4m)^2 + (5m)^2} = \sqrt{41}m$$

En consecuencia,

$$\sin\theta_2 = 4/\sqrt{41} \quad \cos\theta_2 = 5/\sqrt{41}$$

$$\frac{4m}{\sqrt{41}m} = \frac{2m}{b} \Rightarrow b = \frac{(2m)(\sqrt{41}m)}{4m} = \frac{\sqrt{41}}{2}m \quad \frac{4m}{5m} = \frac{2m}{a} \Rightarrow a = \frac{(5m)(2m)}{4m} = 2.5m$$

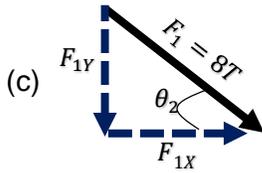
La longitud del miembro  $D - C$  es

$$L_{DC} = \sqrt{(5m)^2 + (5m)^2} = 5\sqrt{2}m$$

Por lo tanto,

$$\sin\theta_4 = 5/5\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} \quad \cos\theta_4 = 5/5\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} \quad \theta_3 = \theta_4$$

Con base en la figura 2-5c, las componentes rectangulares de la carga puntual de  $8T$  para el plano  $X - Y$  son



$$\sin\theta_2 = \frac{F_{1Y}}{F_1} \Rightarrow F_{1Y} = F_1 \sin\theta_2 = 8T \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = \frac{32\sqrt{41}}{41}T$$

$$\cos\theta_2 = \frac{F_{1X}}{F_1} \Rightarrow F_{1X} = F_1 \cos\theta_2 = 8T \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = \frac{40\sqrt{41}}{41}T$$

A continuación se efectúa un análisis de la carga con variación lineal.

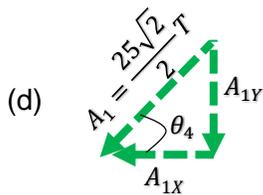
La carga concentrada equivalente es

$$A_1 = \frac{(5\sqrt{2}m)(5T/m)}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}T$$

y su punto de aplicación se localiza a una distancia de

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3}(5\sqrt{2}m) = \frac{5}{3}\sqrt{2}m$$

A partir de la figura 2-5d, las componentes rectangulares de la resultante  $A_1$  son



$$\sin\theta_4 = \frac{A_{1Y}}{A_1} \Rightarrow A_{1Y} = A_1 \sin\theta_4 = \frac{25\sqrt{2}}{2}T \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{25}{2}T$$

$$\cos\theta_4 = \frac{A_{1X}}{A_1} \Rightarrow A_{1X} = A_1 \cos\theta_4 = \frac{25\sqrt{2}}{2}T \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{25}{2}T$$

Las distancias  $c$  y  $d$  pueden ser deducidas por trigonometría como sigue:

$$\frac{5m}{5\sqrt{2}m} = \frac{c}{\frac{5}{3}\sqrt{2}m} \Rightarrow c = \frac{5m\left(\frac{5}{3}\sqrt{2}m\right)}{5\sqrt{2}m} = \frac{5}{3}m$$

$$d = \sqrt{\left[(5\sqrt{2}m) - \left(\frac{5}{3}\sqrt{2}m\right)\right]^2 - \left(5m - \frac{5}{3}m\right)^2} = \frac{10}{3}m$$

**Ecuaciones de equilibrio.**

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MA = 0 &\Rightarrow \left(\frac{40\sqrt{41}}{41}\right)(2.5) + \left(\frac{32\sqrt{41}}{41}\right)(2) + (12)(6) - (10)(5) + \left(\frac{25}{2}\right)\left(9 + \frac{10}{3}\right) \\ &- \left(\frac{25}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) - (R_{DY})(14) = 0 \Rightarrow R_{DY} = 12.9247 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 12.9247T \uparrow \end{aligned}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} + \frac{40\sqrt{41}}{41} - 10 - \frac{25}{2} = 0 \Rightarrow R_{AX} = 16.253 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 16.253T \rightarrow$$

$$\uparrow + \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - \frac{32\sqrt{41}}{41} - 12 - \frac{25}{2} + 12.9247 = 0 \Rightarrow R_{AY} = 16.5729$$

$$\therefore R_{AY} = 16.5729T \uparrow$$

Como comprobación, se debe cumplir que la suma de momentos respecto de  $D$  es nula.

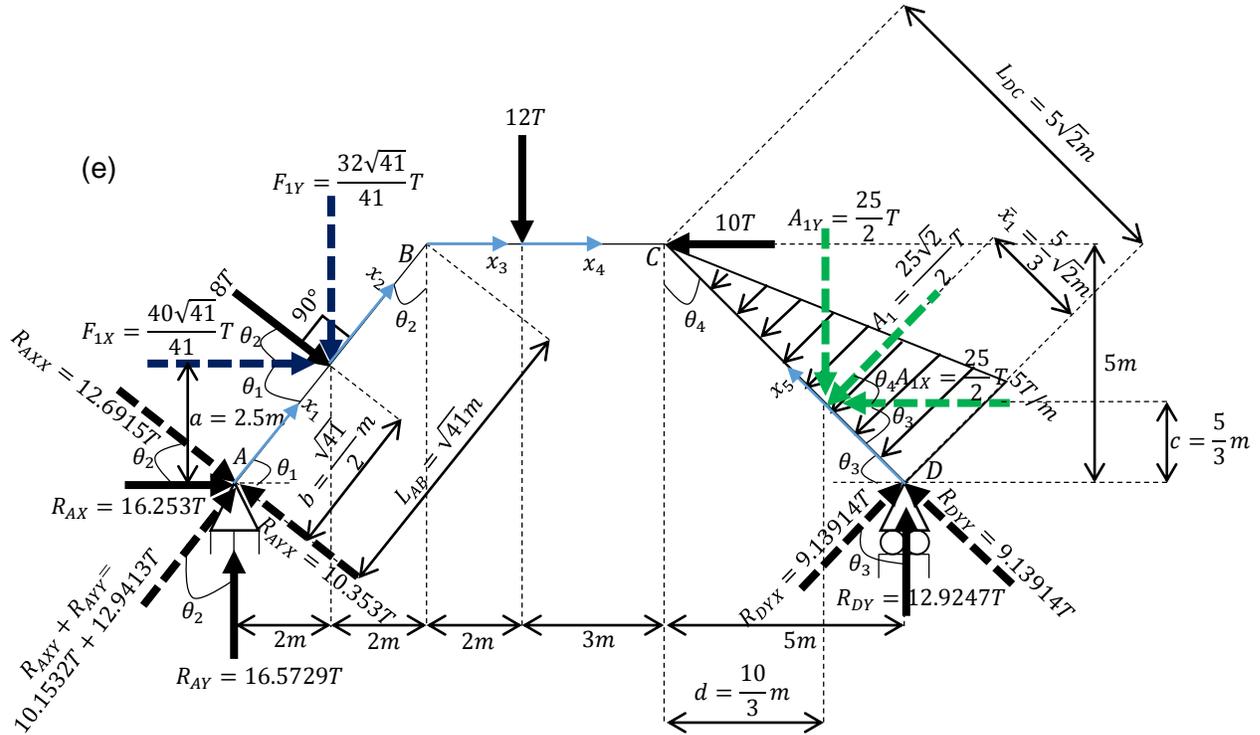
$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MD &= -\left(\frac{25}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) - \left(\frac{25}{2}\right)\left(5 - \frac{10}{3}\right) - (10)(5) - (12)(8) - \left(\frac{32\sqrt{41}}{41}\right)(12) \\ &+ \left(\frac{40\sqrt{41}}{41}\right)(2.5) + (16.5729)(14) \approx 0 \text{ ok} \end{aligned}$$

**Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector**

Los resultados obtenidos se muestran en el diagrama de la figura 2-5e.

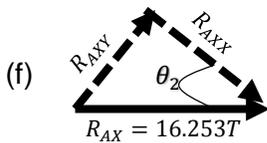
En el marco se pueden distinguir cinco regiones distintas. En el miembro  $A - B$ , un primer tramo va desde  $A$  hasta el punto de aplicación de la carga puntual de  $8T$  y un segundo tramo sería la parte restante del miembro. Un tercer y cuarto tramo se observan por inspección en el miembro  $B - C$  debido a la aplicación de la carga puntual de  $12T$ . En el miembro  $C - D$  no hay variación en la distribución de la carga, por lo que toda su longitud comprendería el quinto tramo. Para obtener funciones que definan la variación de las acciones internas es necesario cortar la estructura a través de secciones arbitrarias en los tramos mencionados.

A diferencia de los marcos resueltos anteriormente, en los que se había establecido una coordenada  $x$  por miembro, esta vez se opta por definir una coordenada  $x$  para cada tramo distinto, lo cual también es válido. En la figura pueden notarse claramente la forma en las que han sido definidas las coordenadas  $x_1, x_2, x_3, x_4$  y  $x_5$ , las cuales cubren perfectamente cada una de las regiones de la estructura.



Con base en las figuras 2-5f, 2-5g y 2-5h, se calculan las componentes rectangulares de las reacciones en los apoyos que serán útiles al efectuar el equilibrio en algunos diagramas de cuerpo libre originados al cortar la estructura.

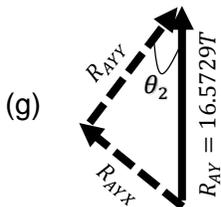
- Para  $R_{AX} = 16.253T$



$$\sin \theta_2 = \frac{R_{AXY}}{R_{AX}} \Rightarrow R_{AXY} = R_{AX} \sin \theta_2 = 16.253T \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = 10.1532T$$

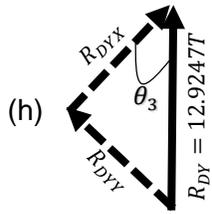
$$\cos \theta_2 = \frac{R_{AXX}}{R_{AX}} \Rightarrow R_{AXX} = R_{AX} \cos \theta_2 = 16.253T \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = 12.6915T$$

- Para  $R_{AY} = 16.5729T$



$$\sin \theta_2 = \frac{R_{AYX}}{R_{AY}} \Rightarrow R_{AYX} = R_{AY} \sin \theta_2 = 16.5729T \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \right) = 10.353T$$

$$\cos \theta_2 = \frac{R_{AYY}}{R_{AY}} \Rightarrow R_{AYY} = R_{AY} \cos \theta_2 = 16.5729T \left( \frac{5}{\sqrt{41}} \right) = 12.9413T$$



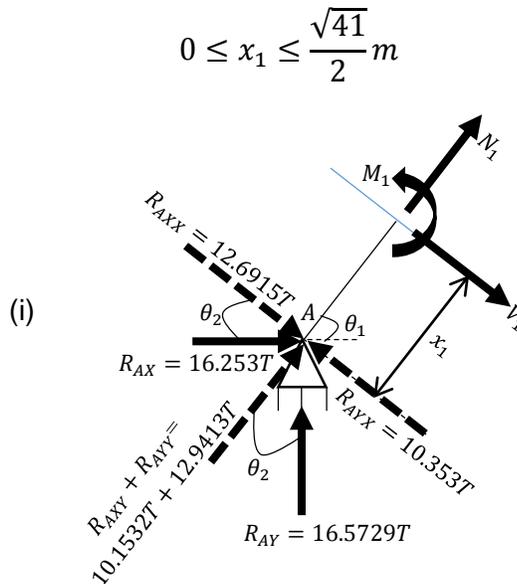
- Para  $R_{DY} = 12.9247T$

$$\sin \theta_3 = \frac{R_{DYY}}{R_{DY}} \Rightarrow R_{DYY} = R_{DY} \sin \theta_3 = 12.9247T \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 9.13914T$$

$$\cos \theta_3 = \frac{R_{DYX}}{R_{DY}} \Rightarrow R_{DYX} = R_{DY} \cos \theta_3 = 12.9247T \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 9.13914T$$

Miembro A – B.

Corte en el tramo ①. Se secciona la estructura perpendicularmente al eje del miembro a una distancia  $x_1$  de A, antes del punto donde se encuentra aplicada la carga puntual de  $8T$ ; el diagrama de cuerpo libre de la sección cortada, figura 2-5i, con su análisis son



$$0 \leq x_1 \leq \frac{\sqrt{41}}{2} m$$

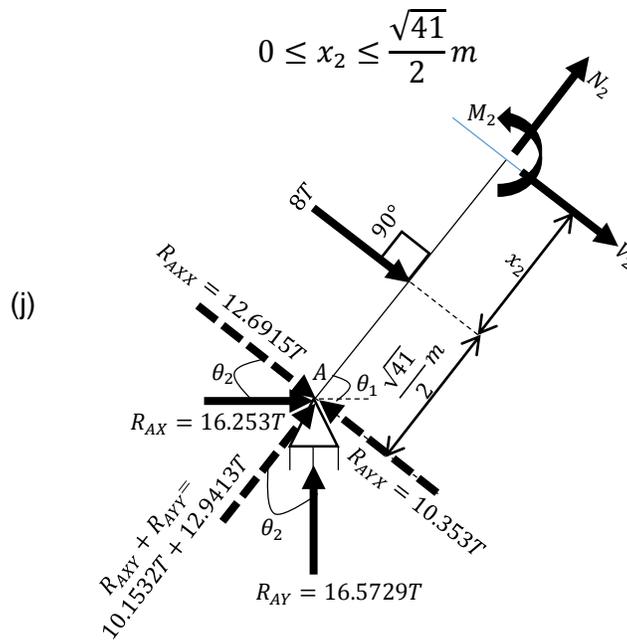
$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow 10.353(x_1) - 12.6915(x_1) - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = -2.3385x_1$$

$$\text{en } x_1 = \frac{\sqrt{41}}{2} m, M_1 = -7.48685T \cdot m$$

$$\sum FX = 0 \Rightarrow 12.6915 - 10.353 + V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = -2.3385$$

$$\sum FY = 0 \Rightarrow 10.1532 + 12.9413 + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = -23.0945$$

Corte en el tramo ②. Se secciona al marco perpendicularmente al eje del miembro a una distancia  $x_2$  del punto de aplicación de la carga puntual de  $8T$ ; en la figura 2-5j se muestra el diagrama de cuerpo libre de la porción inferior de la estructura para definir las acciones internas. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene



$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow (10.353 - 12.6915) \left( \frac{\sqrt{41}}{2} + x_2 \right) - 8(x_2) - M_2 = 0$$

$$M_2 = -10.3385x_2 - 7.48685$$

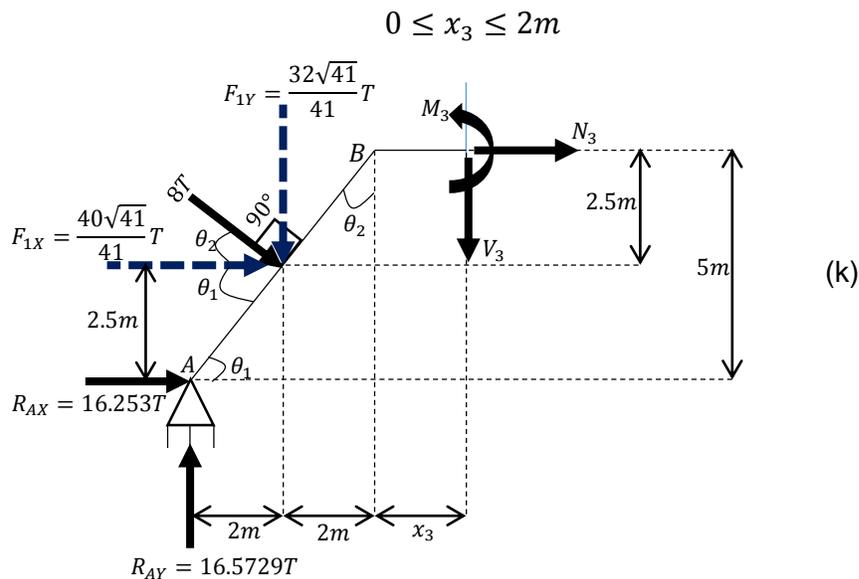
en  $x_2 = 0, M_2 = -7.48685T \cdot m$ ; en  $x_2 = \frac{\sqrt{41}}{2} m, M_2 = -40.5862T \cdot m$

$$\sum FX = 0 \Rightarrow 12.6915 - 10.353 + 8 + V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = -10.3385$$

$$\sum FY = 0 \Rightarrow N_2 = -23.0945$$

Miembro B - C.

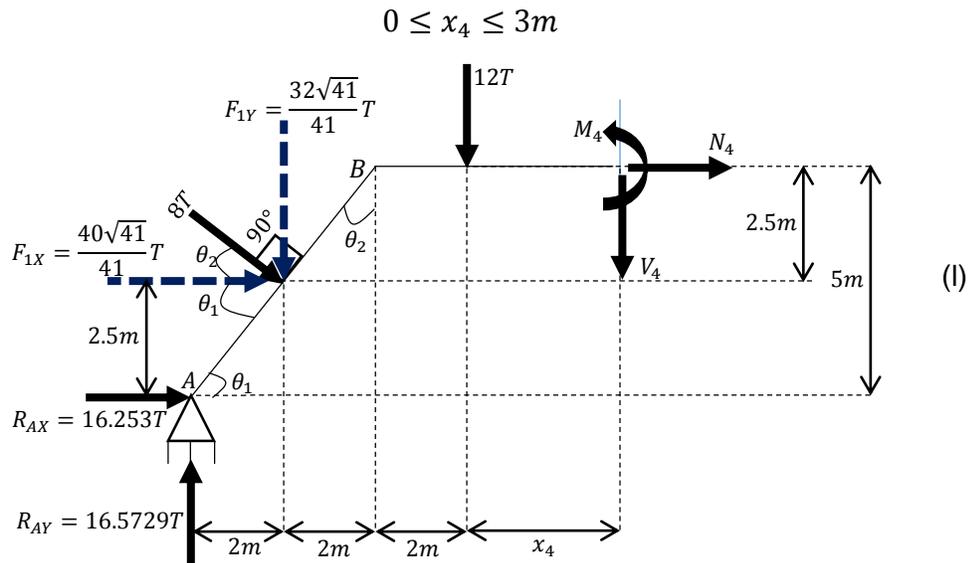
Corte en el tramo (3). Se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a



la porción izquierda de la estructura que se produce al cortarla (perpendicularmente al eje del miembro) en algún sitio intermedio del tramo comprendido desde  $B$  hasta el punto de ubicación de la fuerza de  $12T$ , figura 2-5k. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_{corte} &= 0 \\ (16.5729)(4 + x_3) - 16.253(5) - \left(\frac{40\sqrt{41}}{41}\right)(2.5) - \left(\frac{32\sqrt{41}}{41}\right)(2 + x_3) - M_3 &= 0 \\ M_3 &= 11.5753x_3 - 40.5859 \\ x_3 = 0, M_3 &= -40.5859T.m; \quad x_3 = 2m, M_3 = -17.4352T.m \\ +\uparrow \sum F_Y &= 0 \Rightarrow 16.5729 - \frac{32\sqrt{41}}{41} - V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = 11.5753 \\ +\rightarrow \sum F_X &= 0 \Rightarrow 16.253 + \frac{40\sqrt{41}}{41} + N_3 = 0 \Rightarrow N_3 = -22.5 \end{aligned}$$

Corte en el tramo ④. Se secciona al marco perpendicularmente al eje del miembro a una distancia  $x_4$  del punto donde está aplicada la fuerza de  $12T$ ; en la figura 2-5l se muestra el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la estructura. El equilibrio estático del cuerpo libre implica que



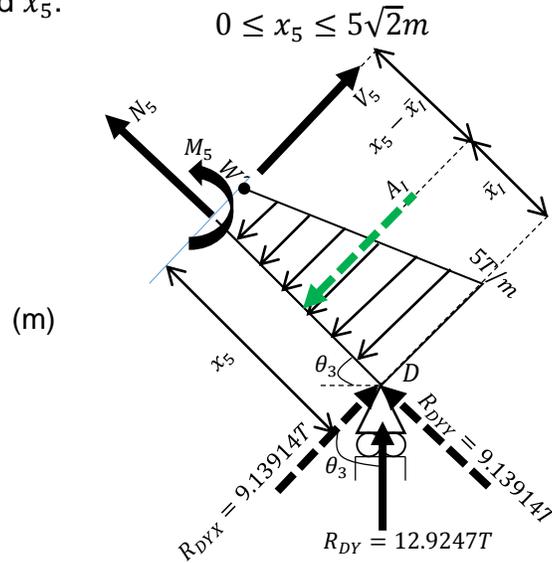
$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_{corte} &= 0 \\ 16.5729(6 + x_4) - 16.253(5) - \frac{40\sqrt{41}}{41}(2.5) - \frac{32\sqrt{41}}{41}(4 + x_4) - 12(x_4) - M_4 &= 0 \\ M_4 &= -0.42466x_4 - 17.4352 \\ \text{en } x_4 = 0, M_4 &= -17.4352T.m; \quad \text{en } x_4 = 3m, M_4 = -18.7092T.m \end{aligned}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 16.5729 - \frac{32\sqrt{41}}{41} - 12 - V_4 = 0 \Rightarrow V_4 = -0.42466$$

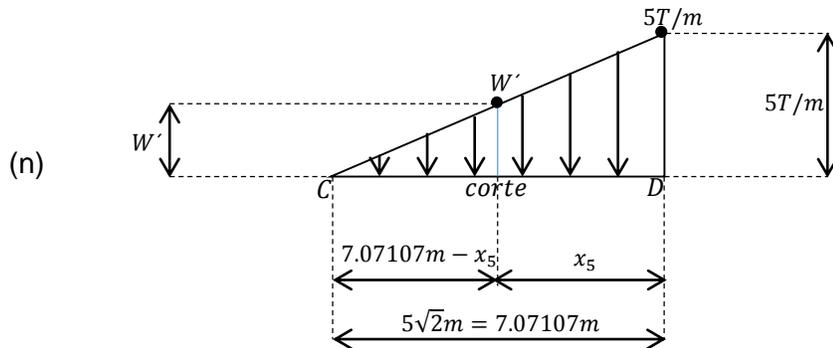
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow N_4 = -22.5$$

Miembro  $D - C$ .

Corte en el tramo ⑤. Se secciona la estructura perpendicularmente al eje del miembro en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $D - C$ ) a una distancia  $x_5$  de  $D$ ; en la figura 2-5m se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento de estructura con longitud  $x_5$ .

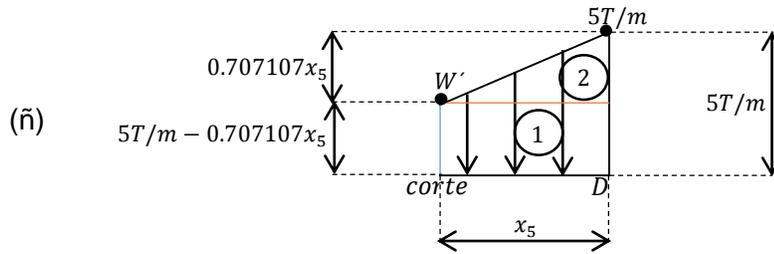


Se procede a realizar un análisis de la carga trapezoidal. El siguiente esquema, figura 2-5n, en el que se ha rotado el miembro  $D - C$ , es útil para determinar el valor en función de  $x_5$  de la intensidad  $W'$ . Aplicando triángulos semejantes se tiene



$$\frac{5}{7.07107} = \frac{W'}{7.07107 - x_5} \Rightarrow W' = \frac{5(7.07107 - x_5)}{7.07107} = 5 - 0.707107x_5$$

A partir de la figura 2-5ñ se determina el área  $A_I$  bajo la recta que representa la fuerza resultante. Esta fuerza actúa a través del centroide de su área  $\bar{x}_I$ .



$$A_I = A_1 + A_2 = (x_5)(5 - 0.707107x_5) + \frac{(x_5)(0.707107x_5)}{2}$$

$$= (5x_5 - 0.707107x_5^2) + (0.353554x_5^2) = 5x_5 - 0.353554x_5^2$$

$$\bar{x}_I = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{(5x_5 - 0.707107x_5^2)\left(\frac{1}{2}x_5\right) + (0.353554x_5^2)\left(\frac{1}{3}x_5\right)}{5x_5 - 0.353554x_5^2} = \frac{2.5x_5^2 - 0.235702x_5^3}{5x_5 - 0.353554x_5^2}$$

Si se aplican las ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cuerpo libre, resulta

$$\curvearrowright \sum M_{\text{corte}} = 0$$

$$-9.13914x_5 + (5x_5 - 0.353554x_5^2)\left(x_5 - \frac{2.5x_5^2 - 0.235702x_5^3}{5x_5 - 0.353554x_5^2}\right) - M_5 = 0$$

$$M_5 = -0.117851x_5^3 + 2.5x_5^2 - 9.13914x_5$$

$$\text{en } x_5 = 5\sqrt{2}m, M_5 = 18.7098T.m$$

$$\nearrow \sum FX = 0 \Rightarrow 9.13914 - (5x_5 - 0.353554x_5^2) + V_5 = 0$$

$$V_5 = -0.353554x_5^2 + 5x_5 - 9.13914$$

$$\nwarrow \sum FY = 0 \Rightarrow N_5 + 9.13914 = 0 \Rightarrow N_5 = -9.13914$$

### Diagramas de fuerza cortante, de momento flector y de fuerza normal

Diagrama de fuerza cortante, figura 2-5o.

Para encontrar la posición del cortante igual a cero en el miembro  $D - C$ , es decir, donde el momento es máximo, hacemos

$$0 = -0.353554x_5^2 + 5x_5 - 9.13914$$

Al resolver la ecuación de segundo grado resulta

$$x_5 = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(-0.353554)(-9.13914)}}{2(-0.353554)} \Rightarrow x_{5,1} = 2.15674; x_{5,2} = 11.9854$$

Como la solución debe de estar dentro del intervalo real del miembro  $[0, 5\sqrt{2}m]$ , se infiere que  $x_{5max} = 2.15674m$ .

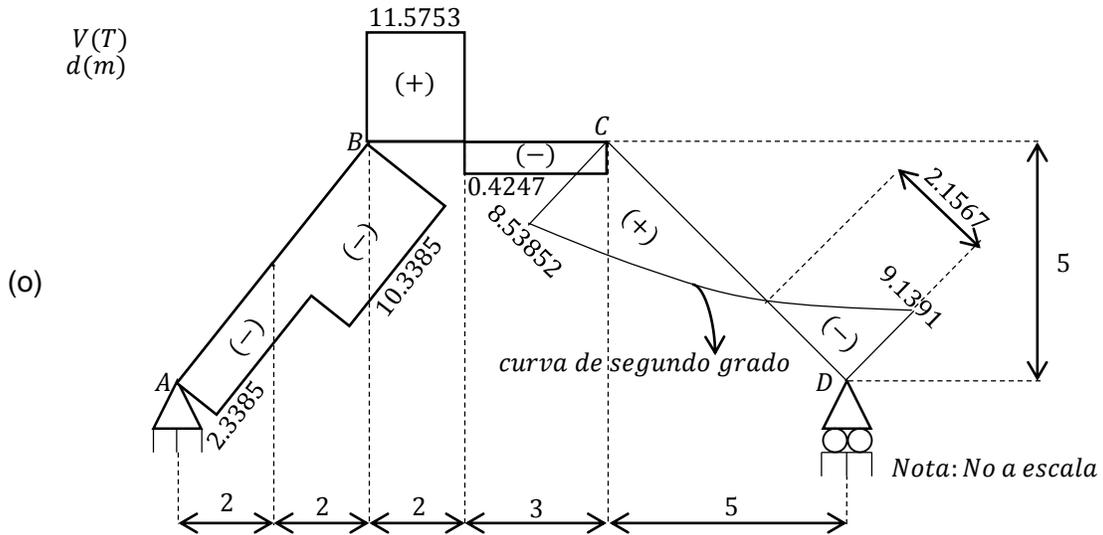
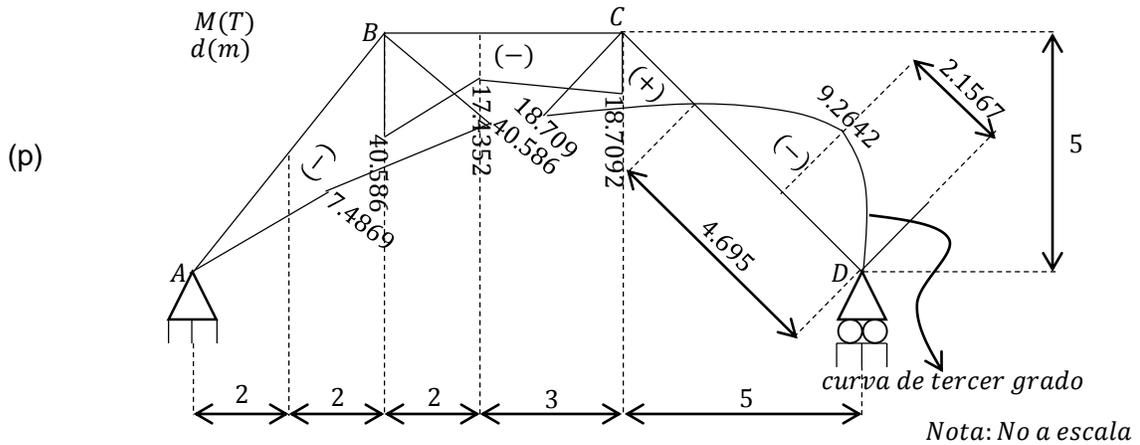


Diagrama de momento flexionante, figura 2-5p.



Un valor máximo del momento en el miembro  $D - C$  puede ser hallado sustituyendo  $x_5 = x_{5max}$  en la ecuación de  $M_5$ .

$$M_{5max1} = -0.117851(2.15674)^3 + 2.5(2.15674)^2 - 9.13914(2.15674) = -9.26423T.m$$

El otro momento máximo se determina evaluando  $M_5$  en el extremo  $x_5 = 5\sqrt{2}m$ .

$$M_{5max2} = -0.117851(5\sqrt{2})^3 + 2.5(5\sqrt{2})^2 - 9.13914(5\sqrt{2}) = 18.7099T.m$$

La posición del momento igual a cero en este mismo miembro puede hallarse al hacer

$$0 = -0.117851x_5^3 + 2.5x_5^2 - 9.13914x_5$$

Como el momento nulo debe estar posicionado en el intervalo real del miembro  $[0, 5\sqrt{2}m]$ , se cumple que una de las tres raíces esté dentro del rango de valores citado; tal raíz puede ser calculada aplicando el método de tanteos. Para ello, evaluamos el polinomio  $f(x) = -0.117851x_5^3 + 2.5x_5^2 - 9.13914x_5$  en el intervalo mencionado y en donde haya un cambio de signo tenemos una solución; iteramos "n" veces hasta que nuestra solución sea exacta o lo más exacta posible (cuando  $f(x) = 0$  o  $f(x) \sim 0$ ). Los resultados obtenidos se visualizan en la tabla 2-2.

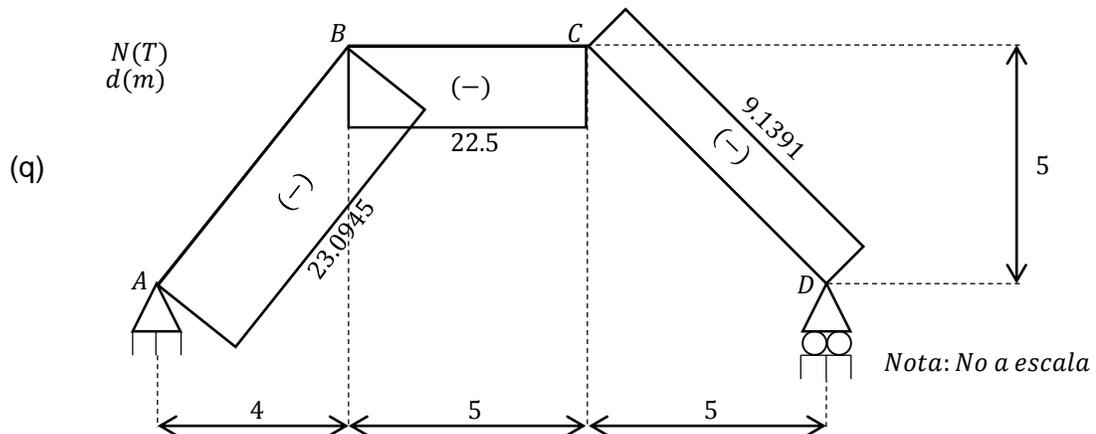
|        |          |     |         |       |          |       |         |
|--------|----------|-----|---------|-------|----------|-------|---------|
| $x_5$  | $f(x_5)$ | 4   | -4.099  | $x_5$ | $f(x_5)$ | 4.68  | -0.095  |
| 0      | 0        | 4.1 | -3.567  | 4.6   | -0.611   | 4.69  | -0.03   |
| 1      | -6.756   | 4.3 | -3.015  | 4.61  | -0.547   | 4.7   | 0.0354  |
| 2      | -9.221   | 4.3 | -2.443  | 4.62  | -0.483   | 4.69  | -0.03   |
| 3      | -8.099   | 4.4 | -1.851  | 4.63  | -0.419   | 4.691 | -0.023  |
| 4      | -4.099   | 4.5 | -1.24   | 4.64  | -0.354   | 4.692 | -0.016  |
| 5      | 2.0729   | 4.6 | -0.611  | 4.65  | -0.29    | 4.693 | -0.01   |
| 6      | 9.7093   | 4.7 | 0.0353  | 4.66  | -0.255   | 4.694 | -0.0039 |
| 7.0711 | 18.7099  | 4.8 | 0.69875 | 4.67  | -0.16    | 4.695 | 0.0027  |

Tabla 2-2

$$\therefore x_{5,1} = 4.695m$$

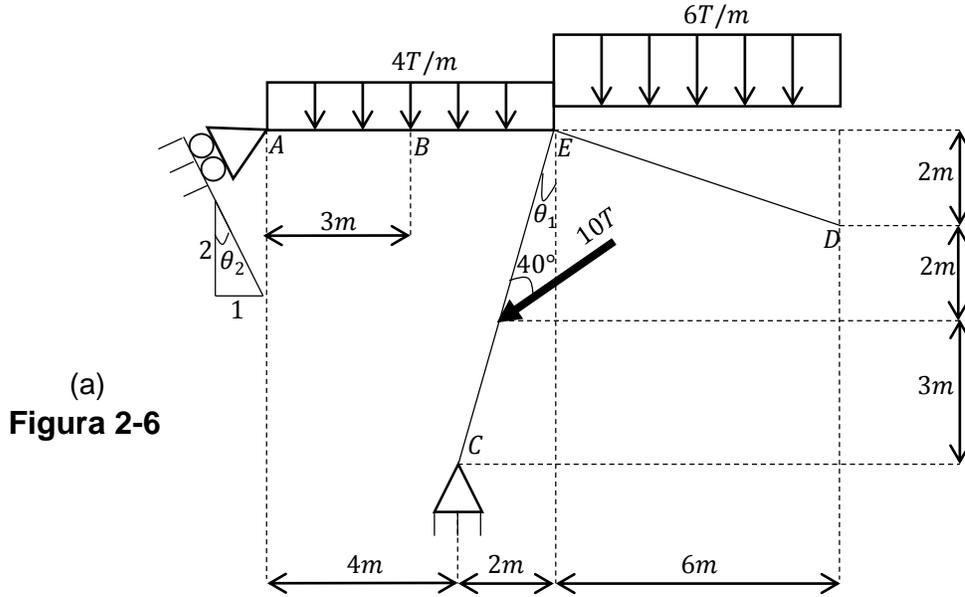
Evidentemente el momento también es cero en  $x_{5,2} = 0$ , es decir, en el punto D.

Diagrama de fuerza normal, figura 2-5q.



2.3 MÉTODO DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

**Ejercicio 2.6** Deduzca las expresiones algebraicas que describen la variación de los elementos mecánicos en cada miembro del marco que se muestra en la figura 2-6a. Además, determine el desplazamiento vertical y la rotación tomando en cuenta sólo las deformaciones debidas a la flexión, ambos en el punto B. Considere que  $EI$  es constante para los tres miembros.

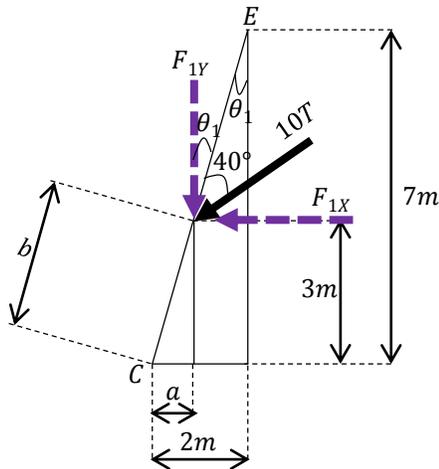


(a) Figura 2-6

SOLUCIÓN

Cálculo de las reacciones en los soportes

**Diagrama de cargas.** Con base en el esquema representado en la figura 2-6b se determinan el ángulo  $\theta_1$  y las distancias  $a$  y  $b$ .

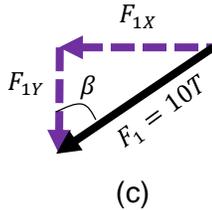


$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{2}{7} = 15.9454^\circ$$

(b)

$$\frac{2m}{7m} = \frac{a}{3m} \Rightarrow a = \frac{2(3)}{7} = 0.857143m \quad b = \sqrt{(0.857143m)^2 + (3m)^2} = 3.12m$$

La fuerza de  $10T$  se resuelve en sus componentes  $X$  y  $Y$ , figura 2-6c.

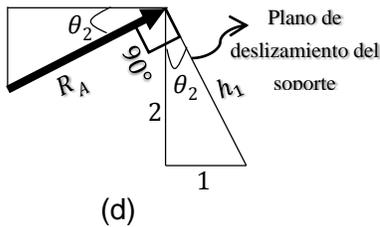


$$\beta = 40^\circ + \theta_1 = 40^\circ + 15.9454^\circ = 55.9454^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{F_{1X}}{F_1} \Rightarrow F_{1X} = 10T(\sin 55.9454^\circ) = 8.28504T$$

$$\cos \beta = \frac{F_{1Y}}{F_1} \Rightarrow F_{1Y} = 10T(\cos 55.9454^\circ) = 5.59983T$$

Los sentidos de las fuerzas reactivas de los apoyos se suponen arbitrariamente. Obsérvese que el apoyo inclinado en A es libre, por lo que la reacción  $R_A$  es perpendicular al plano en que puede deslizarse dicho soporte, figura 2-6d. A partir de la figura 2-6e, se resuelve  $R_A$  en sus componentes rectangulares.

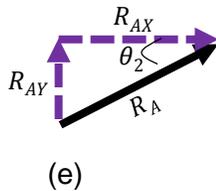


$$h_1 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\sin \theta_2 = 1/\sqrt{5}$$

$$\cos \theta_2 = 2/\sqrt{5}$$

(d)



$$\sin \theta_2 = R_{AY}/R_A \Rightarrow R_{AY} = \frac{1}{\sqrt{5}}R_A$$

$$\cos \theta_2 = R_{AX}/R_A \Rightarrow R_{AX} = \frac{2}{\sqrt{5}}R_A$$

(e)

Las cargas concentradas equivalentes  $A_i$  de las cargas distribuidas uniformemente y sus puntos de aplicación  $\bar{x}_i$  son

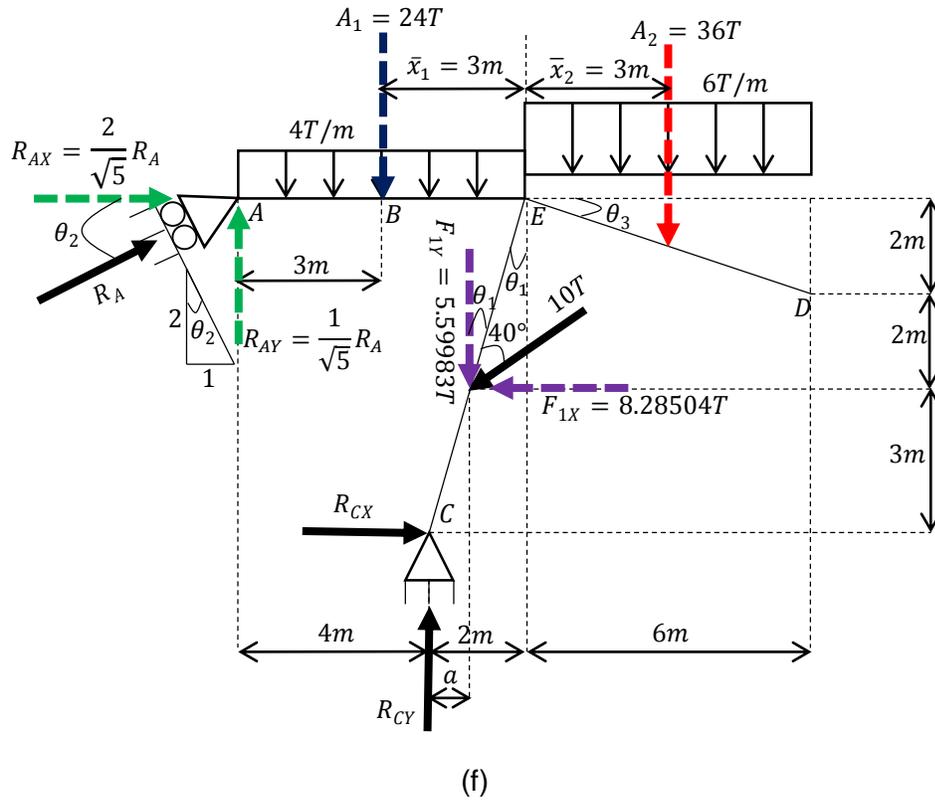
- Para  $W_1 = 4T/m$

$$A_1 = (4T/m)(6m) = 24T \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{2}(6m) = 3m$$

- Para  $W_2 = 6T/m$

$$A_2 = (6T/m)(6m) = 36T \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2}(6m) = 3m$$

En la figura 2-6f se visualiza el diagrama de cargas de la estructura.



**Ecuaciones de equilibrio.** Al haber descompuesto  $R_A$  en sus componentes rectangulares  $X$  y  $Y$ , y al sumar los momentos alrededor de  $C$  se obtiene una solución directa para  $R_A$ . Con este resultado es posible obtener  $R_{CX}$  y  $R_{CY}$ .

$$\begin{aligned} \sum MC = 0 &\Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}}R_A\right)(7) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}R_A\right)(4) - 24(1) + 36(5) + 5.59983(0.857143) \\ &- 8.28504(3) = 0 \Rightarrow R_A = -\frac{135.9447}{\frac{18\sqrt{5}}{5}} = -16.8879 \Rightarrow \therefore R_A = 16.8879T \end{aligned}$$

$$R_{AY} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-16.8879) = -7.5525 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 7.5525T$$

$$R_{AX} = \frac{2}{\sqrt{5}}(-16.8879) = -15.105 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 15.105T$$

Los sentidos que se propusieron para  $R_A$  y sus componentes  $R_{AY}$  y  $R_{AX}$  tuvieron que invertirse ya que se obtuvieron magnitudes negativas en ellas. Para las siguientes dos ecuaciones deben usarse los sentidos correctos.

$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -15.105 - 8.28504 + R_{CX} = 0 \Rightarrow R_{CX} = 23.39 \Rightarrow \therefore R_{CX} = 23.39T \longrightarrow$$

$$\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -7.5525 - 24 - 36 - 5.59983 + R_{CY} = 0$$

$$R_{CY} = 73.1523 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 73.1523T \uparrow$$

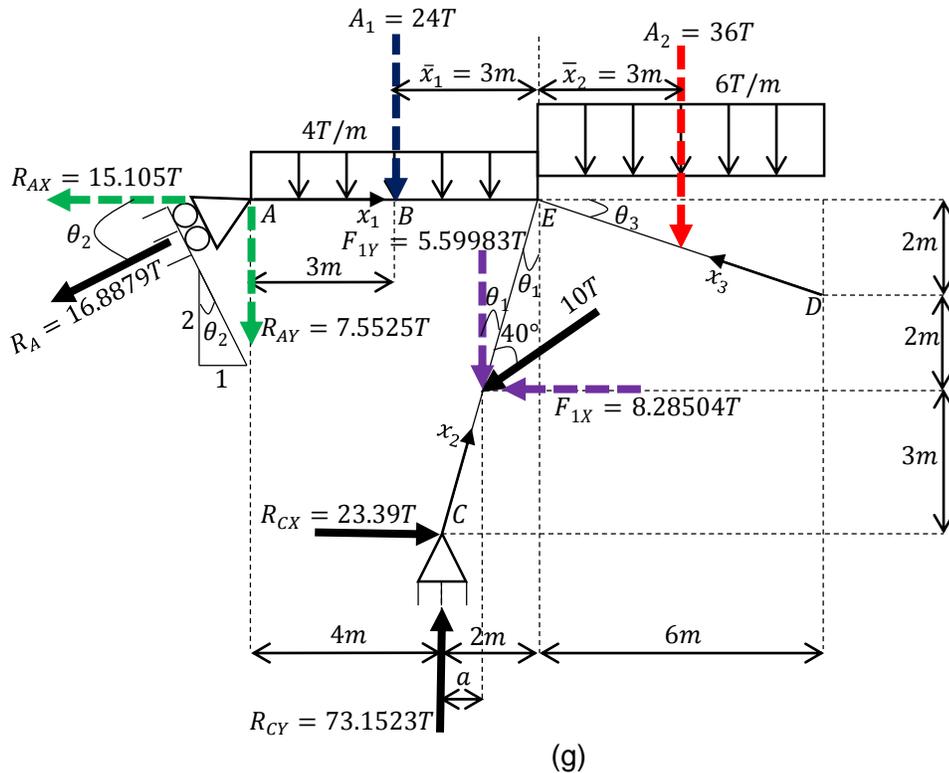
Como comprobación, se tiene que

$$\curvearrowright \sum MA = 0$$

$$24(3) + 5.59983(4.857143) + 8.28504(4) + 36(9) - 23.39(7) - 73.1523(4) \approx 0 \text{ ok}$$

### Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector

Los resultados obtenidos se presentan en la figura 2-6g.



Las funciones de las acciones internas son discontinuas en  $E$  por cualquiera de las siguientes dos razones que ocurren en ese punto: la magnitud de la carga distribuida uniforme cambia y existe un cambio en la geometría de la estructura. De igual forma, son discontinuas en el punto de aplicación de la fuerza de  $10T$ .

Se aplica el método de las secciones para obtener las expresiones algebraicas que describan la variación de los elementos mecánicos.

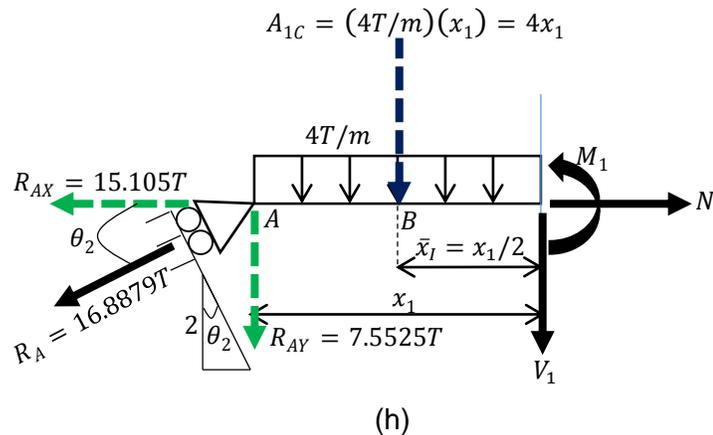
Se ha optado por definir una sola coordenada  $x$  para cada miembro, es decir, las coordenadas  $x_1, x_2$  y  $x_3$  que tienen sus orígenes en  $A, C$  y  $D$ , son válidas sólo dentro de las regiones desde  $A$  hasta  $E$  para  $x_1$ , de  $C$  a  $E$  para  $x_2$  y de  $D$  a  $E$  para  $x_3$ .

Debe seccionarse perpendicularmente a su correspondiente eje, al miembro  $A - E$  en un punto arbitrario (intermedio en su longitud) a una distancia  $x_1$  de  $A$ , figura 2-6h, al miembro  $C - E$  en un punto arbitrario a una distancia  $x_2$  de  $C$  en dos ocasiones, primero, en un punto intermedio a la región que va de  $C$  al punto de aplicación de la carga de  $10T$ , figura 2-6l, y luego en un punto intermedio a la región que va desde el punto de aplicación de la carga de  $10T$  hasta  $B$ , figura 2-6m, y al miembro  $D - E$  en un punto arbitrario (intermedio en su longitud) a una distancia  $x_3$  de  $D$ , figura 2-6q.

Las funciones de las acciones internas para cada región distinta por miembro son deducidas a continuación

Miembro  $A - E$ .

$$0 \leq x_1 \leq 6m$$



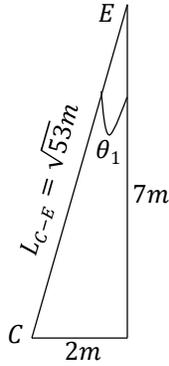
$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -7.5525(x_1) - 4x_1 \left( \frac{x_1}{2} \right) - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = -(7.5525x_1 + 2x_1^2)$$

$$\uparrow + \sum F_Y = 0 \Rightarrow -7.5525 - 4x_1 - V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = -(7.5525 + 4x_1)$$

$$\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow -15.105 + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = 15.105$$

Miembro  $C - E$ .

De acuerdo a la figura 2-6i, la longitud de este elemento inclinado es



(i)

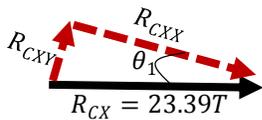
$$L_{C-E} = \sqrt{(2m)^2 + (7m)^2} = \sqrt{53}m$$

$$\sin \theta_1 = \frac{2}{\sqrt{53}}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{7}{\sqrt{53}}$$

Las componentes rectangulares de las reacciones  $R_{CX}$  y  $R_{CY}$  para los ejes que coinciden con las líneas de acción de la fuerza normal y de la fuerza cortante del miembro  $C - E$  son

- Para  $R_{CX} = 23.39T$

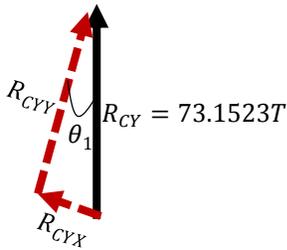


(j)

$$\sin \theta_1 = \frac{R_{CXY}}{R_{CX}} \Rightarrow R_{CXY} = R_{CX} \sin \theta_1 = 23.39T \left( \frac{2}{\sqrt{53}} \right) = 6.42573T$$

$$\cos \theta_1 = \frac{R_{CXX}}{R_{CX}} \Rightarrow R_{CXX} = R_{CX} \cos \theta_1 = 23.39T \left( \frac{7}{\sqrt{53}} \right) = 22.49T$$

- Para  $R_{CY} = 73.1523T$

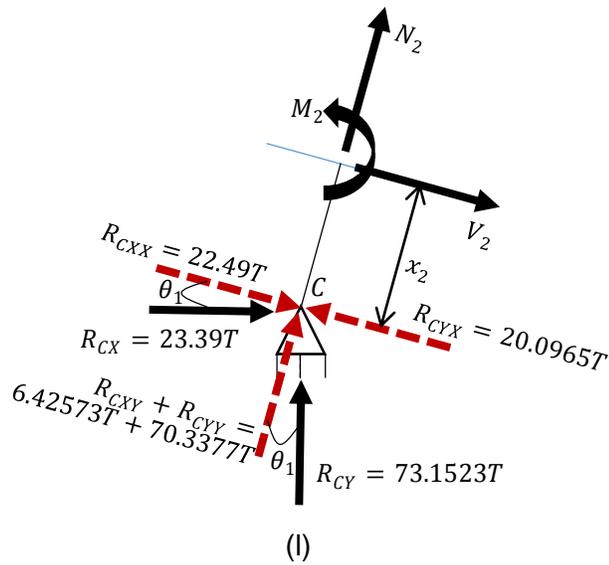


(k)

$$\sin \theta_1 = \frac{R_{CYX}}{R_{CY}} \Rightarrow R_{CYX} = R_{CY} \sin \theta_1 = 73.1513T \left( \frac{2}{\sqrt{53}} \right) = 20.0965T$$

$$\cos \theta_1 = \frac{R_{CYY}}{R_{CY}} \Rightarrow R_{CYY} = R_{CY} \cos \theta_1 = 73.1523T \left( \frac{7}{\sqrt{53}} \right) = 70.3377T$$

$$0 \leq x_2 \leq 3.12m$$

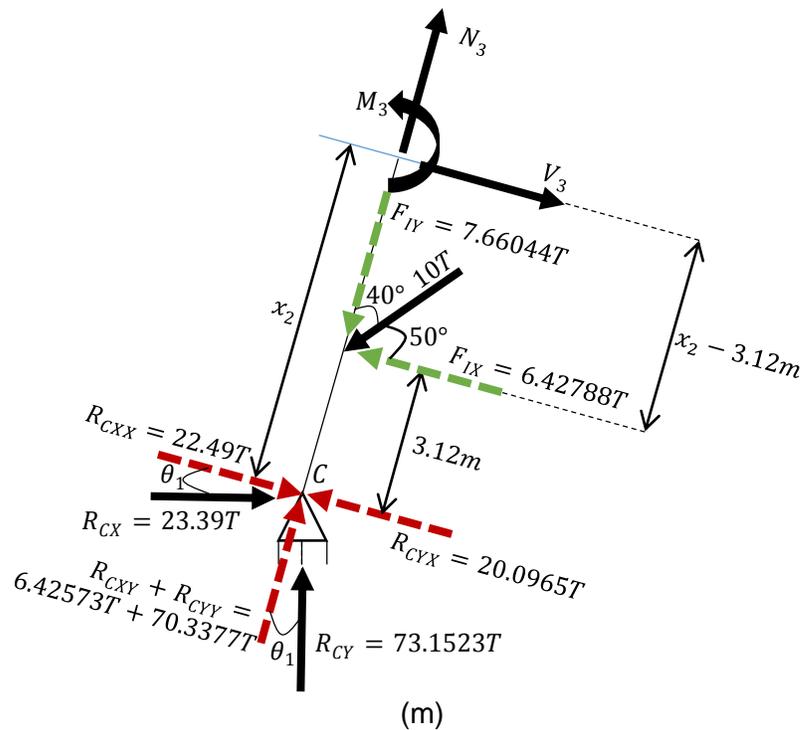


$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -22.49x_2 + 20.0965x_2 - M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = -2.3935x_2$$

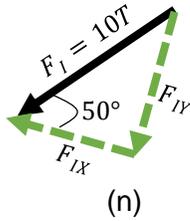
$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 22.49 - 20.0965 + V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = -2.3935$$

$$\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 6.42573 + 70.3377 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -76.7634$$

$$3.12m \leq x_2 \leq \sqrt{53}m$$



De acuerdo a la figura 2-6n, las componentes rectangulares de la fuerza de 10T para los ejes que coinciden con las líneas de acción de  $N_3$  y  $V_3$  son



$$\sin 50^\circ = \frac{F_{1Y}}{10T} \Rightarrow F_{1Y} = 10T \sin 50^\circ = 7.66044T$$

$$\cos 50^\circ = \frac{F_{1X}}{10T} \Rightarrow F_{1X} = 10T \cos 50^\circ = 6.42788T$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -22.49x_2 + 20.0965x_2 + 6.42788(x_2 - 3.12) - M_3 = 0$$

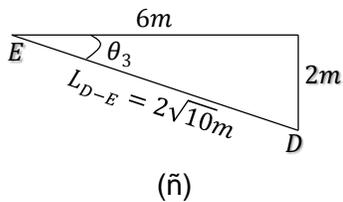
$$M_3 = 4.03438x_2 - 20.055$$

$$\sum FX = 0 \Rightarrow 22.49 - 20.0965 - 6.42788 + V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = 4.03438$$

$$\sum FY = 0 \Rightarrow 6.42573 + 70.3377 - 7.66044 + N_3 = 0 \Rightarrow N_3 = -69.103$$

Miembro  $D - E$ .

Se calcula la longitud de este elemento inclinado con base en la figura 2-6ñ.

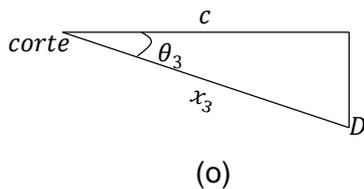


$$L_{D-E} = \sqrt{(6m)^2 + (2m)^2} = 2\sqrt{10}m$$

$$\sin \theta_3 = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \cos \theta_3 = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$0 \leq x_3 \leq 2\sqrt{10}m$$

A partir de la figura 2-6o, la distancia  $c$  sobre la cual se extiende la carga distribuida uniforme cortada es

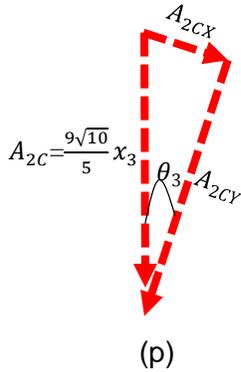


$$\cos \theta_3 = \frac{c}{x_3} \Rightarrow c = x_3 \cos \theta_3 = \frac{3}{\sqrt{10}}x_3$$

La fuerza resultante de tal carga y su ubicación son

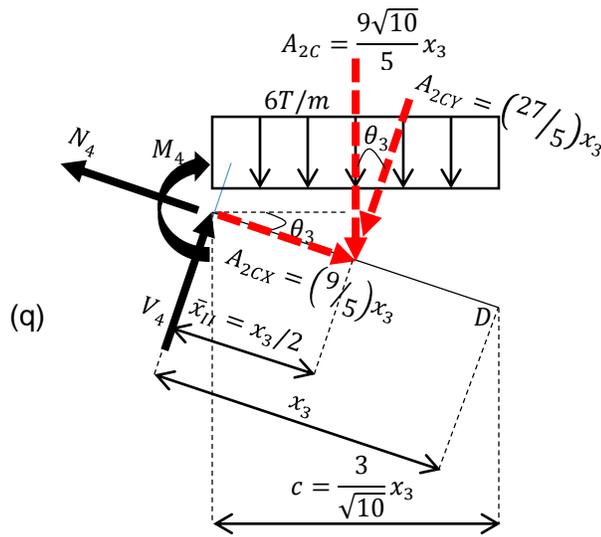
$$A_{2c} = (6T/m) \left( \frac{3}{\sqrt{10}}x_3 \right) = \frac{9\sqrt{10}}{5}x_3 \quad \bar{x}_{II} = \frac{1}{2}(x_3) = \frac{x_3}{2}$$

De la figura 2-6p, se tiene que las componentes rectangulares de  $A_{2C}$  para los ejes que coinciden con las líneas de acción de  $N_4$  y  $V_4$  son



$$\sin \theta_3 = \frac{A_{2CX}}{A_{2C}} \Rightarrow A_{2CX} = A_{2C} \sin \theta_3 = \left( \frac{9\sqrt{10}}{5} x_3 \right) \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = \frac{9}{5} x_3$$

$$\cos \theta_3 = \frac{A_{2CY}}{A_{2C}} \Rightarrow A_{2CY} = A_{2C} \cos \theta_3 = \left( \frac{9\sqrt{10}}{5} x_3 \right) \left( \frac{3}{\sqrt{10}} \right) = \frac{27}{5} x_3$$



$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_{corte} = 0 &\Rightarrow \left( \frac{27}{5} x_3 \right) \left( \frac{x_3}{2} \right) + M_4 = 0 \Rightarrow M_4 = -\frac{27}{10} x_3^2 \\ \nearrow + \sum FY = 0 &\Rightarrow V_4 - \frac{27}{5} x_3 = 0 \Rightarrow V_4 = \frac{27}{5} x_3 \end{aligned}$$

o también, como el corte fue efectuado en la cara derecha, el cortante es igual a la derivada negativa del momento, es decir,

$$V_4 = -\frac{dM_4}{dx_3} = -\frac{d\left(-\frac{27}{10}x_3^2\right)}{dx_3} = \frac{27}{5}x_3$$

$$\searrow + \sum FX = 0 \Rightarrow -N_4 + \frac{9}{5}x_3 = 0 \Rightarrow N_4 = \frac{9}{5}x_3$$

Para calcular **el desplazamiento vertical en B**, se sigue el siguiente procedimiento:

**Momentos reales  $M$**

Los momentos internos  $M$  fueron deducidos en la estructura real. Efectuando un recuento tenemos

Miembro  $A - E$ .

$$M_1 = -(7.5525x_1 + 2x_1^2) \quad 0 \leq x_1 \leq 6m$$

Miembro  $C - E$ .

$$M_2 = -2.3935x_2 \quad 0 \leq x_2 \leq 3.12m$$

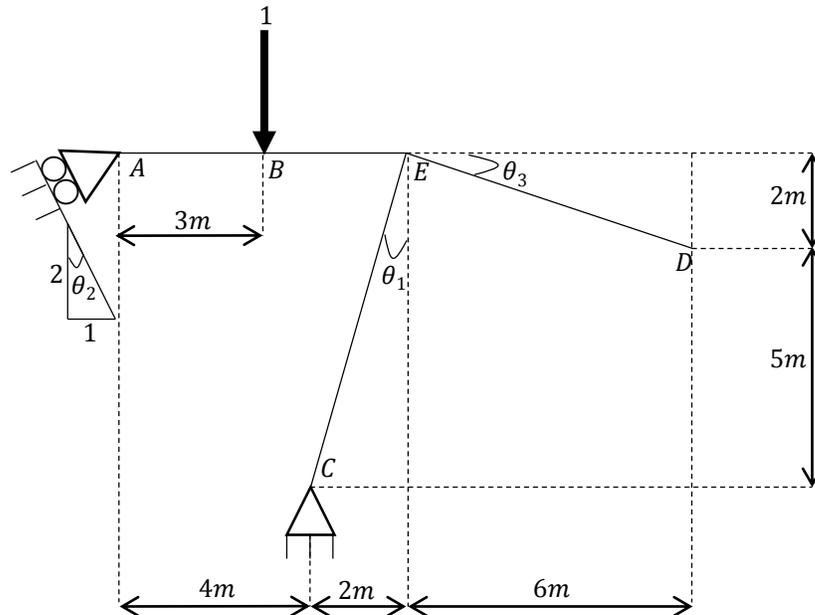
$$M_3 = 4.03438x_2 - 20.055 \quad 3.12m \leq x_2 \leq \sqrt{53}m$$

Miembro  $D - E$ .

$$M_4 = -\frac{27}{10}x_3^2 \quad 0 \leq x_3 \leq 2\sqrt{10}m$$

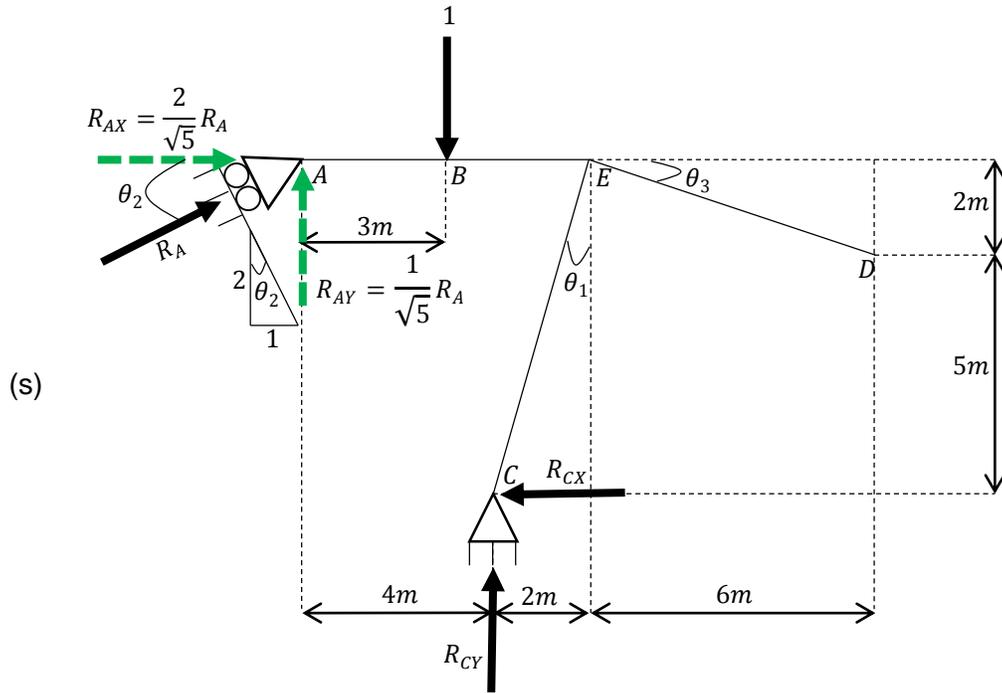
**Momentos virtuales  $m$**

Se aplica una carga virtual unitaria en el punto y en la dirección donde se requiere conocer el desplazamiento y su sentido se elige arbitrariamente; en este caso, la carga debe ser vertical, en  $B$  y se opta por colocarla hacia abajo (puede ir hacia arriba), justo como se observa en la figura 2-6r. Las cargas reales son removidas y una vez que se calculen las reacciones en los soportes se deducen los momentos internos  $m$  usando las mismas coordenadas  $x$  que se usaron para  $M$ .



(r)

El diagrama de cargas en el que los sentidos de las reacciones en los apoyos se suponen arbitrariamente se observa en la figura 2-6s.



Al aplicar las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\curvearrowleft \sum MC = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}}R_A\right)(7) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}R_A\right)(4) - (1)(1) = 0 \Rightarrow R_A = \frac{1}{\frac{18\sqrt{5}}{5}} \Rightarrow \therefore R_A = \frac{\sqrt{5}}{18} \rightarrow$$

$$\therefore R_{AX} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{18}\right) = \frac{1}{9} \rightarrow \quad R_{AY} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{18}\right) = \frac{1}{18} \uparrow$$

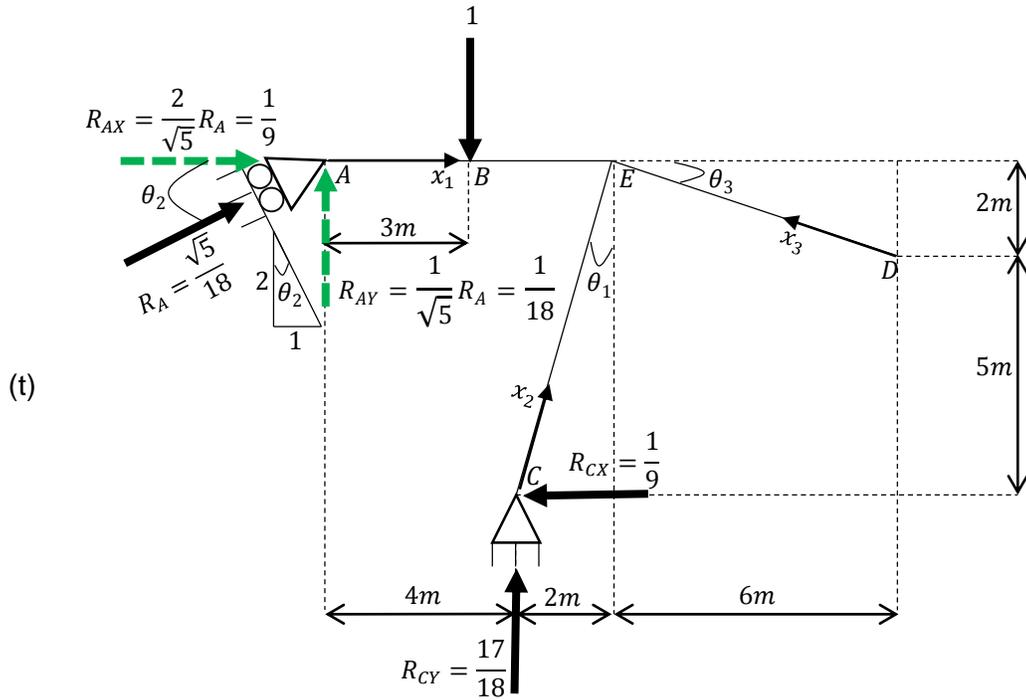
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{1}{9} - R_{CX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{CX} = \frac{1}{9} \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -1 + \frac{1}{18} + R_{CY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = \frac{17}{18} \uparrow$$

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 2-6t. Las funciones de momento, que son discontinuas en B debido a la carga unitaria y en E por el cambio de geometría existente en la estructura, se deducen aplicando el método de las secciones.

Deben seccionarse perpendicularmente a su correspondiente eje, al miembro A – E en un punto arbitrario a una distancia  $x_1$  de A en dos ocasiones, primero en un punto intermedio a la región que va de A a B y luego en un punto intermedio a la región que va desde B hasta C, al miembro C – E en un punto arbitrario (intermedio en su

longitud) a una distancia  $x_2$  de  $C$ , y al miembro miembro  $D - E$  en un punto arbitrario (intermedio a la región  $D - E$ ) a una distancia  $x_3$  de  $D$ .

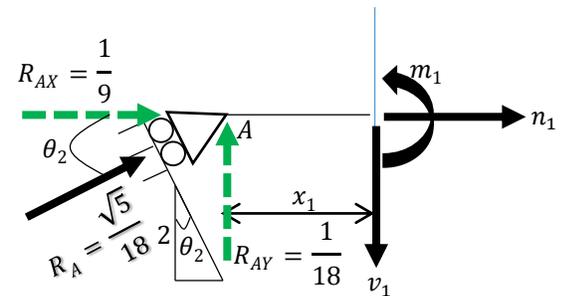


Las funciones de momento  $m$  para cada región distinta por miembro son deducidas con base en la figuras 2-6u, 2-6v, 2-6w y 2-6x.

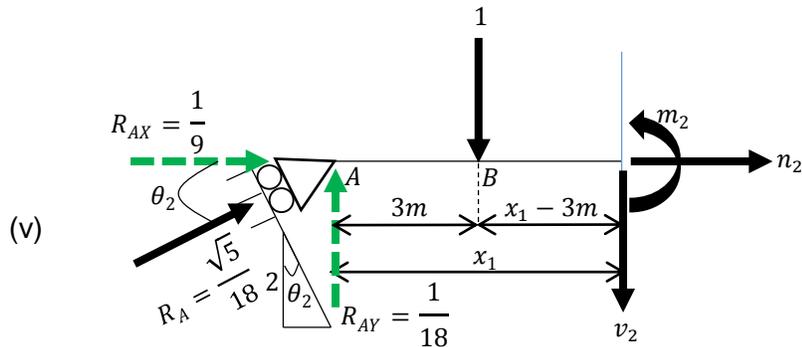
Miembro  $A - E$

$$0 \leq x_1 \leq 3m$$

$$\sum m_{corte} = 0 \Rightarrow \frac{1}{18}(x_1) - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{18}x_1$$



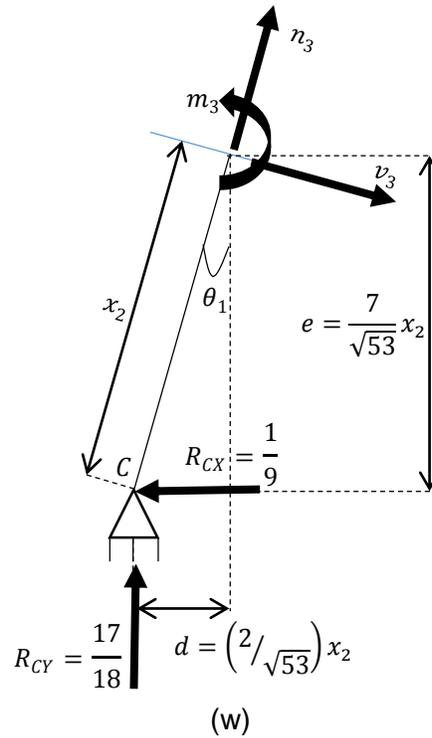
$$3m \leq x_1 \leq 6m$$



$$\sum m_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{18}x_1 - 1(x_1 - 3) - m_2 = 0 \Rightarrow m_2 = 3 - \frac{17}{18}x_1$$

Miembro C - E

$$0 \leq x_2 \leq \sqrt{53}m$$



Como únicamente nos interesa conocer  $m_3$ , podemos tomar momentos alrededor del punto del corte considerando los ejes horizontal y vertical que pasan por tal punto y con ello evitar el descomponer a las reacciones en sus componentes rectangulares que coinciden con las líneas de acción de  $n_3$  y  $v_3$ . Las distancias  $a$  y  $d$  son

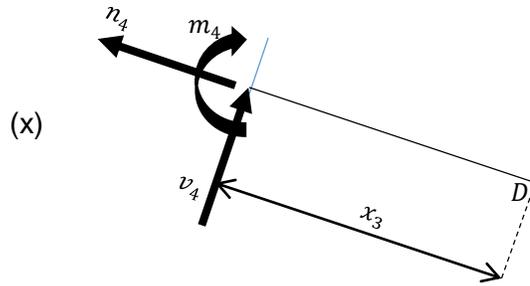
$$\sin\theta_1 = \frac{d}{x_2} \Rightarrow d = x_2 \sin\theta_1 = \frac{2}{\sqrt{53}}x_2$$

$$\cos\theta_1 = \frac{e}{x_2} \Rightarrow e = x_2 \cos\theta_1 = \frac{7}{\sqrt{53}}x_2$$

$$\sum m_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{17}{18}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{53}}x_2\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{7}{\sqrt{53}}x_2\right) - m_3 = 0 \Rightarrow m_3 = \frac{8\sqrt{53}}{159}x_2$$

Miembro  $D - E$

$$0 \leq x_3 \leq 2\sqrt{10}m$$



$$\sum m_{corte} = 0 \Rightarrow m_4 = 0$$

### Ecuación del trabajo virtual

Entonces, el desplazamiento vertical de  $B$  es

$$1 \cdot \Delta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$1 \cdot \delta_{VB} = \int_0^3 \frac{-(7.5525x_1 + 2x_1^2) \left(\frac{1}{18}x_1\right)}{EI} dx_1 + \int_3^6 \frac{-(7.5525x_1 + 2x_1^2) \left(3 - \frac{17}{18}x_1\right)}{EI} dx_1$$

$$\int_0^{3.12} \frac{(-2.3935x_2) \left(\frac{8\sqrt{53}}{159}x_2\right)}{EI} dx_2 + \int_{3.12}^{\sqrt{53}} \frac{(4.03438x_2 - 20.055) \left(\frac{8\sqrt{53}}{159}x_2\right)}{EI} dx_2$$

$$+ \int_0^{2\sqrt{10}} \frac{\left(-\frac{27}{10}x_3^2\right) (0)}{EI} dx_3$$

Resolviendo las integrales por separado tenemos

$$\int_0^3 -(7.5525x_1 + 2x_1^2) \left(\frac{1}{18}x_1\right) dx_1 = \int_0^3 \left(-\frac{x_1^3}{9} - 0.419583x_1^2\right) dx_1$$

$$= [-0.027778x_1^4 - 0.139861x_1^3]_0^3 = -0.027778(3^4 - 0^4) - 0.139861(3^3 - 0^3)$$

$$= -6.02625$$

$$\int_3^6 -(7.5525x_1 + 2x_1^2) \left(3 - \frac{17}{18}x_1\right) dx_1 = \int_3^6 \left(\frac{17}{9}x_1^3 + 1.13292x_1^2 - 22.6575x_1\right) dx_1$$

$$= [0.472222x_1^4 + 0.377639x_1^3 - 11.3288x_1^2]_3^6 = 0.472222(6^4 - 3^4)$$

$$+ 0.377639(6^3 - 3^3) - 11.3288(6^2 - 3^2) = 339.248$$

$$\int_0^{3.12} (-2.3935x_2) \left( \frac{8\sqrt{53}}{159} x_2 \right) dx_2 = \int_0^{3.12} -0.876727x_2^2 dx_2 = [-0.292242x_2^3]_0^{3.12}$$

$$= -0.292242(3.12^3 - 0^3) = -8.87578$$

$$\int_{3.12}^{\sqrt{53}} (4.03438x_2 - 20.055) \left( \frac{8\sqrt{53}}{159} x_2 \right) dx_2 = \int_{3.12}^{\sqrt{53}} (1.4777x_2^2 - 7.34604x_2) dx_2$$

$$= [0.492591x_2^3 - 3.67302x_2^2]_{3.12}^{\sqrt{53}}$$

$$0.492591 \left( (\sqrt{53})^3 - 3.12^3 \right) - 3.67302 \left( (\sqrt{53})^2 - 3.12^2 \right) = 16.188$$

$$\int_0^{2\sqrt{10}} \left( -\frac{27}{10} x_3^2 \right) (0) dx_3 = 0$$

En consecuencia,

$$\delta_{VB} = \frac{1}{EI} (-6.02625 + 339.248 - 8.87578 + 16.188 + 0) = \frac{340.534}{EI}$$

Como la suma algebraica de todas las integrales para todo el marco es positiva, el desplazamiento vertical en  $B$  tiene el mismo sentido que el supuesto para la carga virtual unitaria.

$$\therefore \delta_{VB} = \frac{340.534}{EI} \downarrow$$

Para calcular la **pendiente (giro o rotación) en  $B$** , se sigue el siguiente procedimiento:

### Momentos reales $M$

Los momentos internos  $M$  ya han sido deducidos en la estructura real y corresponden a las siguientes funciones

Miembro  $A - E$ .

$$M_1 = -(7.5525x_1 + 2x_1^2) \quad 0 \leq x_1 \leq 6m$$

Miembro  $C - E$ .

$$M_2 = -2.3935x_2 \quad 0 \leq x_2 \leq 3.12m$$

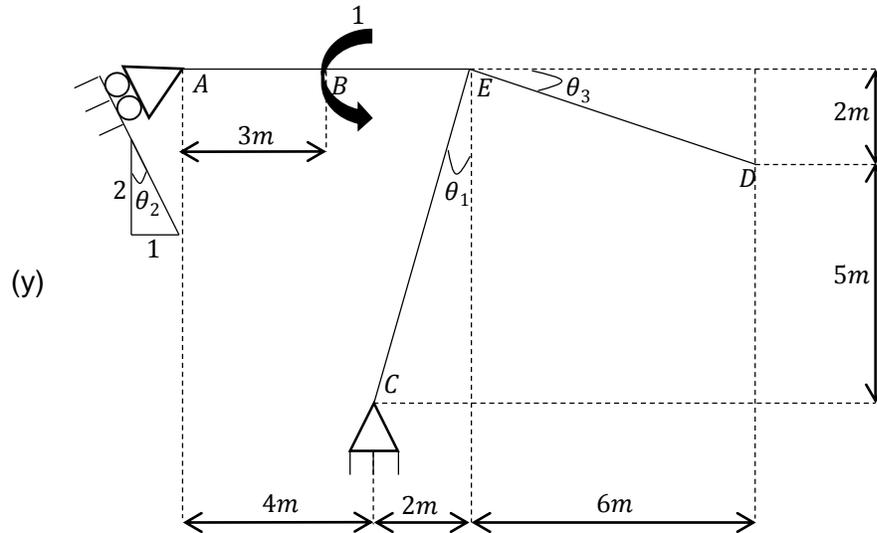
$$M_3 = 4.03438x_2 - 20.055 \quad 3.12m \leq x_2 \leq \sqrt{53}m$$

Miembro  $D - E$ .

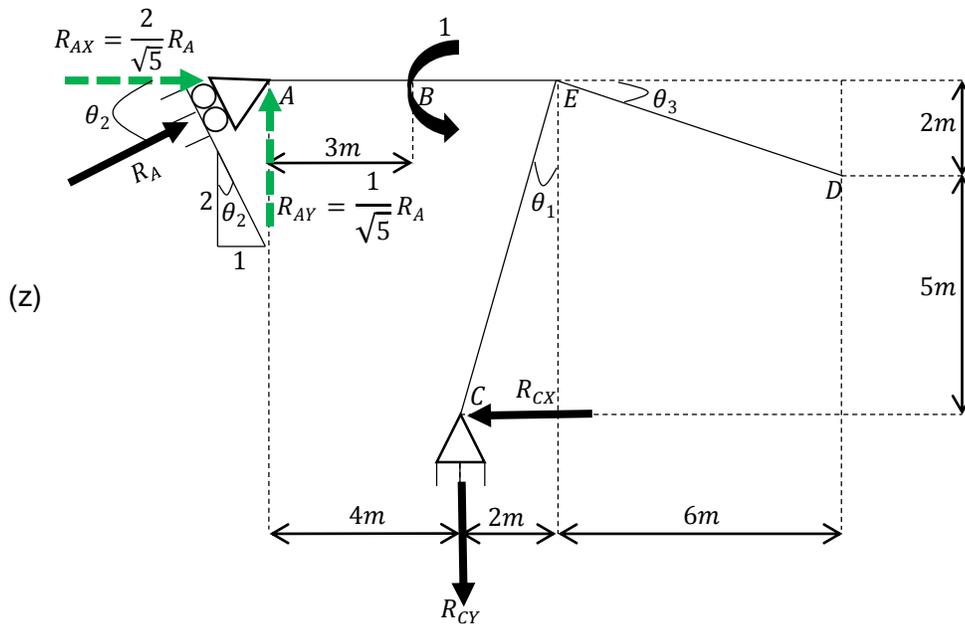
$$M_4 = -\frac{27}{10} x_3^2 \quad 0 \leq x_3 \leq 2\sqrt{10}m$$

**Momentos virtuales  $m_\theta$**

La pendiente en  $B$  se determina al colocar un momento de par unitario virtual en  $B$  con un sentido que es indistinto (puede ser horario o antihorario), figura 2-6y. De igual forma que para los momentos internos  $m$ , las cargas reales son removidas y deben usarse las mismas coordenadas  $x$  que se utilizaron para  $M$ . Una vez que se determinan las fuerzas reactivas en los apoyos, se obtienen los momentos internos  $m_\theta$  con el método de las secciones.



En el diagrama de cargas, figura 2-6z, los sentidos de las reacciones en los apoyos se suponen arbitrariamente.



Al aplicar las ecuaciones de equilibrio se tiene

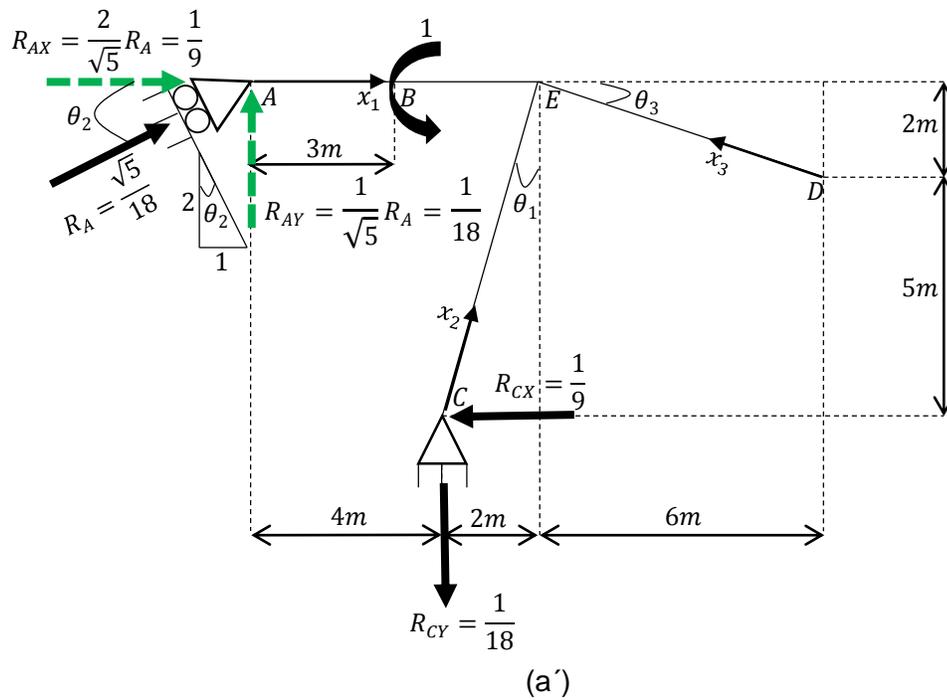
$$\curvearrowleft \sum MC = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}} R_A\right)(7) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} R_A\right)(4) - 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_A = \frac{\sqrt{5}}{18} \nearrow$$

$$\therefore R_{AX} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{18}\right) = \frac{1}{9} \dashrightarrow \quad \therefore R_{AY} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{18}\right) = \frac{1}{18} \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{1}{9} - R_{CX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{CX} = \frac{1}{9} \downarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{1}{18} - R_{CY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = \frac{1}{18} \leftarrow$$

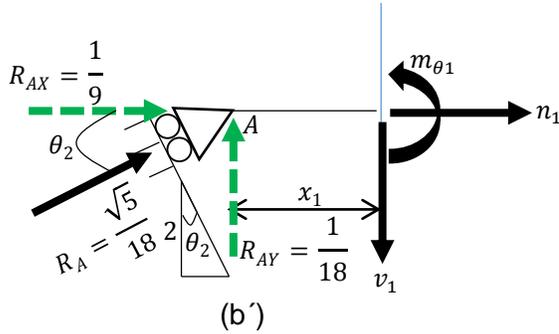
Los resultados obtenidos se presentan en la figura 2-6a'.



Las funciones de momento, que son discontinuas en B debido al momento de par unitario y en E por el cambio de geometría existente en la estructura, se deducen en seguida con base en las figuras 2-6b', 2-6c', 2-6d' y 2-6e' aplicando el método de las secciones.

Miembro A – E

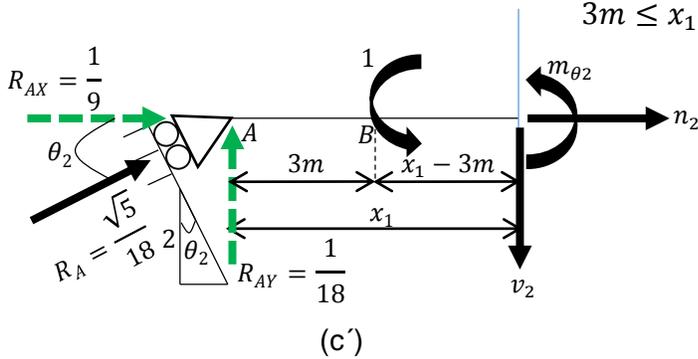
$$0 \leq x_1 \leq 3m$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

$$\frac{1}{18}(x_1) - m_{\theta_1} = 0 \Rightarrow m_{\theta_1} = \frac{1}{18}x_1$$

$$3m \leq x_1 \leq 6m$$



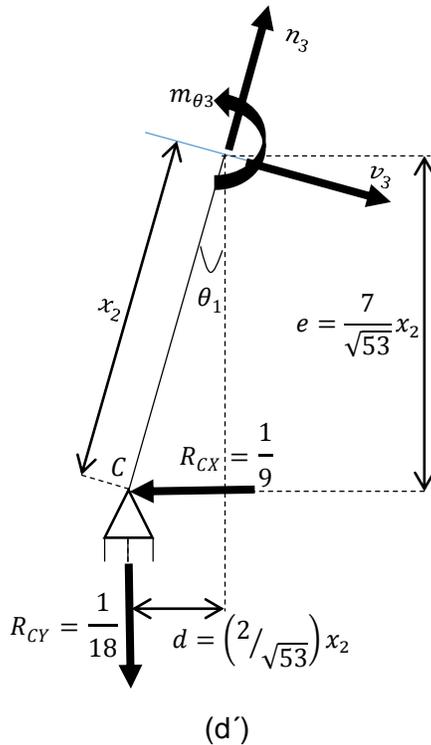
$$\sum m_{corte} = 0$$

$$\frac{1}{18}(x_1) - 1 - m_{\theta_2} = 0$$

$$m_{\theta_2} = \frac{1}{18}x_1 - 1$$

Miembro C – E

$$0 \leq x_2 \leq \sqrt{53}m$$



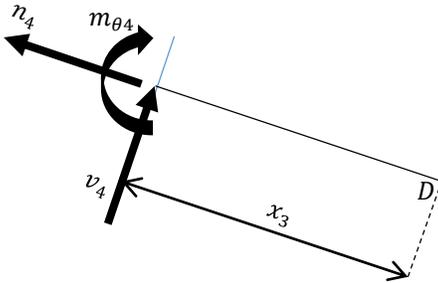
$$\sum m_{corte} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{18}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{53}}x_2\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{7}{\sqrt{53}}x_2\right) - m_{\theta_3} = 0$$

$$m_{\theta_3} = \frac{2\sqrt{53}}{159}x_2$$

Miembro  $D - E$

$$0 \leq x_3 \leq 2\sqrt{10}m$$



$$\begin{aligned} \sum m_{corte} &= 0 \\ m_{\theta 4} &= 0 \end{aligned}$$

(e')

### Ecuación del trabajo virtual

La ecuación del trabajo virtual para conocer la rotación en cualquier punto es

$$1 \cdot \theta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{M m_{\theta}}{EI} dx$$

Al aplicarla en todo el marco, con los datos obtenidos, se tiene

$$\begin{aligned} 1 \cdot \theta_B &= \int_0^3 \frac{-(7.5525x_1 + 2x_1^2) \left(\frac{1}{18}x_1\right)}{EI} dx_1 + \int_3^6 \frac{-(7.5525x_1 + 2x_1^2) \left(\frac{1}{18}x_1 - 1\right)}{EI} dx_1 \\ &+ \int_0^{3.12} \frac{(-2.3935x_2) \left(\frac{2\sqrt{53}}{159}x_2\right)}{EI} dx_2 + \int_{3.12}^{\sqrt{53}} \frac{(4.03438x_2 - 20.055) \left(\frac{2\sqrt{53}}{159}x_2\right)}{EI} dx_2 \\ &+ \int_0^{2\sqrt{10}} \frac{\left(-\frac{27}{10}x_3^2\right) (0)}{EI} dx_3 \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales por separado resulta

$$\begin{aligned} &\int_0^3 -(7.5525x_1 + 2x_1^2) \left(\frac{1}{18}x_1\right) dx_1 = \int_0^3 \left(-\frac{1}{9}x_1^3 - 0.419583x_1^2\right) dx_1 \\ &= \left[-\frac{1}{36}x_1^4 - 0.139861x_1^3\right]_0^3 = -\frac{1}{36}(3^4 - 0^4) - 0.139861(3^3 - 0^3) = -6.02625 \end{aligned}$$

$$\int_3^6 -(7.5525x_1 + 2x_1^2) \left( \frac{1}{18}x_1 - 1 \right) dx_1 = \int_3^6 \left( -\frac{1}{9}x_1^3 + 1.58042x_1^2 + 7.5525x_1 \right) dx_1$$

$$= [-0.027778x_1^4 + 0.526806x_1^3 + 3.77625x_1^2]_3^6 = -0.027778(6^4 - 3^4)$$

$$+ 0.526806(6^3 - 3^3) + 3.77625(6^2 - 3^2) = 167.775$$

$$\int_0^{3.12} (-2.3935x_2) \left( \frac{2\sqrt{53}}{159}x_2 \right) dx_2 = \int_0^{3.12} -0.219182x_2^2 dx_2 = [-0.073061x_2^3]_0^{3.12}$$

$$= -0.073061(3.12^3 - 0^3) = -2.21895$$

$$\int_{3.12}^{\sqrt{53}} (4.03438x_2 - 20.055) \left( \frac{2\sqrt{53}}{159}x_2 \right) dx_2 = \int_{3.12}^{\sqrt{53}} (0.369443x_2^2 - 1.83651x_2) dx_2$$

$$= [0.123148x_2^3 - 0.918255x_2^2]_{3.12}^{\sqrt{53}}$$

$$0.123148 \left( (\sqrt{53})^3 - 3.12^3 \right) - 0.918255 \left( (\sqrt{53})^2 - 3.12^2 \right) = 4.047$$

$$\int_0^{2\sqrt{10}} \left( -\frac{27}{10}x_3^2 \right) (0) dx_3 = 0$$

En consecuencia, la pendiente en  $B$  es

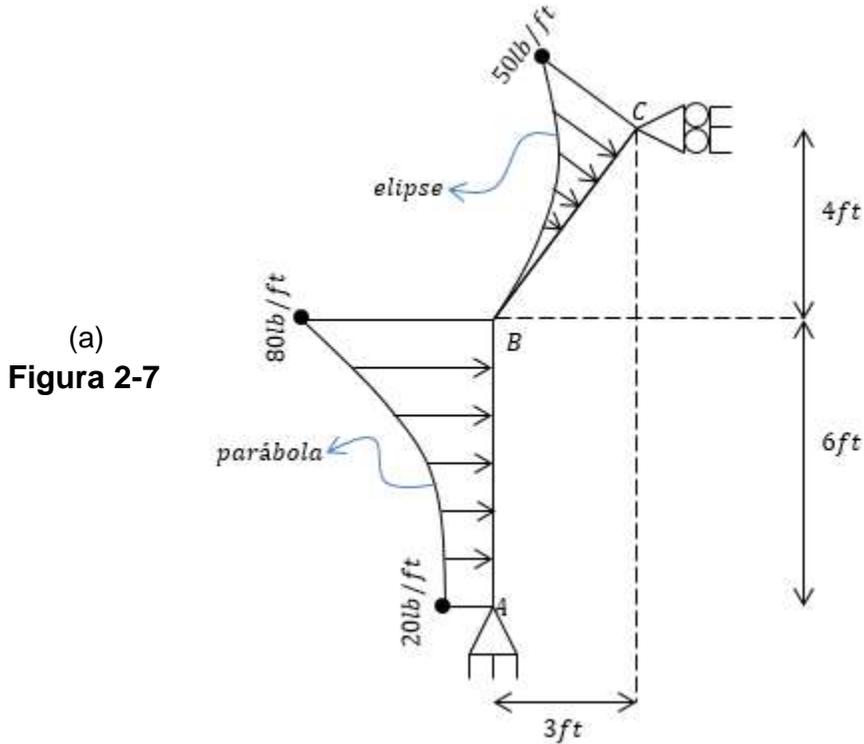
$$\theta_B = \frac{1}{EI} (-6.02625 + 167.775 - 2.21895 + 4.047 + 0) = \frac{163.577}{EI}$$

Como la suma algebraica de todas las integrales para todo el marco es positiva, el giro en  $B$  tiene el mismo sentido que el supuesto para el momento de par unitario.

$$\therefore \theta_B = \frac{163.577}{EI} \curvearrowright$$

Observación: Debido a que se supone que el momento interno  $M$  actúa en la dirección positiva convencional, es forzoso que  $m$  y  $m_\theta$  actúen en la misma dirección. Por ejemplo, note que al seccionar el miembro  $A - E$  de la estructura real, en el diagrama de cuerpo libre aparece  $M_1$  actuando en sentido antihorario, por lo que para las estructuras con carga unitaria vertical y con momento de par unitario, al cortar el miembro  $A - E$ , aparecen  $m_1$  y  $m_2$ , y  $m_{\theta 1}$  y  $m_{\theta 2}$  actuando en sentido antihorario también, respectivamente.

**Ejercicio 2.7** Determine la pendiente en el punto  $A$  del marco que se muestra en la figura 2-7a. Sobre el miembro  $A - B$  se extiende una carga distribuida de tipo enjuta parabólica cuya intensidad varía desde  $20\text{lb}/\text{ft}$  en el punto  $A$  hasta  $80\text{lb}/\text{ft}$  en el punto  $B$ . Por otra parte, en toda la longitud del miembro  $C - B$  se encuentra aplicada de manera ortogonal a su eje una carga distribuida definida por una enjuta elíptica cuya variación de intensidad va de cero en  $B$  a  $50\text{lb}/\text{ft}$  en  $C$ .

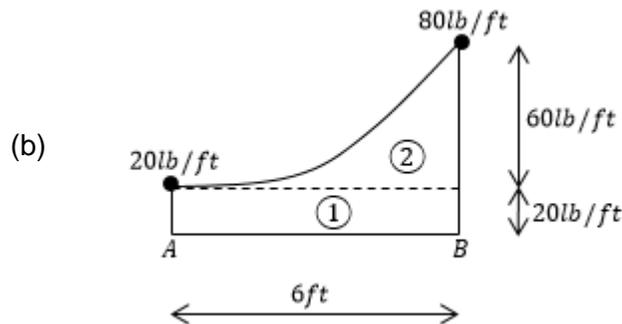


**SOLUCIÓN**

**Momentos reales  $M$**

En terminos generales, se calculan las reacciones en los soportes y luego, por medio del método de secciones, se formulan los momentos internos  $M$ .

Se determinan las fuerzas resultantes de las cargas distribuidas, así como su ubicación. Empezamos por analizar la carga del elemento  $A - B$ . Se rota este ele-



mento de tal forma que su eje sea horizontal y la carga tipo enjuta parabólica se divide en una carga uniforme de  $20lb/ft$  y una carga de enjuta parabólica cuya intensidad ahora varíe de cero en  $A$  a  $60lb/ft$  en  $B$ , figura 2-7b.

La fuerza resultante de la carga distribuida uniforme es

$$A_I = ac = 6ft \left( 20 \frac{lb}{ft} \right) = 120 lb$$

y el punto de aplicación de  $A_I$  es

$$\bar{x}_I = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(6ft) = 3ft$$

Se sigue el siguiente procedimiento para determinar el área bajo la curva y el centroide del área de una enjuta parabólica.

La ecuación de una parábola es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \text{ --- (1)}$$

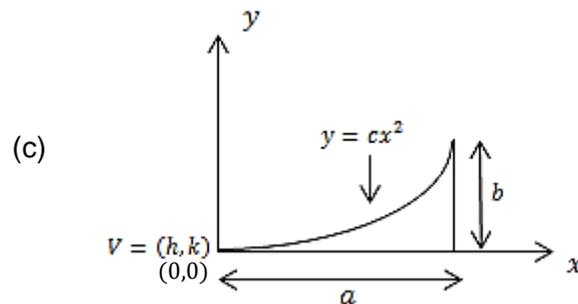
Donde

$p$  = Distancia entre el foco y la recta directriz

$h, k$  = Coordenadas del vértice de la parábola

Como el vértice de la parábola está en el origen, figura 2-7c, entonces

$$V = (h, k) = (0, 0)$$



Sustituyendo  $h = k = 0$  en (1) y despejando  $y$  tenemos

$$(x - 0)^2 = 4p(y - 0)$$

$$x^2 = 4py$$

$$y = \frac{1}{4p}x^2 \text{ --- (2)}$$

Dado que  $\frac{1}{4p}$  es una constante  $c$ , la ecuación (2) pasa a ser

$$y = cx^2 \text{ --- (3)}$$

El valor de  $c$  puede obtenerse despejándolo de la expresión (3).

$$c = \frac{y}{x^2} \text{ --- (4)}$$

Sustituyendo las coordenadas del punto conocido, o sea,  $x = a, y = b$ , en (4) resulta

$$c = \frac{b}{a^2} \text{ --- (5)}$$

Al reemplazar la ecuación (5) en la ecuación (3) se obtiene la ecuación final de la curva en la que  $y$  representa la carga y  $x$  la distancia.

$$y = \frac{b}{a^2}x^2$$

El área bajo la curva es igual a

$$A = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx$$

$$A = \frac{b}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{b}{a^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{b}{a^2} \left[ \frac{a^3 - 0^3}{3} \right] = \frac{1}{3} ab$$

El centroide del área se define por la siguiente expresión

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx} = \frac{\int_0^a x \left( \frac{b}{a^2} x^2 \right) dx}{\int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx}$$

Puesto que el denominador ya fue resuelto, sólo se atiende al numerador.

$$\int_0^a x \left( \frac{b}{a^2} x^2 \right) dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^3 dx = \frac{b}{a^2} \int_0^a x^3 dx = \frac{b}{a^2} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{b}{a^2} \left[ \frac{a^4}{4} \right] = \frac{1}{4} a^2 b$$

Entonces,

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{4} a^2 b}{\frac{1}{3} ab} = \frac{3}{4} a \text{ a la derecha del origen}$$

Luego, para el caso particular de una carga tipo enjuta parabólica con  $a = 6ft$  y  $b = 60lb/ft$  se tiene

$$y = \frac{60}{6^2}x^2 = \frac{5}{3}x^2 \qquad A_{II} = \frac{1}{3}(6ft) \left(60 \frac{lb}{ft}\right) = 120 lb$$

$$\bar{x}_{II} = \frac{3}{4}(6 ft) = 4.5 ft \text{ a la derecha de A}$$

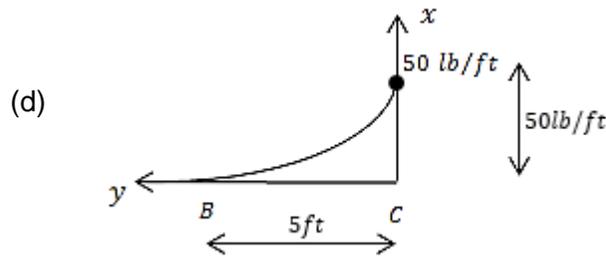
Finalmente, para la toda la carga distribuida del miembro  $A - B$  tenemos que la carga concentrada equivalente es

$$A_1 = 120lb + 120lb = 240lb$$

y el punto de aplicación de  $A_1$  está a

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{(4.5ft)(120 lb) + (3ft)(120 lb)}{240lb} = \frac{900lbft}{240ft} = 3.75ft \text{ de A}$$

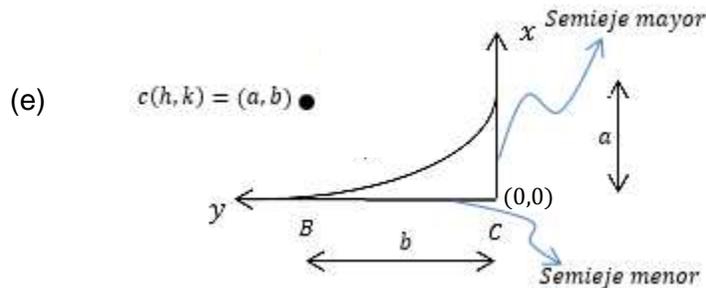
Ahora se analizará la carga del elemento  $C - B$ , figura 2-7d, el cual también se rota de tal forma que su eje sea horizontal.



Se sigue el siguiente procedimiento para determinar el área bajo la curva y el centroide del área de una enjuta parabólica.

La ecuación que define una elipse es

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \text{ ---- } \textcircled{1}$$



Obsérvese en la figura 2-7e que  $a$  es el semieje mayor de la elipse,  $b$  es el semieje menor y  $h, k$  es el punto central.

Al sustituir  $(h, k) = (a, b)$  en la ecuación (1) da

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} = 1 \longrightarrow (2)$$

Al expandir los binomios al cuadrado de resta se tiene

$$\frac{x^2 - 2ax + a^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2by + b^2}{b^2} = 1 \longrightarrow (3)$$

Si se multiplica la ecuación por  $a^2b^2$  y si la igualamos a cero obtenemos

$$b^2x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 + a^2y^2 - 2a^2by + a^2b^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2ab^2x + a^2y^2 - 2a^2by + a^2b^2 = 0 \longrightarrow (4)$$

Se hayan las dos raíces de  $x$  en la ecuación (4). Al emplear la fórmula general

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

en la que para este caso

$$\begin{aligned} A &= b^2 \\ B &= -2ab^2 \\ C &= a^2y^2 - 2a^2by + a^2b^2 \end{aligned}$$

se obtiene

$$x = \frac{-(-2ab^2) \pm \sqrt{(-2ab^2)^2 - 4(b^2)(a^2y^2 - 2a^2by + a^2b^2)}}{2(b^2)} \longrightarrow (5)$$

Al simplificar el discriminante resulta

$$4a^2b^4 - 4a^2b^2(y^2 - 2by + b^2) = 4a^2b^2(b^2 - y^2 + 2by - b^2) = 4a^2b^2(2by - y^2)$$

$$x = \frac{2ab^2 \pm \sqrt{4a^2b^2(2by - y^2)}}{2b^2} = \frac{2ab^2 \pm \sqrt{(2ab)^2 \cdot \sqrt{y(2b - y)}}}{2b^2}$$

$$x = \frac{2ab^2 \pm 2ab\sqrt{y(2b - y)}}{2b^2} = \frac{2b(ab \pm a\sqrt{y(2b - y)})}{2b(b)} = \frac{a \left( b \pm (y(2b - y))^{\frac{1}{2}} \right)}{b}$$

$$x_1 = \frac{a \left( b + (y(2b - y))^{\frac{1}{2}} \right)}{b}$$

$$x_2 = \frac{a \left( b - (y(2b - y))^{\frac{1}{2}} \right)}{b}$$

A diferencia de lo que hemos venido manejando, en estas ecuaciones  $x_1$  y  $x_2$  hacen referencia a la carga y  $y$  a la distancia. Para ver cuál de estas dos funciones representa realmente la carga del miembro  $B - D$ , se evalúan en el intervalo  $y[0,5]$  y se observa el comportamiento de cada una. Si se conoce que  $a = 50lb/ft$  y  $b = 5ft$ , entonces se obtiene la siguiente información de la tabla 2-3.

| y | $x_1$  |
|---|--------|
| 0 | 50     |
| 1 | 80     |
| 2 | 90     |
| 3 | 95.826 |
| 4 | 98.99  |
| 5 | 100    |

| y | $x_2$ |
|---|-------|
| 0 | 50    |
| 1 | 20    |
| 2 | 10    |
| 3 | 4.174 |
| 4 | 1.010 |
| 5 | 0     |

**Tabla 2-3**

Por lo tanto, la ecuación de la curva realmente es

$$x = \frac{a \left( b - (y(2b - y))^{\frac{1}{2}} \right)}{b}$$

El área bajo la curva es igual a

$$\begin{aligned} A &= \int dA = \int_{L_1}^{L_2} x dy = \int_0^b \frac{a \left( b - (y(2b - y))^{\frac{1}{2}} \right)}{b} dy = \frac{a}{b} \int_0^b \left[ b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right] dy \\ &= \frac{a}{b} \left\{ \int_0^b b dy - \int_0^b (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy \right\} \end{aligned}$$

Las soluciones de las integrales en su forma indefinida son

$$\int b dy = by$$

$$\int (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{(y - b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{b^2 \arcsin \left[ \frac{y - b}{|b|} \right]}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{a \left( b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{b} dy &= \frac{aby}{b} - \frac{a(y - b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2b} - \frac{ab^2 \arcsin \left[ \frac{y - b}{|b|} \right]}{2b} \\ &= -\frac{ab \cdot \arcsin \left[ \frac{y - b}{|b|} \right]}{2} - \frac{a(y - b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2b} + ay \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A = \int_0^b \frac{a \left( b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{b} dy = ab - \frac{\pi a |b|}{4}$$

El centroide del área es igual a

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} yx dy}{\int_{L_1}^{L_2} x dy} = \frac{\int_0^b y \left[ \frac{a \left( b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{b} \right] dy}{\int_0^b \frac{a \left( b - (y(2b - y))^{\frac{1}{2}} \right)}{b} dy}$$

Dado que el denominador ya se resolvió, de momento nos abocamos a atender el numerador.

$$\int_0^b y \left[ \frac{a \left( b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{b} \right] dy = -\frac{a}{b} \left[ \int_0^b y(2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy - \int_0^b by dy \right]$$

Se solucionan las dos integrales en su forma indefinida.

$$\int by dy = b \int y dy = \frac{b}{2} y^2$$

$$\int y(2by - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = -\frac{(2by - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{b(y - b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{b^3 \arcsin \left[ \frac{y - b}{|b|} \right]}{2}$$

En consecuencia,

$$\int y \left[ \frac{a(b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}})}{b} \right] dy = -\frac{a}{b} \left[ -\frac{(2by - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{b(y-b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{b^3 \arcsin \left[ \frac{y-b}{|b|} \right]}{2} - \frac{b}{2} y^2 \right]$$

$$= -\frac{ab^2 * \arcsin \left[ \frac{y-b}{|b|} \right]}{2} + \frac{a(2by - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3b} - \frac{a(y-b)(2by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{a}{2} y^2$$

Por lo tanto,

$$\int_0^b y \left[ \frac{a(b - (2by - y^2)^{\frac{1}{2}})}{b} \right] dy = \frac{ab^2(4 - 3\pi)}{12} + \frac{ab^2}{2}$$

Finalmente,

$$\bar{y} = \frac{\frac{ab^2(4 - 3\pi)}{12} + \frac{ab^2}{2}}{ab - \frac{\pi ab}{4}} = \frac{b(3\pi - 10)}{3(\pi - 4)} \text{ a la izquierda del origen}$$

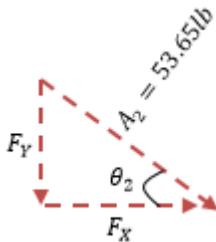
Para el caso particular de una carga tipo enjuta elíptica en la que  $a = 50ft$  y  $b = 5ft$  tenemos

$$x = \frac{50 \left( 5 - ((2 * 5)y - y^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{5} = 10(5 - (10y - y^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$A_2 = \left( 50 \frac{lb}{ft} \right) (5ft) - \frac{(3.1416) \left( 50 \frac{lb}{ft} \right) (5ft)}{4} = 53.65 lb$$

$$\bar{y}_1 = \frac{(5ft)[3(3.1416) - 10]}{3(3.1416 - 4)} = 1.1168 ft \text{ a la izquierda de C}$$

Con base en la figura 2-7f, se resuelve la carga concentrada equivalente  $A_2$  en sus componentes rectangulares horizontal y vertical.

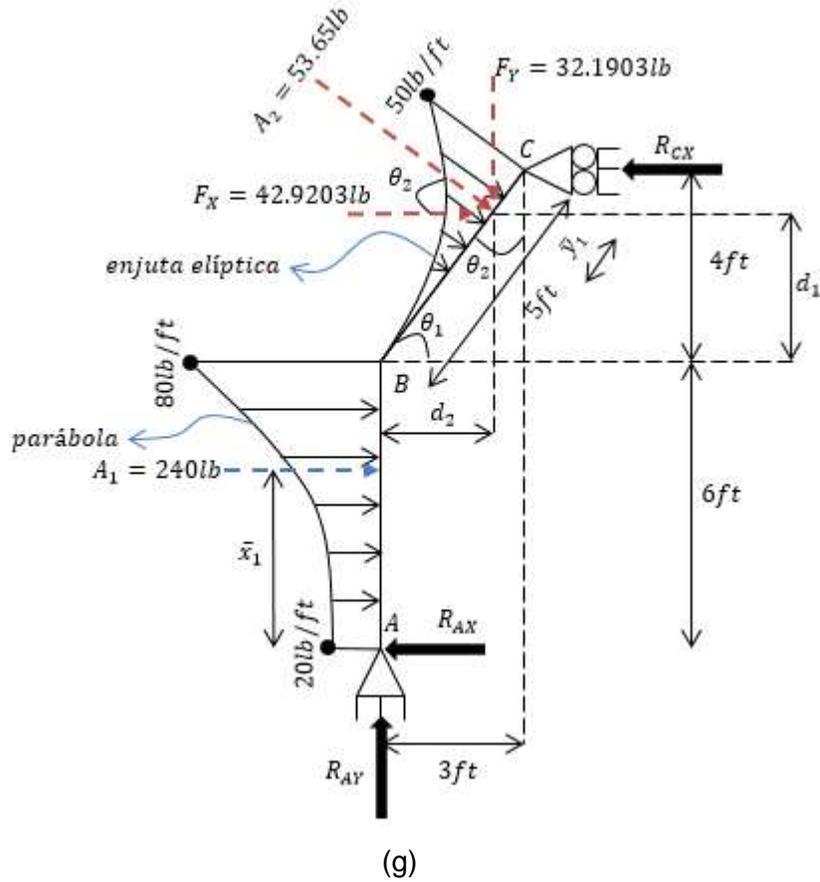


(f)

$$F_Y = 53.65 lb(\text{sen } \theta_2) = 53.65 \left( \frac{3}{5} \right) = 32.1903lb$$

$$F_X = 53.65 lb(\text{cos } \theta_2) = 53.65 \left( \frac{4}{5} \right) = 42.9203lb$$

Se completa el diagrama de cargas, figura 2-7g, identificando las reacciones en los soportes cuyos sentidos se suponen arbitrariamente.



Para determinar las fuerzas reactivas en los apoyos por medio de la aplicación de las ecuaciones de equilibrio al diagrama de cargas, se requiere de conocer las distancias  $d_1$  y  $d_2$ .

$$\frac{4ft}{5ft} = \frac{d_1}{5ft - 1.1168ft} \Rightarrow d_1 = \frac{4}{5}(5 - 1.1168)ft = 3.1065 ft$$

$$\frac{3ft}{4ft} = \frac{d_2}{d_1} \Rightarrow d_2 = \frac{3}{4}d_1 = \frac{3}{4}(3.1065 ft) = 2.3298 ft$$

Por consiguiente,

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 32.1903 lb = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 32.1903 lb \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum MA = 0$$

$$-R_{CX}(10) + 42.9203(9.1065) + 32.1903(2.3298) + 240(3.75) = 0$$

$$\therefore R_{CX} = 136.5852 \text{ lb} \leftarrow$$

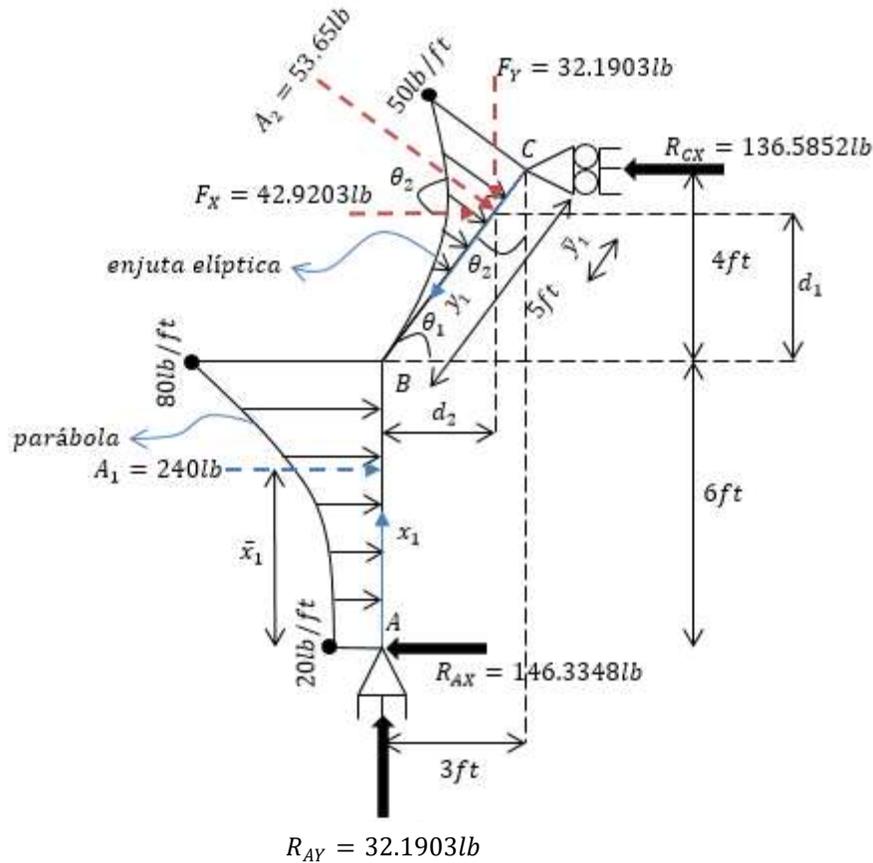
$$\curvearrowright \sum MC = 0$$

$$\begin{aligned} & -32.1903(3 - 2.3298) - 42.9203(4 - 3.1065) - 240(10 - 3.75) + 32.1903(3) \\ & + R_{AX}(10) = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 146.3348 \text{ lb} \leftarrow \end{aligned}$$

Como comprobación, se cumple

$$+\rightarrow \sum FX = -146.334845 + 240 + 42.92 - 136.585155 = 0 \text{ ok}$$

Se muestran los resultados obtenidos en la figura 2-7h. Se formulan las funciones de momento  $M$ . Se debe usar una coordenada para la columna y otra distinta para la viga inclinada. Siendo así, la coordenada  $x_1$  con origen en  $A$  cubre la región  $A - B$ , mientras que la coordenada  $y_1$  con origen en  $C$  abarca el tramo  $C - B$ .

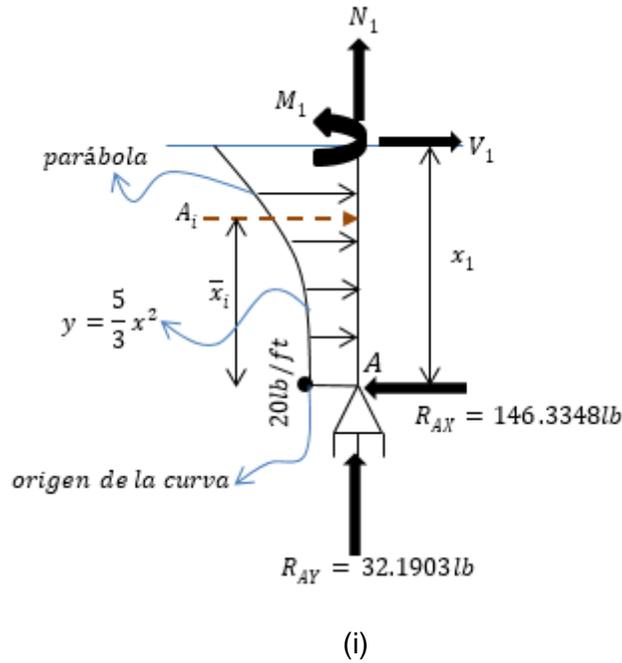


(h)

Como en ambos miembros no hay discontinuidad de carga, sólo se requerirá de efectuar en cada miembro un corte perpendicular a su eje, figuras 2-7i y 2-7j.

Miembro A – B.

$$0m \leq x_1 \leq 6 ft$$



La carga concentrada equivalente de la carga distribuida seccionada es

$$A_i = (x_1)(20) + \int_0^{x_1} \left(\frac{5}{3}x^2\right) dx_1 = 20x_1 + \frac{5}{9}x_1^3$$

y su línea de acción se localiza a una distancia de

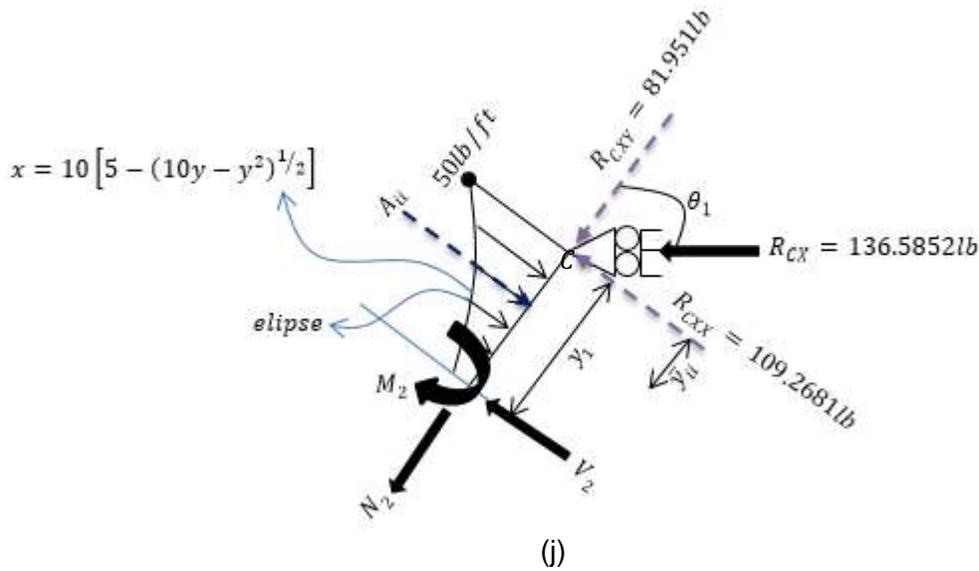
$$\bar{x}_i = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{\left(\frac{\int_0^{x_1} x \left(\frac{5}{3}x^2\right) dx_1}{\int_0^{x_1} \left(\frac{5}{3}x^2\right) dx_1}\right) \left(\frac{5}{9}x_1^3\right) + \left(\frac{1}{2}x_1\right) (20x_1)}{20x_1 + \frac{5}{9}x_1^3} = \frac{\frac{5}{12}x_1^4 + 10x_1^2}{20x_1 + \frac{5}{9}x_1^3}$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 + 146.3348(x_1) - \left(20x_1 + \frac{5}{9}x_1^3\right) \left[x_1 - \frac{\frac{5}{12}x_1^4 + 10x_1^2}{20x_1 + \frac{5}{9}x_1^3}\right] = 0$$

$$M_1 = \frac{5}{12}x_1^4 + 10x_1^2 - \frac{5}{9}x_1^4 - 20x_1^2 + 146.3348x_1 = -\frac{5}{36}x_1^4 - 10x_1^2 + 146.3348x_1$$

Miembro C – B.

$$0m \leq y_1 \leq 5f$$



La resultante de la carga distribuida seccionada es

$$A_{ii} = \int_0^{y_1} 10(5 - (10y - y^2)^{\frac{1}{2}}) dy_1$$

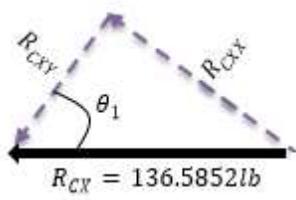
$$= -125 \operatorname{arc} \sin \left[ \frac{y_1 - 5}{5} \right] - (5y_1)(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 50y_1 - \frac{125}{2} \pi$$

y su brazo de palanca es

$$\bar{y}_{ii} = \frac{\int_0^{y_1} 10y_1 \left[ (5 - (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}}) \right] dy_1}{\int_0^{y_1} 10 \left[ (5 - (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}}) \right] dy_1}$$

$$= \frac{\frac{10}{3} (10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 25y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25y_1^2 - \frac{625\pi}{2} - 625 \operatorname{arc} \sin \left[ \frac{y_1 - 5}{5} \right]}{-125 \operatorname{arc} \sin \left[ \frac{y_1 - 5}{5} \right] - (5y_1)(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 50y_1 - \frac{125}{2} \pi}$$

Al descomponer  $R_{CX}$  en sus componentes rectangulares cuyas líneas de acción coinciden con las fuerzas cortante y normal del miembro, figura 2-7k, se tiene



$$R_{CXX} = R_{CX} \operatorname{sen} \theta_1 = 136.5852 \text{ lb} \left( \frac{4}{5} \right) = 109.2681 \text{ lb}$$

$$R_{CXY} = R_{CX} \cos \theta_1 = 136.5852 \text{ lb} \left( \frac{3}{5} \right) = 81.951 \text{ lb}$$

(k)

$$\sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow M_2 - 109.2681(y_1)$$

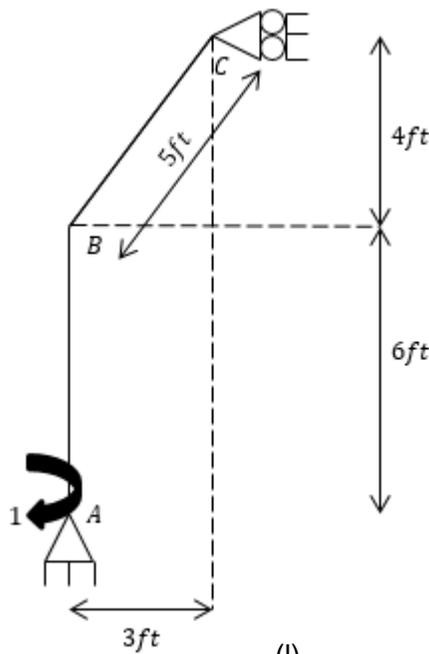
$$+ \left[ -125 \operatorname{arc} \sin \left[ \frac{y_1 - 5}{5} \right] - (5y_1)(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 50y_1 - \frac{125}{2} \pi \right]$$

$$\left[ y_1 - \frac{\frac{10}{3}(10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 25y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25y_1^2 - \frac{625\pi}{2} - 625 \operatorname{arc} \sin \left[ \frac{y_1 - 5}{5} \right]}{-125 \operatorname{arc} \sin \left[ \frac{y_1 - 5}{5} \right] - (5y_1)(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 25(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 50y_1 - \frac{125}{2} \pi} \right]$$

$$M_2 = 125 \operatorname{arc} \sin \left[ \frac{y_1 - 5}{5} \right] - 625 \operatorname{arc} \sin \left[ \frac{y_1 - 5}{5} \right] + 5y_1^2(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{10}{3}(10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 50y_1(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125(10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} - 25y_1^2 + 305.6177y_1$$

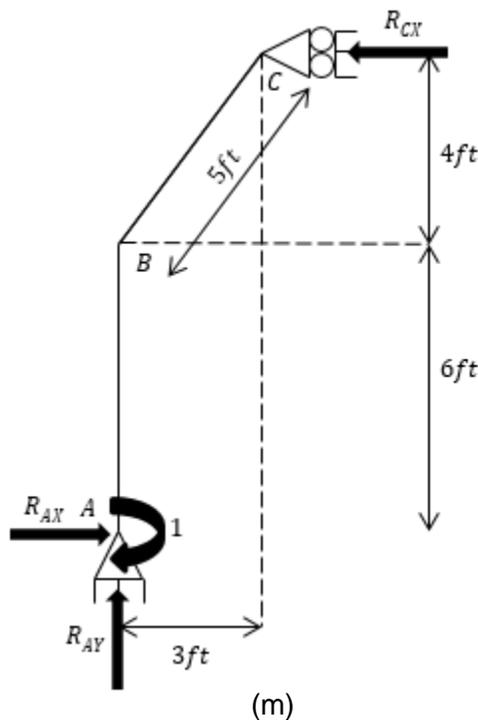
**Momentos virtuales  $m_\theta$**



(l)

Como se ha visto, cuando se requiere determinar una pendiente en cierto punto, debe aplicarse a la estructura un momento de par unitario en tal punto eliminando las cargas reales. Entonces, para calcular la rotación tangencial en  $A$  se coloca sobre el marco un momento de par ficticio de 1 con sentido propuesto horario en  $A$ , figura 2-7l. Se calculan las reacciones en los soportes y se determinan los momentos internos  $m_\theta$  con el método de las secciones utilizando las mismas coordenadas  $x_1$  y  $y_1$  que se emplearon al formular  $M$ , con el objetivo de determinar la energía de deformación virtual total en el marco.

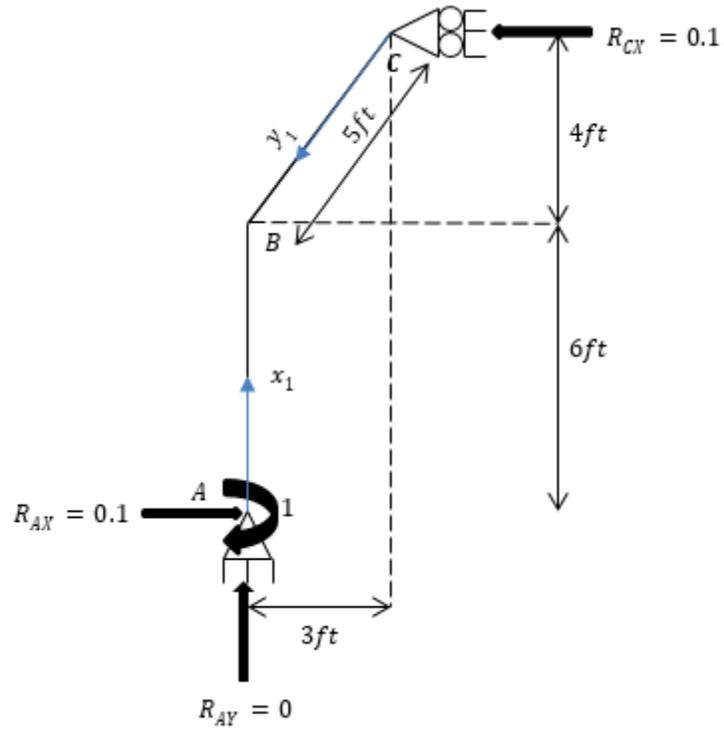
El sentido correcto de cada reacción se supone arbitrariamente dado que no se tiene certeza de cual sea. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cargas, figura 2-7m, se obtiene



$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MA = 0 &\Rightarrow 1 - R_{CX}(10) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CX} = 0.1 \leftarrow \\ +\rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow R_{AX} - 0.1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0.1 \rightarrow \\ +\uparrow \sum FY = 0 &\Rightarrow \therefore R_{AY} = 0 \end{aligned}$$

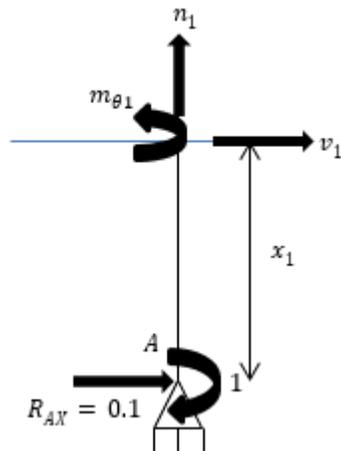
En la figura 2-7n se muestran los resultados obtenidos y se establecen las coordenadas.

A continuación se escriben las ecuaciones para los momentos internos  $m_\theta$ . Observe que nuevamente en ambos miembros no hay discontinuidad de carga y un corte perpendicular al eje de cada miembro será suficiente, figuras 2-7ñ y 2-7o.



Miembro A – B.

$$0m \leq x_1 \leq 6 ft$$



$$\sum m_{corte} = 0$$

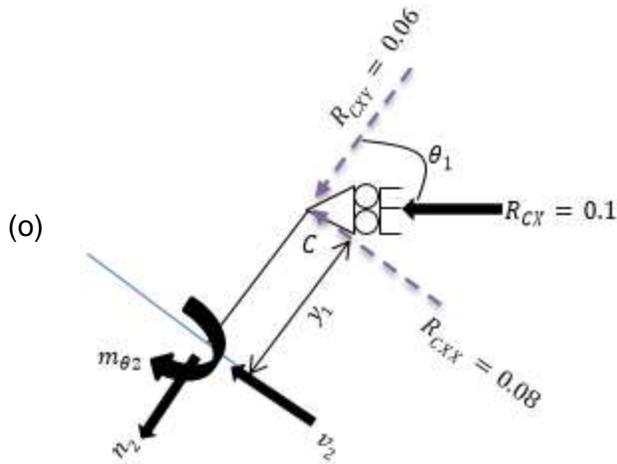
$$-m_{\theta_1} + 1 - 0.1(x_1) = 0$$

$$m_{\theta_1} = 1 - 0.1x_1$$

(ñ)

Miembro C – B.

$$0m \leq y_1 \leq 5ft$$



La descomposición de  $R_{CX}$  es

$$R_{CXX} = R_{CX} \operatorname{sen} \theta_1 = 0.1 \left(\frac{4}{5}\right) = 0.08$$

$$R_{CXY} = R_{CX} \operatorname{cos} \theta_1 = 0.1 \left(\frac{3}{5}\right) = 0.06$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow m_{\theta_2} - 0.08(y_1) = 0 \Rightarrow m_{\theta_2} = 0.08y_1$$

### Ecuación del trabajo virtual

La ecuación del trabajo virtual para conocer la rotación en cualquier punto es

$$1 \cdot \theta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{M m_{\theta}}{EI} dx$$

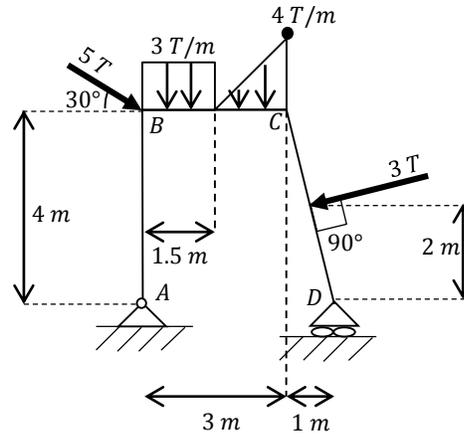
Al aplicarla en el marco, con los datos obtenidos resulta

$$\begin{aligned} 1 \cdot \theta_A &= \frac{1}{EI} \int_0^6 \left( -\frac{5}{36} x_1^4 - 10x_1^2 + 146.3348 x_1 \right) (1 - 0.1x_1) dx_1 \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^5 \left[ 125 \operatorname{arc} \sin \left[ \frac{y_1 - 5}{5} \right] - 625 \operatorname{arc} \sin \left[ \frac{y_1 - 5}{5} \right] + 5y_1^2 (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\left. + \frac{10}{3} (10y_1 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - 50y_1 (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} + 125 (10y_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} - 25y_1^2 \right. \\ &\left. + 305.6177y_1 \right] (0.08y_1) dy_1 \Rightarrow \theta_A = \frac{1}{EI} (1076.416325 + 241.60845) = \frac{1}{EI} (1318.02477) \end{aligned}$$

Debido a que se obtuvo una magnitud positiva en la pendiente calculada, ésta tiene el mismo sentido que el momento de par unitario. Por lo tanto,

$$\theta_A = \frac{1}{EI} (1318.02477) \curvearrowright$$

**Ejercicio 2.8** Determine el desplazamiento vertical del punto  $C$  con el método del trabajo virtual del marco que se muestra en la figura 2-8a considerando sólo las deformaciones debidas a la flexión; suponga que  $EI$  es constante.



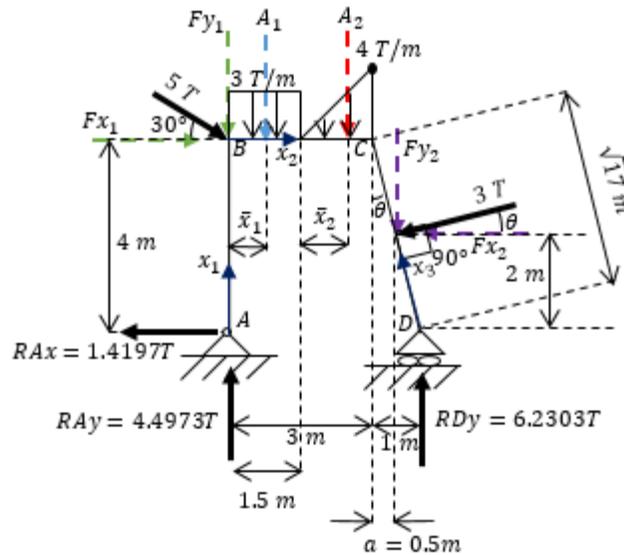
(a)

**Figura 2-8**

**SOLUCIÓN**

**Momentos reales  $M$**

Se calculan las reacciones en los soportes y luego se deducen los momentos internos  $M$  del marco original. Las coordenadas  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  cubren las longitudes de los miembros  $A - B$ ,  $B - C$  y  $D - C$ , respectivamente, figura 2-8b.



(b)

Longitud del miembro inclinado es

$$L_{D-C} = \sqrt{(1m)^2 + (4m)^2} = \sqrt{17}m$$

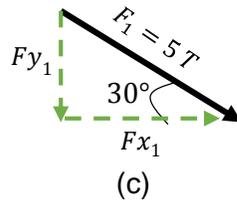
En consecuencia,

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \text{cos } \theta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Como la fuerza de  $3T$  está aplicada a la mitad del miembro  $D - C$ , por triángulos semejantes se infiere que la distancia  $a$  es de  $0.5m$ .

Con base en las figuras 2-8c y 2-8d, se determinan las componentes  $x$  y  $y$  de las cargas puntuales inclinadas.

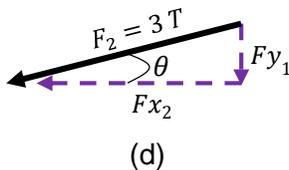
- Para  $F_1 = 5T$



$$Fx_1 = 5T(\text{cos } 30^\circ) = \frac{5\sqrt{3}}{2}T$$

$$Fy_1 = 5T(\text{sen } 30^\circ) = 2.5T$$

- Para  $F_2 = 3T$



$$Fx_2 = 3T(\text{cos } \theta) = 3\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)T = \frac{12}{\sqrt{17}}T$$

$$Fy_2 = 3T(\text{sen } \theta) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)T = \frac{3}{\sqrt{17}}T$$

Se determinan las cargas concentradas equivalentes  $A_i$  de las presiones, así como su punto de aplicación  $\bar{x}_i$ .

- Para la carga distribuida uniforme.

$$A_1 = \left(3\frac{T}{m}\right)(1.5m) \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{2}(1.5m)$$

- Para la carga de intensidad con variación lineal.

$$A_2 = \frac{[(1.5m)\left(4\frac{T}{m}\right)]}{2} \quad \bar{x}_2 = \frac{2}{3}(1.5m)$$

De aplicar las ecuaciones de equilibrio resulta

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -RAx + Fx_1 - Fx_2 = 0$$

$$-RAx + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{12}{\sqrt{17}}\right) = 0 \Rightarrow \therefore RAx = 1.4197T \leftarrow$$

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow Fx_1(4) + A_1(\bar{x}_1) + A_2(1.5 + \bar{x}_2) + Fy_2(3 + a) - Fx_2(2) - RDy(4) = 0$$

$$\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)(4) + (3)(1.5)\left(\frac{1.5}{2}\right) + \left(\frac{(1.5)(4)}{2}\right)\left(1.5 + \frac{2}{3}(1.5)\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)(3.5) - \left(\frac{12}{\sqrt{17}}\right)(2)$$

$$-RDy(4) = 0 \Rightarrow \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)(4) + 4.5(0.75) + (3)(2.5) + \left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)(3.5)$$

$$- \left(\frac{12}{\sqrt{17}}\right)(2) - RDy(4) = 0 \Rightarrow \therefore RDy = 6.2303T \uparrow$$

$$+\uparrow \sum Fy = 0 \Rightarrow RAy - Fy_1 - A_1 - A_2 + RDy = 0 \Rightarrow RAy - 2.5 - 4.5$$

$$-3 - \left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right) + 6.2303 = 0 \Rightarrow \therefore RAy = 4.4973T \uparrow$$

Las funciones de momento  $M$  para cada región distinta por miembro son deducidas a partir de las figuras 2-8e, 2-8f, 2-8g, 2-8i y 2-8j.

Miembro A - B.

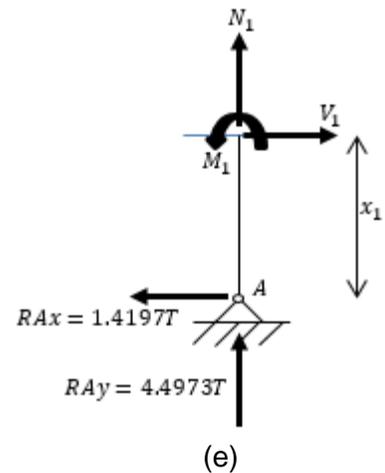
$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 + 1.4197(x_1) = 0$$

$$M_1 = 1.4197 x_1$$

Miembro B - C.

$$0 \leq x_2 \leq 1.5m$$



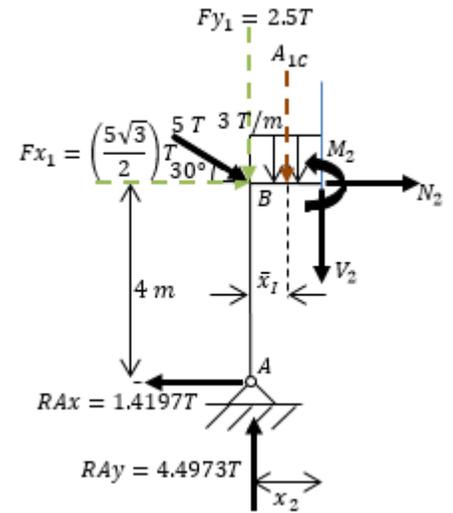
La fuerza resultante de la carga distribuida uniforme cortada es  $A_{1C} = (3T/m)(x_2)$  y su punto de aplicación es  $\bar{x}_I = \frac{1}{2}(x_2)$ .

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 + 4.4973(x_2) + 1.4197(4) - 2.5(x_2) - 3(x_2) \left(\frac{x_2}{2}\right) = 0$$

$$M_2 = -\frac{3}{2}x_2^2 + 1.9973x_2 + 5.6788$$

$$1.5m \leq x_2 \leq 3m$$



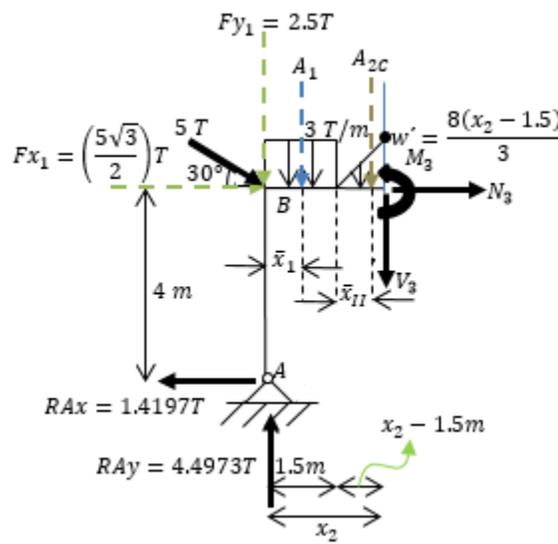
(f)

El valor de la intensidad  $w'$  en función de  $x_2$  es

$$\frac{4 T/m}{1.5m} = \frac{w'}{x_2 - 1.5m} \Rightarrow w' = \frac{8(x_2 - 1.5)}{3}$$

La carga concentrada equivalente de la carga triangular seccionada y su punto de aplicación son, respectivamente

$$A_{2c} = \left[ \frac{(x_2 - 1.5) \left[ \frac{8(x_2 - 1.5)}{3} \right]}{2} \right] \quad \bar{x}_{II} = \frac{2}{3}(x_2 - 1.5)$$



(g)

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow & -M_3 + 4.4973(x_2) + 1.4197(4) - 2.5(x_2) - 3(1.5) \left(x_2 - \frac{1.5}{2}\right) \\ & - \left[ \frac{(x_2 - 1.5) \left[ \frac{8(x_2 - 1.5)}{3} \right]}{2} \right] \left[ \frac{1}{3}(x_2 - 1.5) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$M_3 = 4.4973x_2 + 5.6788 - 2.5x_2 - 4.5x_2 + \frac{27}{8} - \left(\frac{4}{9}\right)(x_2 - 1.5)^3$$

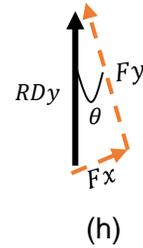
$$M_3 = -\left(\frac{4}{9}\right)(x_2 - 1.5)^3 - 2.5027x_2 + 9.0538$$

Miembro  $D - C$ .

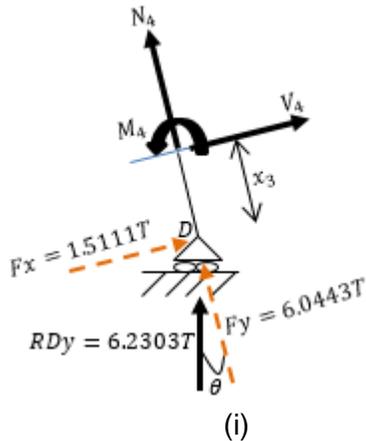
A partir de la figura 2-8h, se calculan las componentes rectangulares de  $RDy$  para los ejes que coinciden con las líneas de acción de la fuerza cortante y de la fuerza normal del miembro  $D - C$ .

$$F_x = (6.2303T)(\text{sen } \theta) = (6.2303T) \left( \frac{1}{\sqrt{17}} \right) = 1.5111 T$$

$$F_y = (6.2303T)(\text{cos } \theta) = (6.2303T) \left( \frac{4}{\sqrt{17}} \right) = 6.0443 T$$



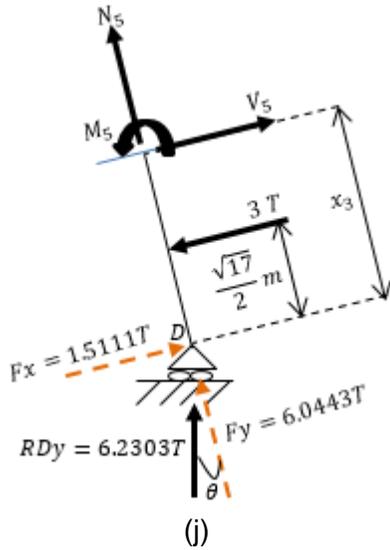
$$0 \leq x_3 \leq \frac{\sqrt{17}}{2} m$$



$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_4 - 1.5111(x_3) = 0$$

$$M_4 = -1.5111(x_3)$$

$$\frac{\sqrt{17}}{2}m \leq x_3 \leq \sqrt{17}m$$



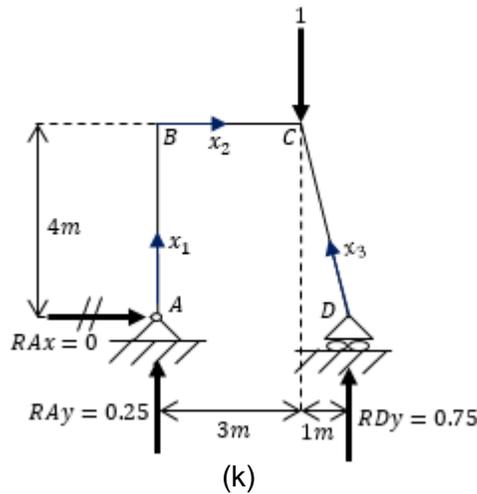
$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_5 - 1.5111(x_3) + 3\left(x_3 - \frac{\sqrt{17}}{2}\right) = 0$$

$$M_5 = 1.4889 x_3 - \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

### Momentos virtuales $m$

Se requiere conocer el desplazamiento vertical en el punto  $C$ , entonces se analiza un marco con la misma geometría y condiciones de apoyo que el marco real, pero sin las cargas a las que se somete este último, y a esta nueva estructura se le aplica una carga virtual unitaria vertical en  $C$ , figura 2-8k. Los momentos internos  $m$  deben calcularse utilizando las mismas coordenadas  $x$  que se usaron para  $M$ .



Las fuerzas reactivas en los apoyos son resultado de

$$\sum MA = 0 \Rightarrow 1(3) - RDy(4) = 0 \Rightarrow \therefore RDy = \frac{3}{4} = 0.75 \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow RAy - 1 + 0.75 = 0 \Rightarrow \therefore RAy = 0.25 \uparrow$$

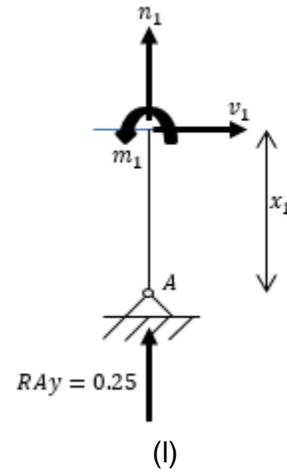
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow RAx = 0$$

Las funciones de momento  $m$  para cada región distinta por miembro son deducidas a continuación, a partir de las figuras 2-8l, 2-8m y 2-8n.

Miembro A – B.

$$0 \leq x_1 \leq 4m$$

$$\curvearrowright \sum mcorte = 0 \Rightarrow m_1 = 0$$

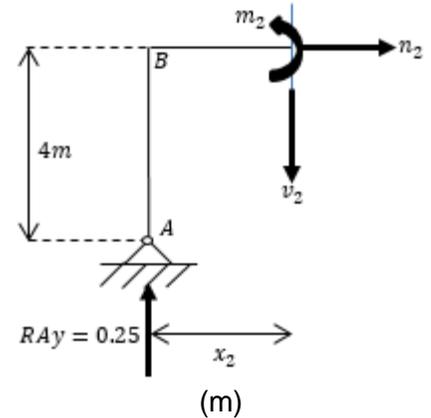


Miembro B – C.

$$0 \leq x_2 \leq 3m$$

$$\curvearrowright \sum mcorte = 0$$

$$-m_2 + 0.25(x_2) = 0 \Rightarrow m_2 = 0.25 x_2$$



Miembro D – C.

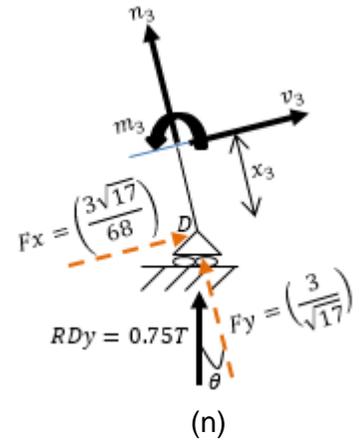
$$0 \leq x_3 \leq \sqrt{17}m$$

Las componentes rectangulares de  $RDy$  son

$$Fx = (0.75)(\text{sen } \theta) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \left(\frac{3\sqrt{17}}{68}\right)$$

$$F_y = (0.75)(\cos \theta) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$$

$$\begin{aligned} \sum m_{\text{corte}} &= 0 \\ -m_3 - \left(\frac{3\sqrt{17}}{68}\right)x_3 &\Rightarrow m_3 = -\left(\frac{3\sqrt{17}}{68}\right)x_3 \end{aligned}$$



### Ecuación del trabajo virtual

Con base en los datos se tiene

$$1 \cdot \Delta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot \delta_{VC} \frac{1}{EI} \int_0^4 (1.4197 x_1)(0) dx_1 &+ \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{3}{2} x_2^2 + 1.9973 x_2 + 5.6788\right) (0.25 x_2) dx_2 \\ &+ \frac{1}{EI} \int_{\frac{3}{2}}^3 \left[-\left(\frac{4}{9}\right)(x_2 - 15)^3 - 2.5027 x_2 + 9.0538\right] (0.25 x_2) dx_2 \\ \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\sqrt{17}}{2}} (-1.5111(x_3)) \left(-\frac{3\sqrt{17}}{68} x_3\right) dx_3 &+ \frac{1}{EI} \int_{\frac{\sqrt{17}}{2}}^{\sqrt{17}} \left(1.4889 x_3 - \frac{3\sqrt{17}}{2}\right) \left(-\frac{3\sqrt{17}}{68} x_3\right) dx_3 \end{aligned}$$

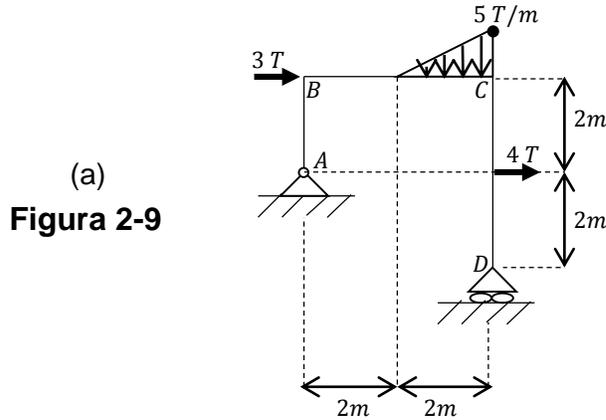
El desplazamiento vertical de C es entonces

$$\delta_{VC} = \frac{1}{EI} [0 + 1.6843 + 2.3322 + 0.8028 + 1.6349] = \frac{1}{EI} [6.4542]$$

El signo positivo de la suma algebraica de todas las integrales de todo el marco indica que el desplazamiento calculado tiene el mismo sentido que el supuesto para la carga virtual unitaria.

$$\therefore \delta_{VC} = \frac{1}{EI} [6.4542] \downarrow$$

**Ejercicio 2.9** Determinar las reacciones en los soportes y las funciones de fuerza cortante, de momento flector y de fuerza normal del siguiente marco isostático mostrado en la figura 2-9a. Calcular también el desplazamiento vertical y la pendiente (ambos en el punto  $B$ ) tomando en cuenta únicamente las deformaciones debidas a la flexión utilizando el método del trabajo virtual. Suponga que  $EI$  es constante.



**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en una secuencia y al emplear los resultados calculados previamente, se tiene

$$\sum MA = 0 \Rightarrow 3(2) + \left(\frac{5(2)}{2}\right)\left(2 + \frac{2}{3}(2)\right) - R_{Dy}(4) = 0 \Rightarrow 6 + 5\left(\frac{10}{3}\right) - 4R_{Dy} = 0$$

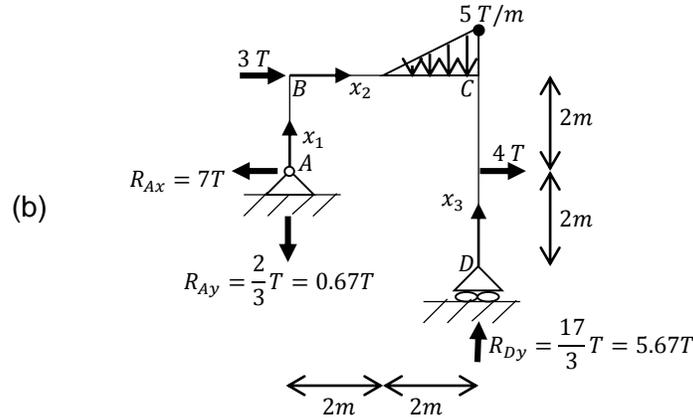
$$R_{Dy} = \frac{17}{3} \Rightarrow \therefore R_{Dy} = 5.67T \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 3T + 4T - R_{Ax} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 7 \Rightarrow \therefore R_{Ax} = 7T \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{Ay} - \frac{5(2)}{2} + \frac{17}{3} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = \frac{2}{3}T \Rightarrow \therefore R_{Ay} = 0.67T \downarrow$$

**Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector**

En la figura 2-9b se muestran los resultados obtenidos. Las funciones de las acciones internas son discontinuas en  $B$ , al centro del miembro  $B - C$ , en  $C$  y a la mitad del miembro  $D - C$ , y serán calculadas con el método de las secciones. Se ha optado por definir una sola coordenada  $x$  para cada miembro, es decir, las coordenadas  $x_1, x_2$  y  $x_3$  que tienen sus orígenes en  $A, B$  y  $D$ , son válidas sólo dentro de las regiones desde  $A$  hasta  $B$  para  $x_1$ , de  $B$  a  $C$  para  $x_2$  y de  $D$  a  $C$  para  $x_3$ .



Con base en las figuras 2-9c, 2-9d, 2-9e, 2-9f y 2-9g, las funciones de las acciones internas para cada región distinta por miembro son deducidas a continuación.

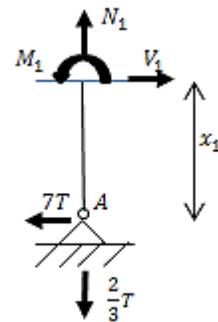
Miembro A – B.

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 + 7(x_1) = 0 \Rightarrow M_1 = 7x_1$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = 7$$

$$\uparrow + \sum FY = 0 \Rightarrow N_1 - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{2}{3}$$



(c)

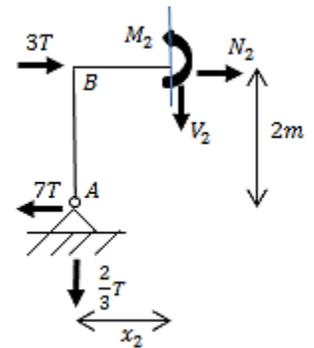
Miembro B – C.

$$0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_2 + (7)(2) - \frac{2}{3}(x_2) = 0 \Rightarrow M_2 = -\frac{2}{3}x_2 + 14$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_2} = -\frac{2}{3}$$

$$\rightarrow + \sum FX = 0 \Rightarrow -7 + 3 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = 4$$



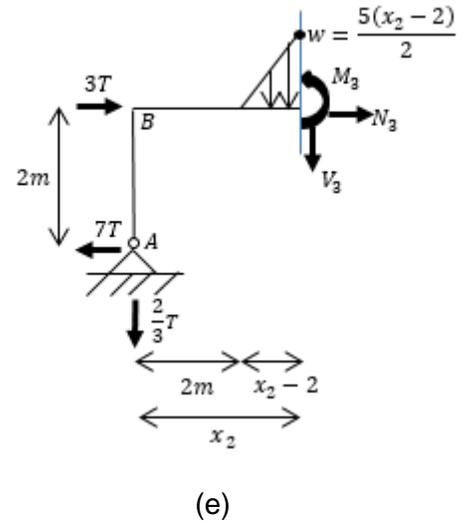
(d)

$$2m \leq x_2 \leq 4m$$

El valor de la intensidad  $w$  en función de  $x_2$  es:

$$\frac{5}{2} = \frac{w}{x_2 - 2} \Rightarrow w = \frac{5(x_2 - 2)}{2}$$

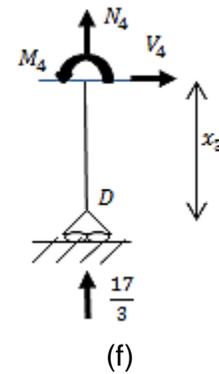
$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_{\text{corte}} &= 0 \\ -M_3 + 7(2) - \frac{2}{3}(x_2) - \frac{\left(\frac{5(x_2-2)}{2}\right)(x_2-2)}{2} \left(\frac{1}{3}(x_2-2)\right) &= 0 \\ M_3 &= 14 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{12}(x_2-2)^3 \\ V_3 &= \frac{dM_3}{dx_2} = -\frac{2}{3} - \frac{5}{4}(x_2-2)^2 \\ + \rightarrow \sum FX &= 0 \Rightarrow N_3 = 4 \end{aligned}$$



Miembro D - C.

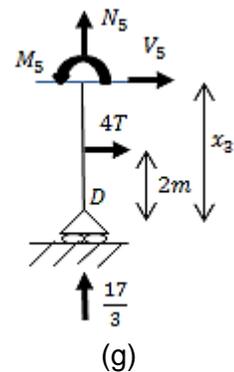
$$0 \leq x_3 \leq 2m$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_{\text{corte}} &= 0 \Rightarrow M_4 = 0 \\ \therefore V_4 &= 0 \\ + \uparrow \sum FY &= 0 \Rightarrow N_4 + \frac{17}{3} = 0 \Rightarrow N_4 = -\frac{17}{3} \end{aligned}$$



$$2m \leq x_3 \leq 4m$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum M_{\text{corte}} &= 0 \Rightarrow -M_5 - 4(x_3 - 2) = 0 \Rightarrow M_5 = -4x_3 + 8 \\ V_5 &= \frac{dM_5}{dx_3} = -4 \\ + \uparrow \sum FY &= 0 \Rightarrow N_5 = -\frac{17}{3} \end{aligned}$$



Para calcular el desplazamiento vertical en B, se sigue el siguiente procedimiento:

**Momentos reales  $M$**

Los momentos internos  $M$  fueron deducidos en la estructura real. Realizando un recuento tenemos

Miembro  $A - B$ .

$$M_1 = 7x_1 \quad 0 \leq x_1 \leq 2m$$

Miembro  $B - C$ .

$$M_2 = -\frac{2}{3}x_2 + 14 \quad 0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$M_3 = 14 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{12}(x_2 - 2)^3 \quad 2m \leq x_2 \leq 4m$$

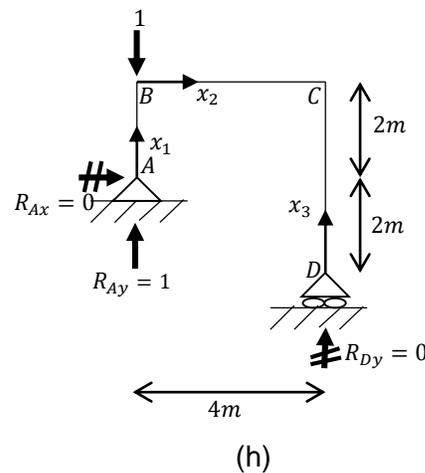
Miembro  $D - C$ .

$$M_4 = 0 \quad 0 \leq x_3 \leq 2m$$

$$M_5 = -4x_3 + 8 \quad 2m \leq x_3 \leq 4m$$

**Momentos virtuales  $m$**

El desplazamiento vertical del punto  $B$  se obtiene al colocar una carga virtual unitaria vertical en  $B$  con un sentido supuesto hacia abajo, figura 2-9h. Las cargas reales son suprimidas y se usan las mismas coordenadas  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  que en  $M$  para calcular los momentos internos  $m$  con el método de las secciones.



Las reacciones en los apoyos son resultado de

$$\sum \curvearrowright MA = 0 \Rightarrow -R_{Dy}(4) = 0 \Rightarrow \therefore R_{Dy} = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{Ay} = 1 \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{Ax} = 0$$

Por inspección, los momentos internos  $m$  son

Miembro  $A - B$ .

$$m_1 = 0 \quad 0 \leq x_1 \leq 2m$$

Miembro  $B - C$ .

$$m_2 = -(1)(x_2) + (1)(x_2) = 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 4m$$

Miembro  $D - C$ .

$$m_3 = 0 \quad 0 \leq x_3 \leq 4m$$

### Ecuación del trabajo virtual

Al aplicar la ecuación del trabajo virtual al marco, con los datos que se obtuvieron, se tiene

$$1 \cdot \Delta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$1 \cdot \delta_{VB} = \frac{1}{EI} \int_0^2 (7x_1)(0) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{2}{3}x_2 + 4\right)(0) dx_2$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_2^4 \left[14 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{12}(x_2 - 2)^3\right](0) dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^2 (0)(0) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_2^4 (-4x_3 + 8)(0) dx_3$$

Por lo tanto, el desplazamiento vertical de  $B$  es

$$\delta_{VB} = 0$$

Para calcular **el desplazamiento vertical en  $B$** , se sigue el siguiente procedimiento:

### Momentos reales $M$

Recuerde que los momentos internos  $M$  son

Miembro  $A - B$ .

$$M_1 = 7x_1 \quad 0 \leq x_1 \leq 2m$$

Miembro  $B - C$ .

$$M_2 = -\frac{2}{3}x_2 + 14 \quad 0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$M_3 = 14 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{12}(x_2 - 2)^3 \quad 2m \leq x_2 \leq 4m$$

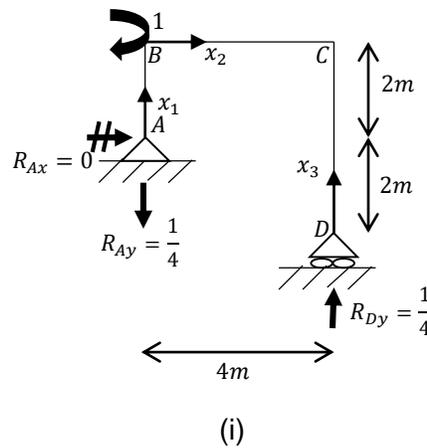
Miembro  $D - C$ .

$$M_4 = 0 \quad 0 \leq x_3 \leq 2m$$

$$M_5 = -4x_3 + 8 \quad 2m \leq x_3 \leq 4m$$

**Momentos virtuales  $m_\theta$**

Se aplica un momento de par virtual en  $B$  cuyo sentido se ha propuesto horario, puesto que debe determinarse la pendiente en ese punto, figura 2-9i. De una manera similar a los momentos  $m$ , se calculan los momentos internos  $m_\theta$ .



Las reacciones en los soportes se obtienen de

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 1 - R_{Dy}(4) = 0 \Rightarrow \therefore R_{Dy} = 1/4 \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{Ay} + (1/4) = 0 \Rightarrow \therefore R_{Ay} = 1/4 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{Ax} = 0$$

Nuevamente por inspección, los momentos internos  $m_\theta$  son

Miembro  $A - B$ .

$$m_1 = 0 \quad 0 \leq x_1 \leq 2m$$

Miembro  $B - C$ .

$$m_2 = 1 - \frac{1}{4}x_2 \quad 0 \leq x_2 \leq 4m$$

Miembro  $D - C$ .

$$m_3 = 0 \quad 0 \leq x_3 \leq 4m$$

**Ecuación del trabajo virtual**

Entonces, la pendiente en  $B$  es resultado de

$$\begin{aligned} 1 \cdot \theta &= \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_\theta(dx)}{EI} \\ 1 \cdot \theta_B &= \frac{1}{EI} \int_0^2 (7x_1)(0)dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{2}{3}x_2 + 14\right) \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right) dx_2 \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_2^4 \left[14 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{12}(x_2 - 2)^3\right] \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right) dx_2 \\ &\quad + \frac{1}{EI} \int_0^2 (0)(0)dx_3 + \frac{1}{EI} \int_2^4 (-4x_3 + 8)(0)dx_3 \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales por separado se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^2 \left(-\frac{2}{3}x_2 + 14\right) \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right) dx_2 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6}x_2^2 - \frac{25}{6}x_2 + 14\right) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{18}x_2^3 - \frac{25}{12}x_2^2 + 14x_2\right]_0^2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{18}(2^3) - \frac{25}{12}(2^2) + 14(2)\right] = \frac{181}{9EI} \\ \frac{1}{EI} \int_2^4 \left[14 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{12}(x_2 - 2)^3\right] \left(1 - \frac{1}{4}x_2\right) dx_2 &= \frac{1}{EI} \int_2^4 \left(\frac{5}{48}x_2^4 - \frac{25}{24}x_2^3 + \frac{47}{12}x_2^2 - 10x_2 + \frac{52}{3}\right) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{48}x_2^5 - \frac{25}{96}x_2^4 + \frac{47}{36}x_2^3 - 5x_2^2 + \frac{52}{3}x_2\right]_2^4 \\ \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{48}(4^5 - 2^5) - \frac{25}{96}(4^4 - 2^4) + \frac{47}{36}(4^3 - 2^3) - 5(4^2 - 2^2) + \frac{52}{3}(4 - 2)\right] &= \frac{107}{18EI} \end{aligned}$$

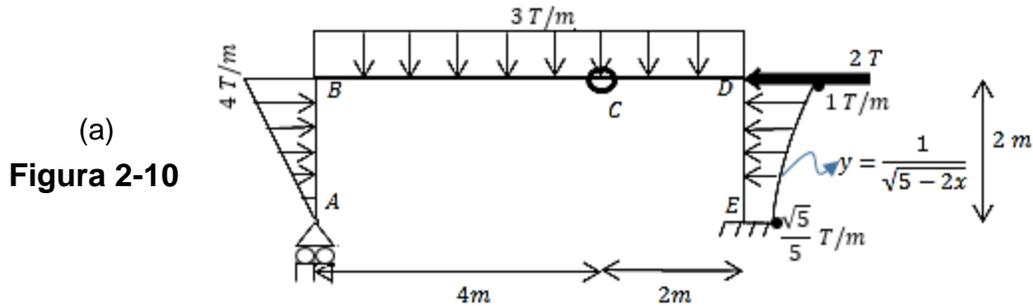
En consecuencia,

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left[0 + \frac{181}{9} + \frac{107}{18} + 0 + 0\right] = \frac{469}{18EI}$$

El signo positivo de la suma algebraica de todas las integrales de todo el marco indica que el sentido propuesto del momento virtual unitario fue correcto, por lo que el giro calculado debe ser horario.

$$\therefore \theta_B = \frac{469}{18EI} \curvearrowright$$

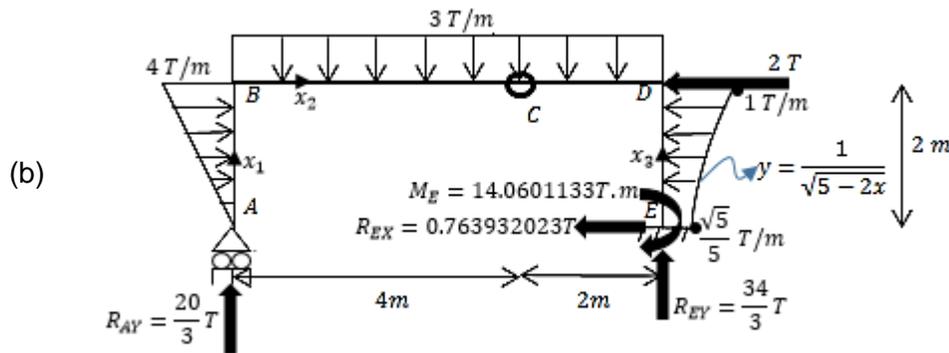
**Ejercicio 2.10** Calcule el desplazamiento horizontal del punto  $A$  en el marco mostrado en la figura 2-10a. Sobre los miembros  $A - B$ ,  $B - D$  y  $E - D$  se extienden de forma respectiva una carga cuya intensidad varía linealmente desde 0 en el punto  $A$  hasta  $4T/m$  en  $B$ , una carga distribuida uniforme de  $3T/m$  y una carga cuya intensidad, definida por la función  $y = 1/\sqrt{5 - 2x}$ , varía desde  $\frac{\sqrt{5}}{5} T/m$  en  $E$  hasta  $1 T/m$  en  $D$ . En la trabe hay una articulación en  $C$ . Considere un  $EI$  constante.



**SOLUCIÓN**

**Momentos reales  $M$**

Las fuerzas reactivas en los apoyos y los momentos reales  $M$  son calculados. Se usan las coordenadas  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , justo como se observa en la figura 2-10b.



La expresión matemática para determinar la fuerza resultante de la carga distribuida cuya intensidad se define por la función radical es

$$A_C = \int dA = \int_{L_1}^{L_2} y dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}} dx$$

Se resuelve la integral de forma indefinida.

$$\int \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}} dx = \int (5 - 2x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Sean  $n = -\frac{1}{2}$  y  $u = 5 - 2x$ . Entonces  $du = -2dx$ , y por tanto  $dx = -\frac{1}{2}du$ . Así, la regla de sustitución da

$$\int (5 - 2x)^{-\frac{1}{2}} dx = \int u^n \cdot -\frac{1}{2} du = -\frac{1}{2} \int u^n du = -\frac{1}{2} \left( \frac{u^{n+1}}{n+1} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{(5 - 2x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right)$$

$$= -(5 - 2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}} dx = \left[ -(5 - 2x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^2 = \left[ -(5 - 2(2))^{\frac{1}{2}} \right] - \left[ -(5 - 2(0))^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= -1 + 2.23606777 = 1.236067977$$

Por lo tanto,

$$A_C = 1.236067977 T$$

El punto de aplicación de tal fuerza es

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} xy dx}{\int_{L_1}^{L_2} y dx} = \frac{\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5 - 2x}} dx}{\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}} dx}$$

Como el denominador ya ha sido resuelto, sólo atendemos al numerador.

$$\int \frac{x}{\sqrt{5 - 2x}} dx$$

Sea

$$u = x \quad dv = \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}} dx$$

Entonces

$$du = dx \quad \int dv = v = \int \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}} dx = -(5 - 2x)^{\frac{1}{2}}$$

Al integrar por partes tendremos

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5 - 2x}} dx = (x) \left[ -(5 - 2x)^{\frac{1}{2}} \right] + \int (5 - 2x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int (5 - 2x)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} \int (5 - 2x)^{\frac{1}{2}} (-2dx) = -\frac{1}{2} \left( \frac{(5 - 2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = -\frac{(5 - 2x)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5 - 2x}} dx = -x(5 - 2x)^{\frac{1}{2}} - \frac{(5 - 2x)^{\frac{3}{2}}}{3} = -x(5 - 2x)^{\frac{1}{2}} - \frac{(5 - 2x)(5 - 2x)^{\frac{1}{2}}}{3}$$

$$= (5 - 2x)^{\frac{1}{2}} \left( -x - \frac{5 - 2x}{3} \right)$$

$$-x - \frac{5 - 2x}{3} = \frac{-3x - 5 + 2x}{3} = \frac{-x - 5}{3} = -\frac{1}{3}(x + 5)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{5 - 2x}} dx = -\frac{(\sqrt{5 - 2x})(x + 5)}{3}$$

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5 - 2x}} dx = \left[ -\frac{(\sqrt{5 - 2x})(x + 5)}{3} \right]_0^2 = \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{3} \approx 1.393446629$$

Por lo tanto,

$$\bar{x} = \frac{1.393446629}{1.236067977} = 1.127322004m$$

Al aplicar las ecuaciones de la estática se tiene

$$\curvearrowright \sum MC_{izq} = 0 \Rightarrow R_{AY}(4) - \left[ \frac{(4)(2)}{2} \right] \left( \frac{1}{3}(2) \right) - (3)(4) \left( \frac{1}{2}(4) \right) = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{20}{3} T \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \left[ \frac{(4)(2)}{2} \right] - 2 - 1.236067977 - R_{EX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{EX} = 0.763932023 T \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{20}{3} - (3)(6) + R_{EY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = \frac{34}{3} T \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum MC_{der} = 0 \Rightarrow (3)(2) \left( \frac{1}{2}(2) \right) + 1.236067977(2 - 1.127322004)$$

$$+ (0.763932023)(2) \left( -\frac{34}{3}(2) \right) + M_E = 0 \Rightarrow \therefore M_E = 14.0601133 T \cdot m \curvearrowright$$

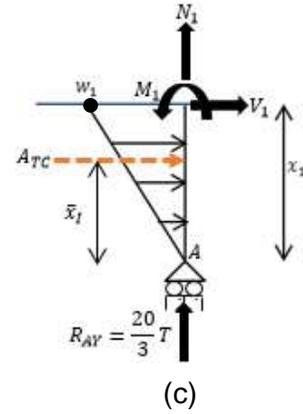
Con base en el método de secciones, se deducen los momentos internos  $M$ . Obsérvese que un solo corte en cada miembro es necesario, figuras 2-10c, 2-10e y 2-10f.

Miembro A – B.

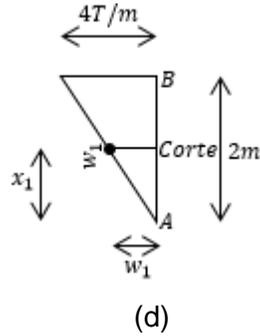
$$0 \leq x_1 \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_1 - \underbrace{\left[ \frac{(x_1)(2x_1)}{2} \right]}_{A_{TC}} \underbrace{\left( x_1 - \frac{2}{3}x_1 \right)}_{\bar{x}_I} = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{x_1^3}{3}$$



La intensidad  $w_1$  en función de  $x_1$  se obtiene con base en la figura 2-10d.



$$\frac{4}{2} = w_1/x_1 \Rightarrow w_1 = 2x_1$$

Miembro B – D.

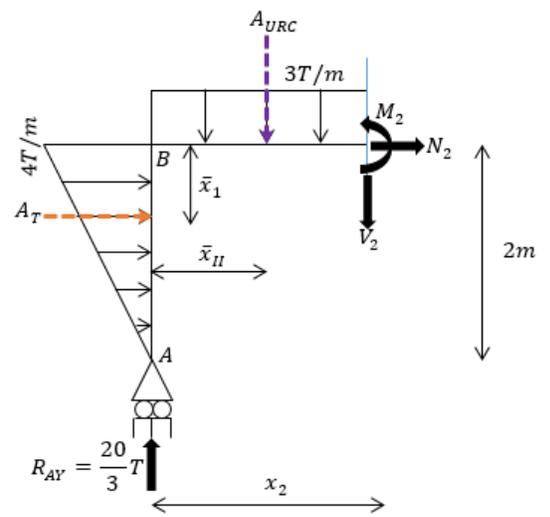
$$0 \leq x_2 \leq 6m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 + \frac{20}{3}(x_2) - \underbrace{\left[ \frac{(4)(2)}{2} \right]}_{A_T} \underbrace{\left( \frac{1}{3}(2) \right)}_{\bar{x}_I} - \underbrace{(3)(x_2)}_{A_{URC}} \underbrace{\left( \frac{1}{2}x_2 \right)}_{\bar{x}_{II}} = 0$$

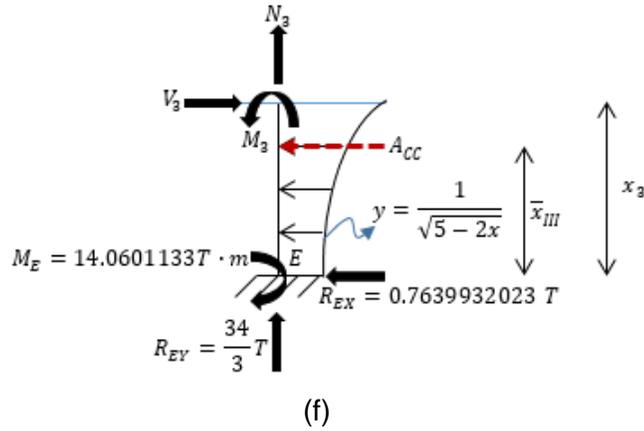
$$M_2 = -\frac{8}{3} + \frac{20}{3}x_2 - \frac{3}{2}x_2^2$$

en  $x_2 = 4, M_2 = 0 \rightarrow$  el momento en la articulación es cero.



Miembro E – D.

$$0 \leq x_3 \leq 2m$$



La carga concentrada equivalente de la carga distribuida seccionada es

$$A_{CC} = \int_0^{x_3} \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx = \left[ -(5-2x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{x_3} = \sqrt{5} - \sqrt{5-2x_3}$$

y su punto de aplicación es

$$\bar{x}_{III} = \frac{\int_0^{x_3} \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx}{\int_0^{x_3} \frac{1}{\sqrt{5-2x}} dx}$$

$$\int_0^{x_3} \frac{x}{\sqrt{5-2x}} dx = \left[ -\frac{(\sqrt{5-2x})(x+5)}{3} \right]_0^{x_3} = \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{(\sqrt{5-2x_3})(x_3+5)}{3}$$

$$\therefore \bar{x}_{III} = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{(\sqrt{5-2x_3})(x_3+5)}{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{5-2x_3}}$$

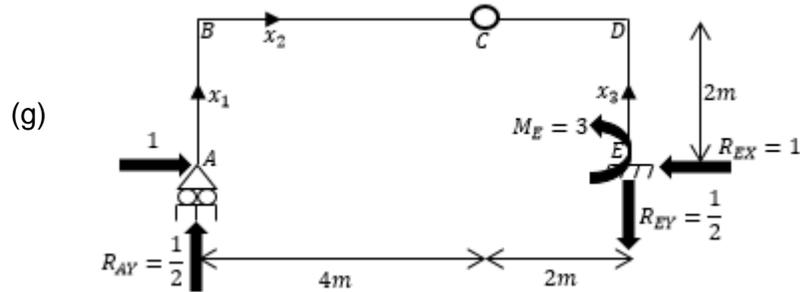
$$\oplus \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_3 + 14.06011330 + 0.7639932023(x_3)$$

$$+(\sqrt{5} - \sqrt{5-2x_3}) \left( x_3 - \frac{\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{(\sqrt{5-2x_3})(x_3+5)}{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{5-2x_3}} \right) = 0$$

$$M_3 = \frac{1}{3}(5-2x_3)^{\frac{3}{2}} + 3x_3 + 10.33333333$$

**Momentos virtuales  $m$**

Se incorpora en el marco una fuerza unitaria horizontal en el punto A, figura 2-10g. Se calculan las reacciones en los soportes y después, los momentos internos virtuales usando unas coordenadas idénticas a las que se emplearon para  $M$ .

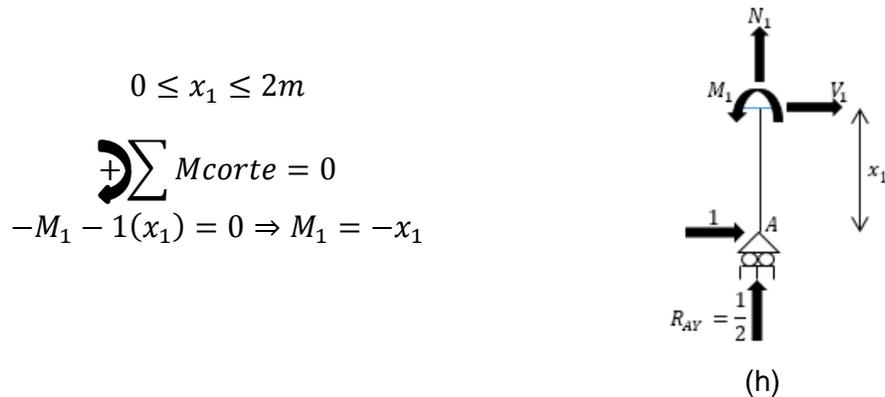


Al aplicar las ecuaciones de equilibrio resulta

$$\begin{aligned}
 + \sum MC \text{ izq} = 0 &\Rightarrow -(1)(2) + R_{AY}(4) = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{1}{2} \uparrow \\
 + \rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow 1 - R_{EX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{EX} = 1 \leftarrow \\
 + \uparrow \sum FY = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} - R_{EY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = \frac{1}{2} \downarrow \\
 + \curvearrowright \sum MC \text{ der} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2}(2) + 1(2) - M_E = 0 \Rightarrow \therefore M_E = 3 \curvearrowright
 \end{aligned}$$

A partir de las figuras 2-10h, 2-10i y 2-10j, se formulan los momentos internos  $m$  a través del método de las secciones.

Miembro A – B.



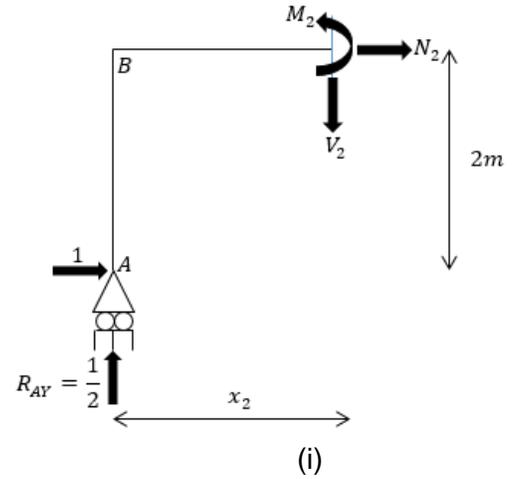
Miembro B – D.

$$0 \leq x_2 \leq 6m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 + \frac{1}{2}(x_2) - 1(2) = 0 \Rightarrow M_2 = \frac{1}{2}x_2 - 2$$

en  $x_2 = 4, M_2 = 0 \rightarrow$  el momento en la articulación es nulo.

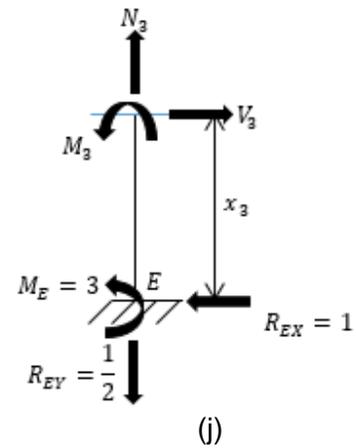


Miembro E – D.

$$0 \leq x_3 \leq 2m$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_3 + 1(x_3) - 3 \Rightarrow M_3 = x_3 - 3$$



### Ecuación del trabajo virtual

Entonces, el desplazamiento horizontal de A es resultado de

$$1 \cdot \Delta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

$$1 \cdot \Delta_{HA} = \left( \frac{1}{EI} \right) \left[ \int_0^2 \left( -\frac{x_1^3}{3} \right) (-x_1) dx_1 + \int_0^6 \left( -\frac{8}{3} + \frac{20}{3} x_2 - \frac{3}{2} x_2^2 \right) \left( \frac{1}{2} x_2 - 2 \right) dx_2 + \int_0^2 \left( \frac{1}{3} (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} + 3x_3 + 10.33333333 \right) (x_3 - 3) dx_3 \right]$$

Se resuelven las integrales por separado.

$$\int_0^2 \left(-\frac{x_1^3}{3}\right)(-x_1)dx_1 = \int_0^2 \left(\frac{x_1^4}{3}\right)dx_1 = \left[+\frac{x_1^5}{15}\right]_0^2 = \frac{32}{15}$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 \left(-\frac{8}{3} + \frac{20}{3}x_2 - \frac{3}{2}x_2^2\right)\left(\frac{1}{2}x_2 - 2\right)dx_2 &= \int_0^6 \left(-\frac{3x_2^3}{4} + \frac{19x_2^2}{3} - \frac{44x_2}{3} + \frac{16}{3}\right)dx_2 \\ &= \left[-\frac{3x_2^4}{16} + \frac{19x_2^3}{9} - \frac{22x_2^2}{3} + \frac{16x_2}{3}\right]_0^6 = -19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \left(\frac{1}{3}(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} + 3x_3 + 10.33333333\right)(x_3 - 3)dx_3 \\ &= \int_0^2 \left[-(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2x_3^2(5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{5x_3(5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} + 3x_3^2 + 1.33333x_3 - 31\right]dx_3 \end{aligned}$$

Una vez más se resuelven las integrales por separado.

$$\begin{aligned} \int_0^2 -(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}dx_3 &= \frac{1}{2} \int_0^2 -(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}(2)dx_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^2 = \frac{1}{5} \left[(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}}\right]_0^2 \\ &= -10.98033989 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 -\frac{2x_3^2(5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3}dx_3 = -\frac{2}{3} \int_0^2 x_3^2(5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}dx_3$$

Sea

$$u = x_3^2 \quad dv = (5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}dx_3$$

Entonces

$$du = 2x_3dx_3 \quad \int dv = v = \frac{-(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

Al integrar por partes tendremos

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{3} \int_0^2 x_3^2 (5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3 &= -\frac{2}{3} \left[ x_3^2 \left( \frac{-(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) - \int \frac{-2x_3(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} dx_3 \right]_0^2 \\
 &= -\frac{2}{3} \left[ \frac{-x_3^2(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2}{3} \int x_3(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 \right]_0^2 \\
 &\quad \int x_3(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Sea} & u = x_3 & dv = (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 \\
 \text{Entonces} & du = dx_3 & \int dv = v = -\frac{1}{5}(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}}
 \end{array}$$

Al integrar por partes tendremos  $\int u dv = uv - \int v du$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 \int x_3(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 &= -\frac{1}{5} x_3(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} - \int -\frac{1}{5}(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} dx_3 \\
 &= -\frac{1}{5} x_3(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{35} (5 - 2x_3)^{\frac{7}{2}} = (5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} \left( -\frac{1}{5} x_3 - \frac{1}{35} (5 - 2x_3) \right) \\
 &= (5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}} \left( -\frac{1}{7} x_3 - \frac{1}{7} \right) = -\frac{(x_3 + 1)(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}}}{7} \\
 \int_0^2 -\frac{2x_3^2(5 - 2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} dx_3 &= -\frac{2}{3} \left[ \frac{-x_3^2(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2}{3} \left[ \frac{-(x_3 + 1)(5 - 2x_3)^{\frac{5}{2}}}{7} \right] \right]_0^2 \\
 &= \left[ \frac{2x_3^2(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} + \frac{4(x_3 + 1)(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}(5 - 2x_3)}{63} \right]_0^2 \\
 &= \left[ (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{9} x_3^2 + \frac{4}{63} (x_3 + 1)(5 - 2x_3) \right) \right]_0^2 = \left[ (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{9} x_3^2 - \frac{8}{63} x_3^2 + \frac{4}{21} (x_3) + \frac{20}{63} \right) \right]_0^2 \\
 &= \left[ (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{21} x_3^2 + \frac{4}{21} x_3 + \frac{20}{63} \right) \right]_0^2 = \left[ (5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{6}{63} x_3^2 + \frac{12}{63} x_3 + \frac{20}{63} \right) \right]_0^2 \\
 &= \left[ \frac{2(3x_3^2 + 6x_3 + 10)(5 - 2x_3)^{\frac{3}{2}}}{63} \right]_0^2 = -2.46995
 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \left[ \frac{5x_3(5-2x_3)^{\frac{1}{2}}}{3} \right] dx_3 = \frac{5}{3} \int_0^2 x_3(5-2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } u &= x_3 & dv &= (5-2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3 \\ \text{Entonces } du &= dx_3 & \int dv &= v = -\frac{(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} \end{aligned}$$

Al integrar por partes tendremos  $\int u dv = uv - \int v du$ , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \int_0^2 x_3(5-2x_3)^{\frac{1}{2}} dx_3 &= \frac{5}{3} \left[ -\frac{x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} \int (5-2x_3)^{\frac{3}{2}} dx_3 \right]_0^2 \\ &= \frac{5}{3} \left[ -\frac{x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} \left( -\frac{(5-2x_3)^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \right]_0^2 = \left[ -\frac{5x_3(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} - \frac{(5-2x_3)(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} \right]_0^2 \\ &= \left[ (5-2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( -\frac{5}{9}x_3 - \frac{1}{9}(5-2x_3) \right) \right]_0^2 = \left[ (5-2x_3)^{\frac{3}{2}} \left( -\frac{1}{9}(3x_3+5) \right) \right]_0^2 \\ &= \left[ -\frac{(3x_3+5)(5-2x_3)^{\frac{3}{2}}}{9} \right]_0^2 = 4.989077715 \end{aligned}$$

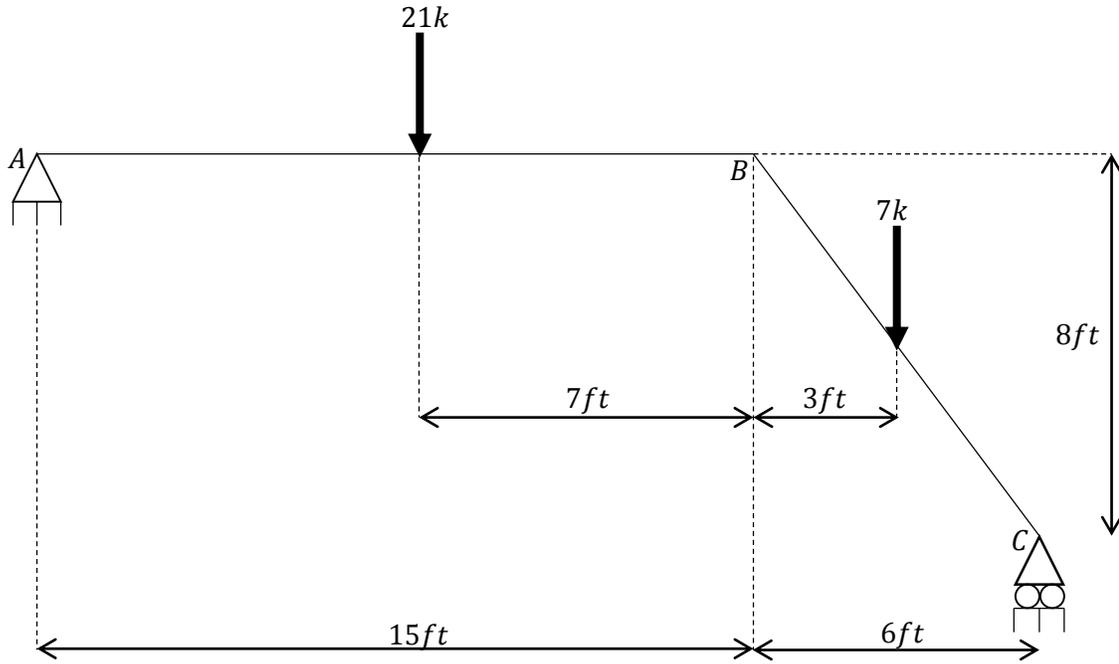
$$\int_0^2 (3x_3^2 + 1.33333x_3 - 31) dx_3 = [x_3^3 + 0.666665x_3^2 - 31x_3]_0^2 = -51.33334$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta_{HA} &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{32}{15} - 19 - 10.98033989 - 2.46995 + 4.989077715 - 51.33334 \right] \\ &= -\frac{76.66121884}{EI} \end{aligned}$$

El signo negativo indica que  $\Delta_{HA}$  es opuesto al sentido que se propuso para la carga virtual unitaria horizontal. En consecuencia,

$$\Delta_{HA} = \frac{76.66121884}{EI} \leftarrow$$

**Ejercicio 2.11** Determine el desplazamiento horizontal del punto  $C$  en el marco que se muestra en la figura 2-11a. Considere que  $E$  e  $I$  son constantes.



(a)  
**Figura 2-11**

**SOLUCIÓN**

**Momentos reales  $M$**

Se calculan las reacciones en los soportes y los momentos reales. Por conveniencia, se usarán las coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  que se muestran en la figura 2-11b.

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio se tiene

$$\curvearrowleft \sum MA = 0 \Rightarrow -21(8) - 7(18) + R_{CY}(21) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 14k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 21 + 14 - 7 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 14k \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

La longitud del miembro inclinado es

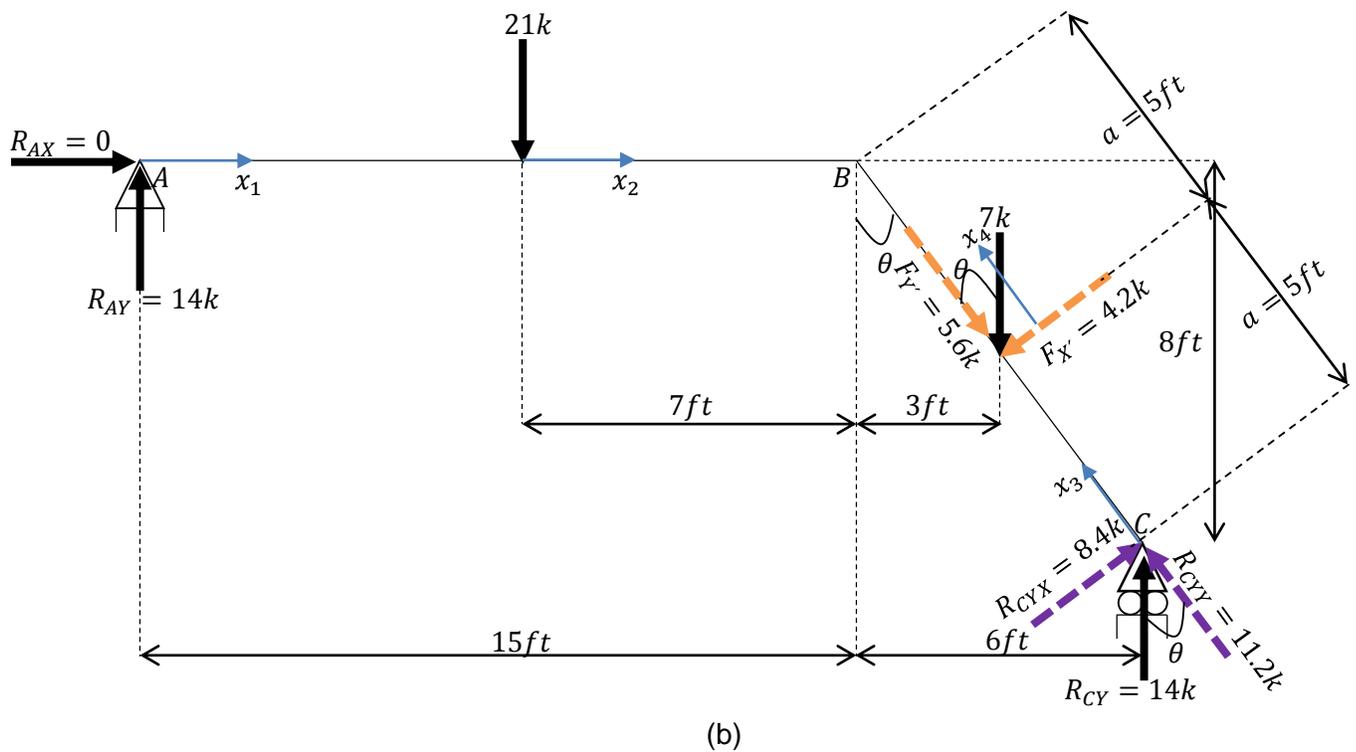
$$L_{C-B} = \sqrt{(8')^2 + (6')^2} = 10'$$

La fuerza de  $7k$  se encuentra aplicada sobre el miembro anterior a una distancia de

$$a = \frac{1}{2}L_{C-B} = \frac{1}{2}(10') = 5'$$

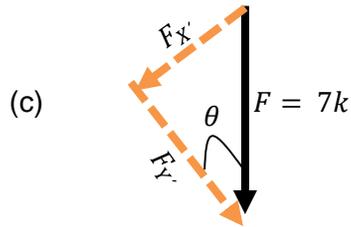
Por otra parte, se infiere que

$$\sin \theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \cos \theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$



Con base en las figuras 2-11c y 2-11d, se determinan las componentes rectangulares para los ejes que coinciden con las líneas de acción de la fuerza normal y de la fuerza cortante del miembro  $C - B$ .

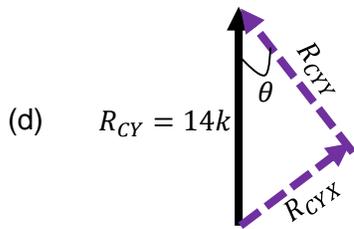
- Para  $F = 7k$



$$F_{Y'} = F \cos \theta = 7k \left( \frac{4}{5} \right) = 5.6k$$

$$F_{X'} = F \sin \theta = 7k \left( \frac{3}{5} \right) = 4.2k$$

- Para  $R_{CY} = 14k$

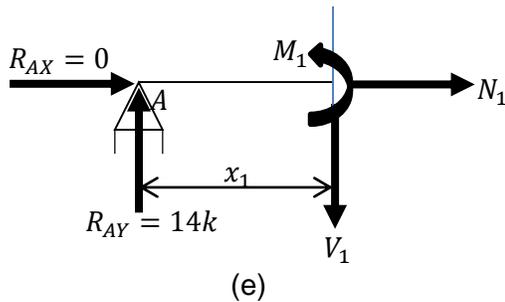


$$R_{CYY} = R_{CY} \cos \theta = 14k \left( \frac{4}{5} \right) = 10.2k$$

$$R_{CYX} = R_{CY} \sin \theta = 14k \left( \frac{3}{5} \right) = 8.4k$$

Se formulan los momentos internos  $M$  aplicando el método de secciones, figuras 2-11e, 2-11f, 2-11g y 2-11h.

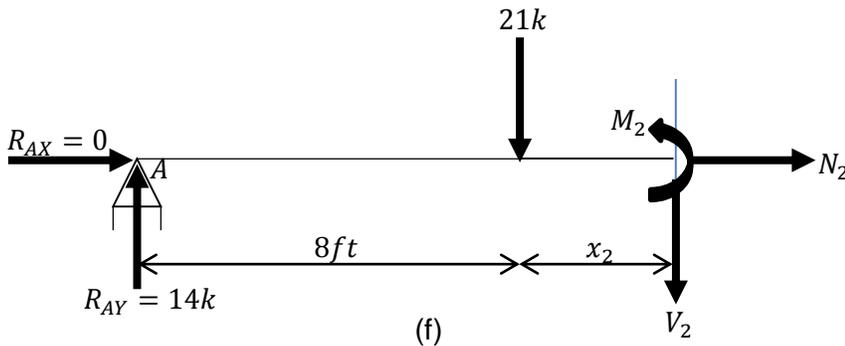
Miembro  $A - B$ .



$$0 \leq x_1 \leq 8'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-14(x_1) + M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = 14x_1$$



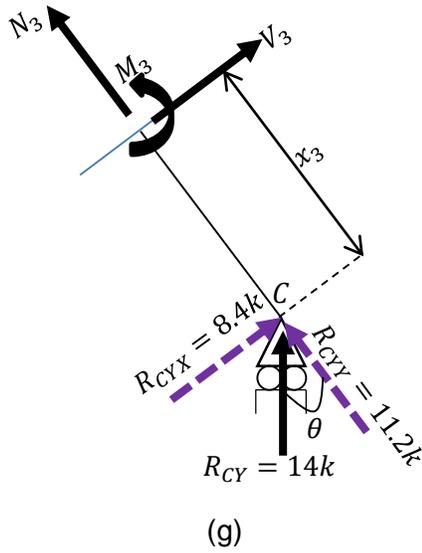
$$0 \leq x_2 \leq 7'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 + 21(x_2) - 14(8 + x_2) = 0$$

$$M_2 = -7x_2 + 112$$

Miembro C – B



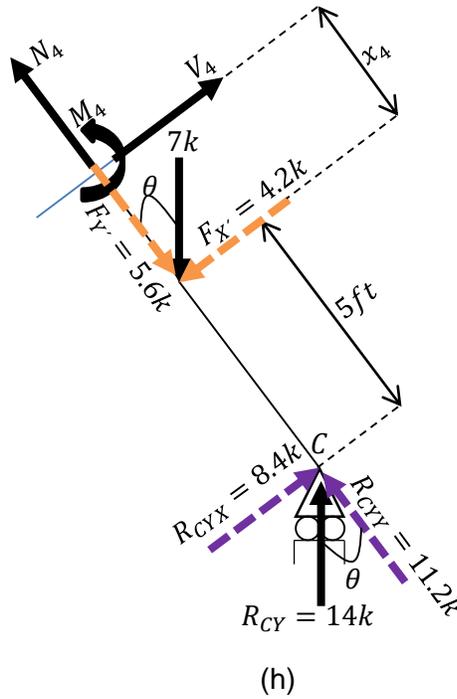
$$0 \leq x_3 \leq 5'$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{corte} = 0$$

$$-M_3 - 8.4(x_3) = 0$$

$$M_3 = -8.4x_3$$

(g)



$$0 \leq x_4 \leq 5'$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{corte} = 0$$

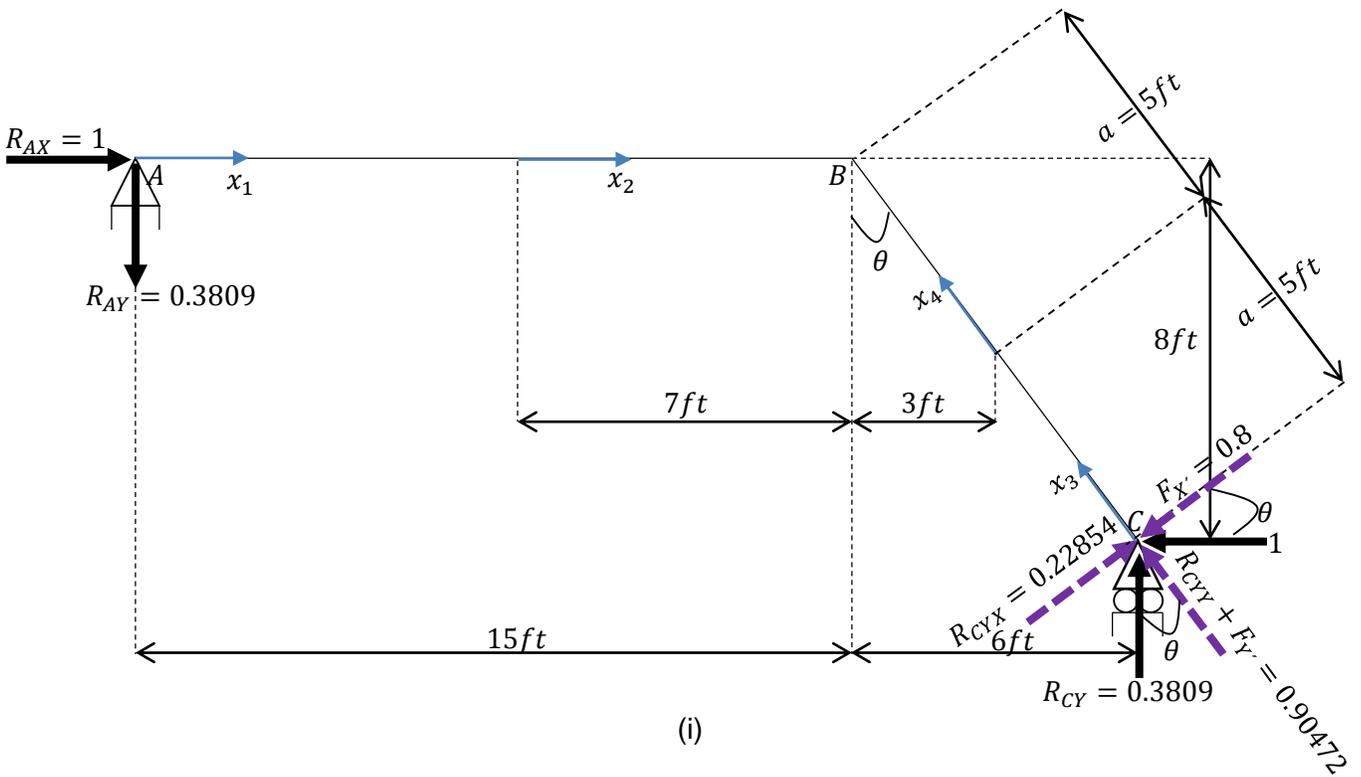
$$-M_4 + 4.2(x_4) - 8.4(x_4 + 5) = 0$$

$$M_4 = -4.2x_4 - 42$$

(h)

**Momentos virtuales  $m$**

Obsérvese en la figura 2-11i como se incorpora al marco descargado una carga unitaria horizontal en el punto C. Se determinan las reacciones en los soportes y los momentos internos virtuales con base en las coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ .



Al aplicar las ecuaciones de equilibrio resulta

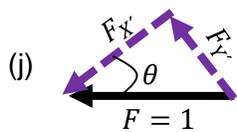
$$\curvearrowleft + \sum MA = 0 \Rightarrow R_{CY}(21) - 1(8) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 0.3809 \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 0.3809 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.3809 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 1 \rightarrow$$

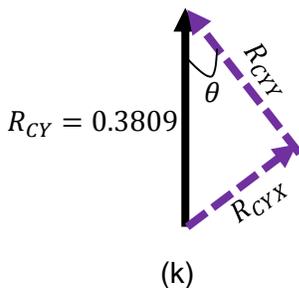
De las figuras 2-11j y 2-11k se dan las siguientes componentes rectangulares:

- Para  $F = 1$



$$F_X = F \cos \theta = 1 \left( \frac{4}{5} \right) = 0.8 \quad F_Y = F \sin \theta = 1 \left( \frac{3}{5} \right) = 0.6$$

- Para  $R_{CY} = 0.3809$

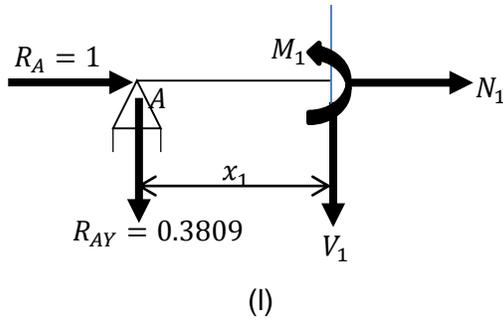


$$R_{CYY} = R_{CY} \cos \theta = 0.3809 \left( \frac{4}{5} \right) = 0.30472$$

$$R_{C Y X} = R_{CY} \sin \theta = 0.3809 \left( \frac{3}{5} \right) = 0.22854$$

Con base en las figuras 2-11l, 2-11m, 2-11n y 2-11ñ, se formulan los momentos internos  $m$  con el método de secciones.

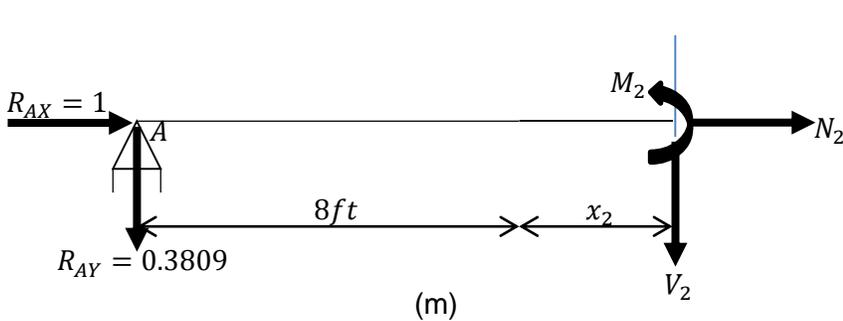
Miembro A – B.



$$0 \leq x_1 \leq 8'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_1 + 0.3809(x_1) = 0 \Rightarrow M_1 = -0.3809x_1$$



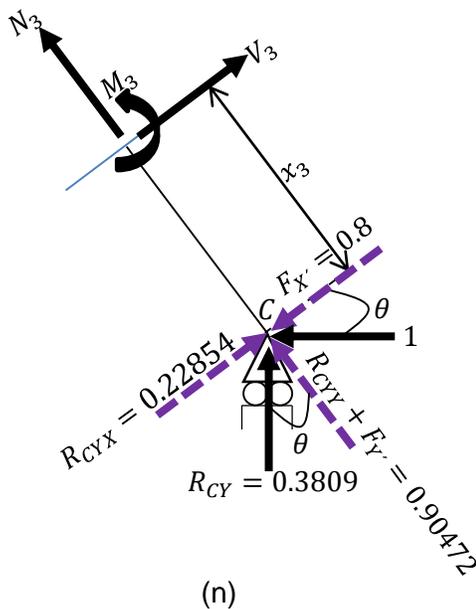
$$0 \leq x_2 \leq 7'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 + 0.3809(8 + x_2) = 0$$

$$M_2 = -3.0472 - 0.3809x_2 = 0$$

Miembro C – B.

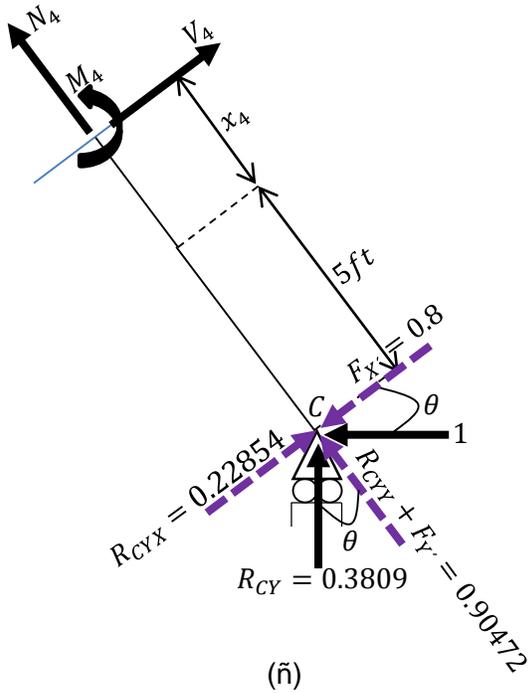


$$0 \leq x_3 \leq 5'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_3 - 0.22854(x_3) + 0.8(x_3) = 0$$

$$M_3 = 0.5715x_3$$



$$0 \leq x_4 \leq 5'$$

$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_4 - 0.2285(x_4 + 5) + 0.8(x_4 + 5) = 0$$

$$M_4 = 2.8575 + 0.5715x_4$$

### Ecuación del trabajo virtual

A partir de los datos, se tiene que el desplazamiento horizontal de A es

$$1 \cdot \Delta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm}{EI} dx$$

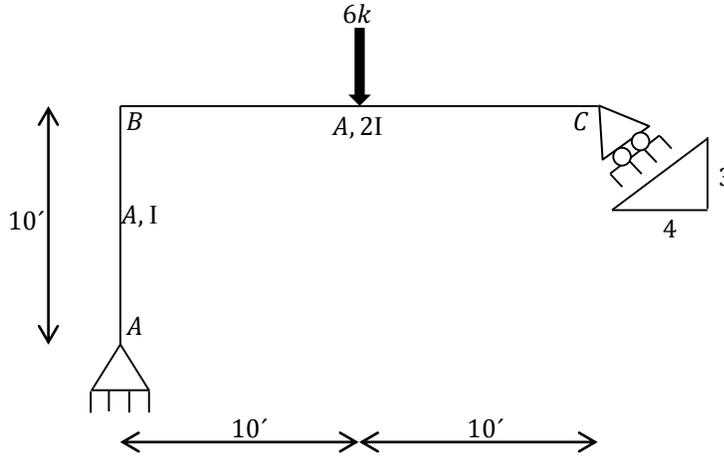
$$1 \cdot \Delta_{HA} = \int_0^8 \frac{(14x_1)(-0.3809x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^7 \frac{(-7x_2 + 112)(-3.0472 - 0.3809x_2)}{EI} dx_2$$

$$+ \int_0^5 \frac{(-8.4x_3)(0.5715x_3)}{EI} dx_3 + \int_0^5 \frac{(-4.2x_4 - 42)(2.8575 + 0.5715x_4)}{EI} dx_4 = -\frac{4867.02}{EI}$$

El signo negativo indica que el desplazamiento es hacia la derecha, opuesto al de la carga unitaria hacia la izquierda. Es decir,

$$\Delta_{HA} = \frac{4867.02}{EI} \rightarrow$$

**Ejercicio 2.12** Determine la rotación tangencial en el punto *A* del marco mostrado en la figura 2-12a. Se indican los valores relativos del área y del momento de inercia de la sección transversal de cada elemento de la estructura. El módulo de elasticidad es igual para los dos elementos.



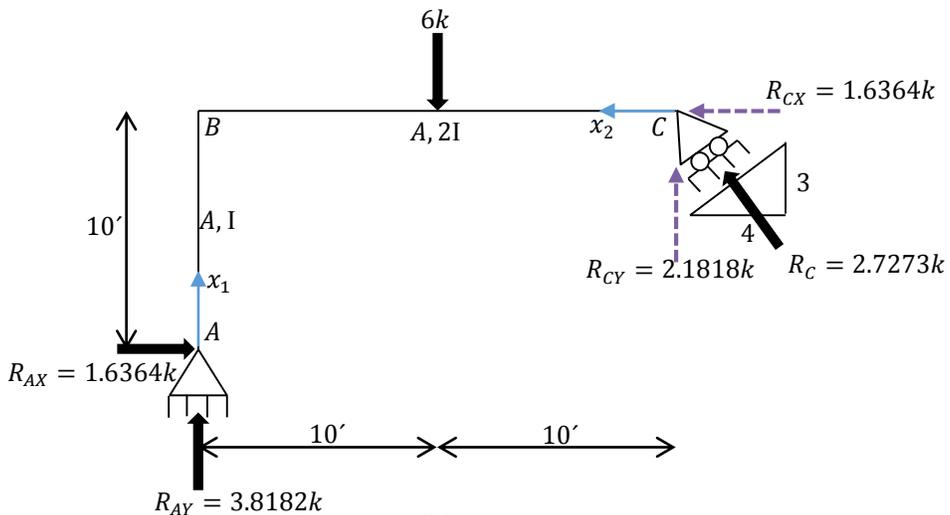
(a)

**Figura 2-12**

**SOLUCIÓN**

**Momentos reales  $M$**

Se calculan las reacciones en los soportes y los momentos producidos por las cargas reales. Se usarán las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  para la columna y la viga respectivamente, figura 2-12b.



(b)

A partir de las figuras 2-12c y 2-12d, se resuelve la fuerza reactiva  $R_C$  en sus componentes rectangulares horizontal y vertical.

Del triángulo 1, tenemos

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

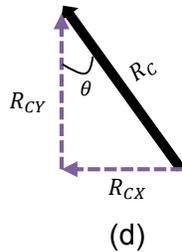
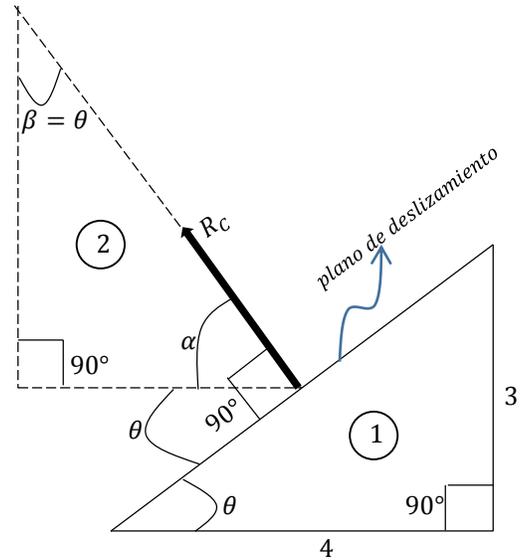
Del triángulo 2, se infiere

$$\alpha = 90^\circ - \theta = 90^\circ - \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

$$90^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha - 90^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \left(90^\circ - \tan^{-1} \frac{3}{4}\right) - 90^\circ$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{3}{4} = \theta = 36.8699^\circ$$



$$\sin \theta = \frac{R_{CX}}{R_C} \Rightarrow R_{CX} = R_C(\sin \theta) = \frac{3}{5} R_C$$

$$\cos \theta = \frac{R_{CY}}{R_C} \Rightarrow R_{CY} = R_C(\cos \theta) = \frac{4}{5} R_C$$

Al hacer uso de las ecuaciones de equilibrio resulta

$$\sum MA = 0 \Rightarrow 6(10) - R_{CX}(10) - R_{CY}(20) = 0$$

$$6(10) - \frac{3}{5} R_C(10) - \frac{4}{5} R_C(20) = 0 \Rightarrow 6(10) - \frac{30}{5} R_C - \frac{80}{5} R_C = 0$$

$$R_C \left( -\frac{30}{5} - \frac{80}{5} \right) = -60 \Rightarrow R_C(-22) = -60 \Rightarrow R_C = \frac{-60}{-22} \Rightarrow \therefore R_C = 2.7273k \swarrow$$

$$R_{CX} = \frac{3}{5}(2.7273k) = 1.6364k \leftarrow \quad R_{CY} = \frac{4}{5}(2.7273k) = 2.1818k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 6 + R_{CY} = 0 \Rightarrow R_{AY} - 6 + 2.1818 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 3.8182k \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - R_{CX} = 0 \Rightarrow R_{AX} - 1.6364 = 0 \Rightarrow R_{AX} = 1.6364k \rightarrow$$

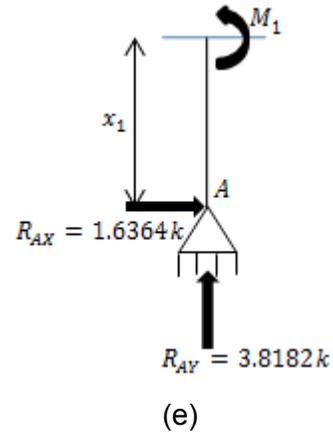
Con base en las figuras 2-12e, 2-12f y 2-12g, se deducen los momentos internos  $M$  empleando el método de las secciones.

Miembro A – B.

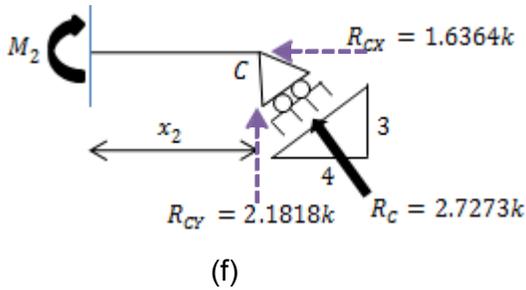
$$0 \leq x_1 \leq 10'$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 - 1.6364(x_1) = 0$$

$$M_1 = -1.6364x_1$$



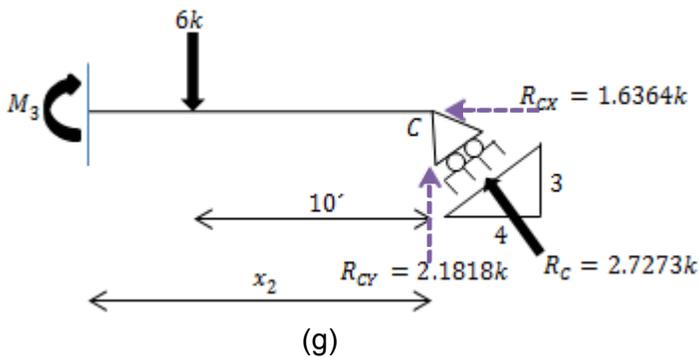
Miembro C – B.



$$0 \leq x_2 \leq 10'$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_2 - 2.1818(x_2) = 0 \Rightarrow M_2 = 2.1818x_2$$



$$10' \leq x_2 \leq 20'$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0$$

$$M_3 + 6(x_2 - 10) - 2.1818x_2 = 0$$

$$M_3 = 60 - 3.8182x_2$$

### Momentos virtuales $m_\theta$

Como puede verse en la figura 2-12h, se incorpora un momento de par unitario en A y de una manera análoga a  $M$ , se determinan los momentos internos  $m_\theta$ .

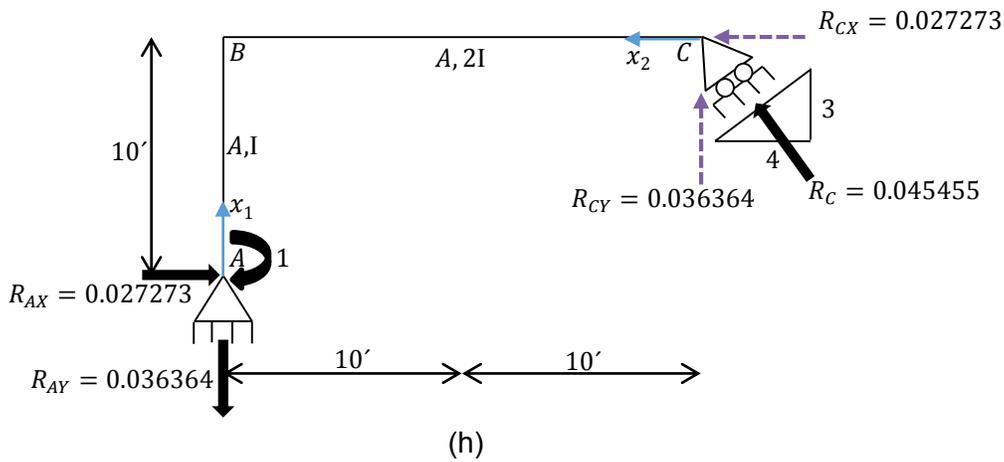
De las ecuaciones de la estática se obtiene

$$+\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{5}R_C(10) - \frac{4}{5}R_C(20) = 0 \Rightarrow \therefore R_C = 0.045455 \swarrow$$

$$R_{CX} = \frac{3}{5}(0.045455) = 0.027273 \leftarrow \quad R_{CY} = \frac{4}{5}(0.045455) = 0.036364 \uparrow$$

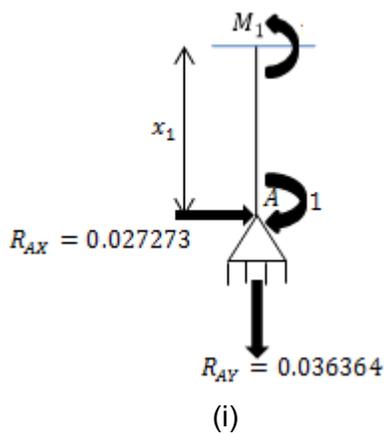
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + R_{CY} = 0 \rightarrow -R_{AY} + 0.036364 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 0.036364 \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - R_{CX} = 0 \rightarrow R_{AX} - 0.027273 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0.027273 \rightarrow$$



De las figuras 2-12i y 2-12j se escriben las ecuaciones de los momentos provocados por el momento de par unitario virtual.

Miembro A - B.



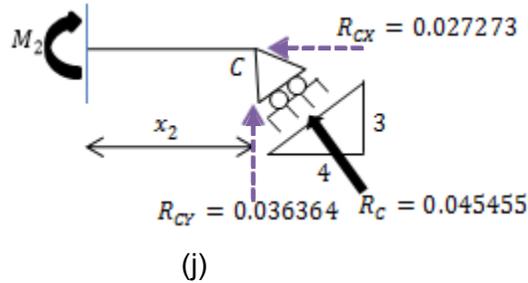
$$0 \leq x_1 \leq 10'$$

$$+\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 + 1 - 0.027273(x_1) = 0$$

$$M_1 = 1 - 0.027273x_1$$

Miembro C – B.

$$0 \leq x_2 \leq 20'$$



$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_2 - 0.036364(x_2) = 0 \Rightarrow M_2 = 0.036364x_2$$

### Ecuación del trabajo virtual.

Entonces, la pendiente en A es resultado de

$$1 \cdot \theta = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mm_{\theta}(dx)}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left( \int_0^{10} (-1.6364x_1)(1 - 0.027273x_1) dx_1 \right)$$

$$+ \frac{1}{2EI} \left( \int_0^{10} (2.1818x_2)(0.036364x_2) dx_2 + \int_{10}^{20} (60 - 3.8182x_2)(0.036364x_2) dx_2 \right)$$

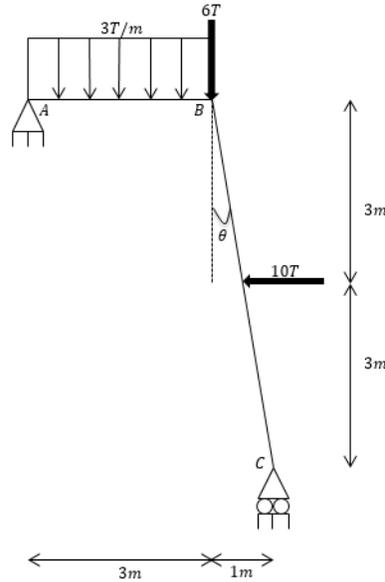
$$= \frac{1}{EI} (-66.9435 + 13.2232 + 1.65214) = \frac{1}{EI} (-52.0682)$$

El signo negativo indica que  $\theta_A$  es opuesto a la dirección del momento de par virtual unitario. Por lo tanto,

$$\theta_A = \frac{1}{EI} (52.0682) \curvearrowright$$

## 2.4 TEOREMA DE CASTIGLIANO

**Ejercicio 2.13** Determine el desplazamiento vertical del punto  $B$  del marco de dos miembros mostrado en la figura 2-13a; tome en cuenta sólo las deformaciones debidas a la flexión y considere  $EI$  como constante.



(a)

**Figura 2-13**

### SOLUCIÓN

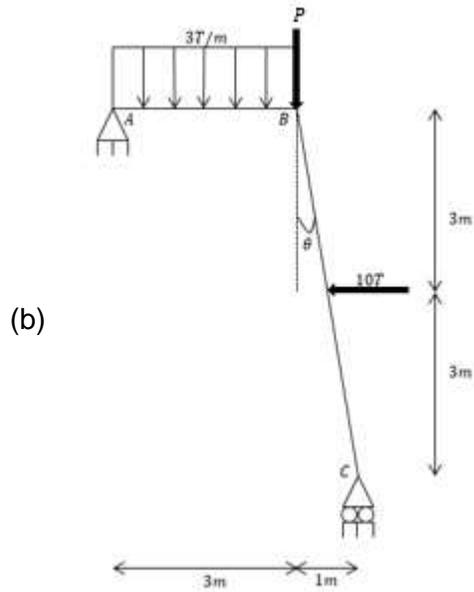
#### Fuerza externa $P$

Obsérvese en la figura 2-13b que se coloca una carga  $P$  vertical sobre el marco en el punto  $B$  debido a que debe determinarse el desplazamiento vertical en ese punto; tal fuerza de magnitud variable se ha supuesto arbitrariamente hacia abajo y aunque momentáneamente reemplaza a la fuerza de  $6T$  por encontrarse aplicada en el mismo punto, después será igual a un valor fijo de  $6T$ . Luego se calculan las reacciones en los soportes de la estructura con carga  $P$ . Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - 10T = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 10T \rightarrow$$

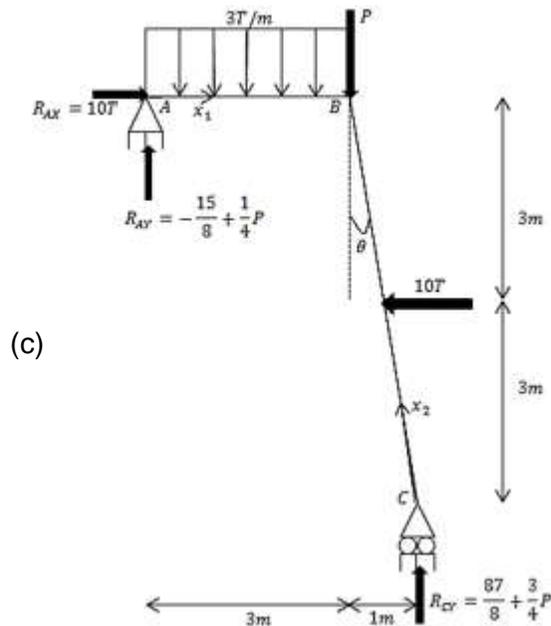
$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 3(3) \left( \frac{1}{2}(3) \right) + P(3) + 10(3) - R_{CY}(4) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = \frac{87}{8} + \frac{3}{4}P \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 3(3) - P + \frac{87}{8} + \frac{3}{4}P = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = -\frac{15}{8} + \frac{1}{4}P \uparrow$$



**Momentos internos  $M$**

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 2-13c.



Las funciones de momento son discontinuas en  $B$  por cualquiera de las siguientes tres razones que ocurren en ese punto: la carga distribuida de  $3T/m$  es discontinua, se aplica una carga puntual  $P$  y existe un cambio en la geometría de la estructura. De igual forma, son discontinuas en el punto de aplicación de la fuerza de  $10T$ .

Se aplica el método de las secciones para obtener las expresiones algebraicas que describan la variación del momento en la estructura.

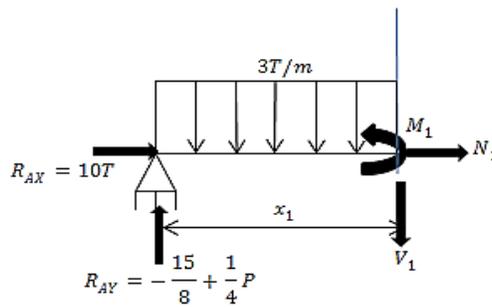
Se ha optado por definir una sola coordenada  $x$  para cada miembro, es decir, las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  que tienen sus orígenes en  $A$  y  $C$ , son válidas sólo dentro de las regiones desde  $A$  hasta  $B$  para  $x_1$  y de  $C$  a  $B$  para  $x_2$ .

El miembro  $A - B$  debe ser seccionado perpendicularmente a su eje en un punto arbitrario (intermedio en su longitud) a una distancia  $x_1$  de  $A$ , mientras que el miembro  $C - B$  debe ser seccionado perpendicularmente a su eje en un punto arbitrario a una distancia  $x_2$  de  $C$  en dos ocasiones, primero, en un punto intermedio a la región que va de  $C$  al punto de aplicación de la carga de  $10T$  y luego en un punto intermedio a la región que va desde el punto de aplicación de la carga de  $10T$  hasta  $B$ .

A partir de las figuras 2-13d, 2.13f y 2-13h, las funciones de momento para cada región y sus correspondientes derivadas parciales con respecto a  $P$  por miembro son deducidas a continuación:

Miembro  $A - B$ .

$$0 \leq x_1 \leq 3m$$



(d)

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 + \left(-\frac{15}{8} + \frac{1}{4}P\right)(x_1) - 3(x_1)\left(\frac{x_1}{2}\right) = 0$$

$$M_1 = -\frac{3}{2}x_1^2 - \frac{15}{8}x_1 + \frac{1}{4}Px_1 \quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = \frac{1}{4}x_1$$

Miembro  $C - B$ .

$$0 \leq x_2 \leq \frac{\sqrt{37}}{2}m$$

La longitud del miembro inclinado es

$$L_{CB} = \sqrt{(6m)^2 + (1m)^2} = \sqrt{37}m$$

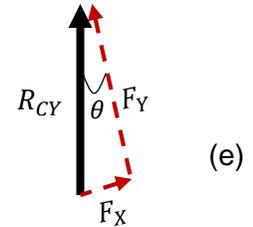
En consecuencia,

$$\sin \theta = 1/\sqrt{37} \quad \cos \theta = 6/\sqrt{37}$$

De acuerdo a la figura 2-13e, las componentes rectangulares de  $R_{CY}$  cuyas líneas de acción coinciden con las de la fuerza normal y la fuerza cortante del miembro  $C - B$  son

$$F_X = \left(\frac{87}{8} + \frac{3}{4}P\right)(\sin \theta) = \left(\frac{87}{8} + \frac{3}{4}P\right)\left(\frac{1}{\sqrt{37}}\right) = \frac{87\sqrt{37}}{296} + \frac{3\sqrt{37}}{148}P$$

$$F_Y = \left(\frac{87}{8} + \frac{3}{4}P\right)(\cos \theta) = \left(\frac{87}{8} + \frac{3}{4}P\right)\left(\frac{6}{\sqrt{37}}\right) = \frac{261\sqrt{37}}{148} + \frac{9\sqrt{37}}{74}P$$

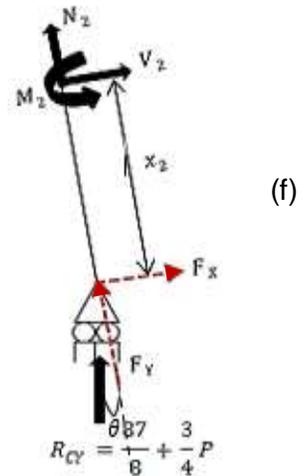


$$\sum M_{corte} = 0$$

$$-M_2 - \left(\frac{87\sqrt{37}}{296} + \frac{3\sqrt{37}}{148}P\right)(x_2) = 0$$

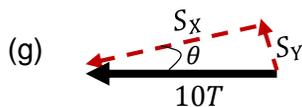
$$M_2 = -\frac{87\sqrt{37}}{296}x_2 - \frac{3\sqrt{37}}{148}Px_2$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = -\frac{3\sqrt{37}}{148}x_2$$



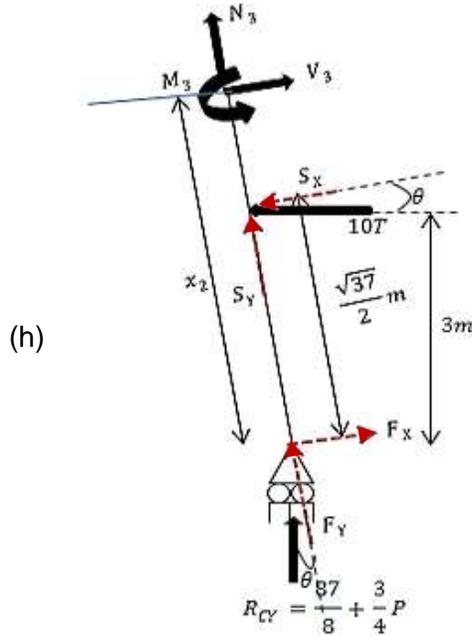
$$\frac{\sqrt{37}}{2}m \leq x_2 \leq \sqrt{37}m$$

De acuerdo a la figura 2-13g, las componentes rectangulares de la fuerza de  $10T$  cuyas líneas de acción coinciden con las de  $N_3$  y  $V_3$  son



$$S_Y = (10T)(\sin \theta) = (10T)\left(\frac{1}{\sqrt{37}}\right) = \frac{10}{\sqrt{37}}T$$

$$S_X = (10T)(\cos \theta) = (10T)\left(\frac{6}{\sqrt{37}}\right) = \frac{60}{\sqrt{37}}T$$



Por lo tanto,

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_3 - \left( \frac{87\sqrt{37}}{296} + \frac{3\sqrt{37}}{148} P \right) (x_2) + \left( \frac{60}{\sqrt{37}} \right) \left( x_2 - \frac{\sqrt{37}}{2} \right) = 0$$

$$M_3 = \frac{393\sqrt{37}}{296} x_2 - \frac{3\sqrt{37}}{148} P x_2 - 30 \quad \frac{\partial M_3}{\partial P} = -\frac{3\sqrt{37}}{148} x_2$$

### Teorema del Castigliano

Hacemos  $P = 6T$  en las ecuaciones de momento, debido a que ese es su valor real. En consecuencia,

$$M_1 = -\frac{3}{2} x_1^2 - \frac{15}{8} x_1 + \frac{1}{4} (6) x_1 = -\frac{3}{2} x_1^2 - \frac{3}{8} x_1 \quad 0 \leq x_1 \leq 3m$$

$$M_2 = -\frac{87\sqrt{37}}{296} x_2 - \frac{3\sqrt{37}}{148} (6) x_2 = -\frac{123\sqrt{37}}{296} x_2 \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{\sqrt{37}}{2} m$$

$$M_3 = \frac{393\sqrt{37}}{296} x_2 - \frac{3\sqrt{37}}{148} (6) x_2 - 30 = \frac{357\sqrt{37}}{296} x_2 - 30 \quad \frac{\sqrt{37}}{2} m \leq x_2 \leq \sqrt{37} m$$

La ecuación para conocer el desplazamiento en cualquier punto es

$$\Delta = \frac{\partial u_i}{\partial P_i} = \int_{L_1}^{L_2} M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$$

Al aplicarla, tenemos

$$\begin{aligned} \delta_{VB} = & \frac{1}{EI} \int_0^3 \left( -\frac{3}{2}x_1^2 - \frac{3}{8}x_1 \right) \left( \frac{1}{4}x_1 \right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\sqrt{37}}{2}} \left( -\frac{123\sqrt{37}}{296}x_2 \right) \left( -\frac{3\sqrt{37}}{148}x_2 \right) dx_2 \\ & + \frac{1}{EI} \int_{\frac{\sqrt{37}}{2}}^{\sqrt{37}} \left( \frac{357\sqrt{37}}{296}x_2 - 30 \right) \left( -\frac{3\sqrt{37}}{148}x_2 \right) dx_2 \end{aligned}$$

Resolviendo integrales por separado se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^3 \left( -\frac{3}{2}x_1^2 - \frac{3}{8}x_1 \right) \left( \frac{1}{4}x_1 \right) dx_1 &= \frac{1}{EI} \int_0^3 \left( -\frac{3}{8}x_1^3 - \frac{3}{32}x_1^2 \right) dx_1 \\ &= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{3}{32}x_1^4 - \frac{1}{32}x_1^3 \right]_0^3 = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{3}{32}(3^4) - \frac{1}{32}(3^3) \right] = -\frac{135}{16EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\sqrt{37}}{2}} \left( -\frac{123\sqrt{37}}{296}x_2 \right) \left( -\frac{3\sqrt{37}}{148}x_2 \right) dx_2 &= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\sqrt{37}}{2}} \left( \frac{369}{1184}x_2^2 \right) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{123}{1184}x_2^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{37}}{2}} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{123}{1184} \left( \frac{\sqrt{37}}{2} \right)^3 \right] = \frac{123\sqrt{37}}{256EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI} \int_{\frac{\sqrt{37}}{2}}^{\sqrt{37}} \left( \frac{357\sqrt{37}}{296}x_2 - 30 \right) \left( -\frac{3\sqrt{37}}{148}x_2 \right) dx_2 &= \frac{1}{EI} \int_{\frac{\sqrt{37}}{2}}^{\sqrt{37}} \left( \frac{45\sqrt{37}}{74}x_2 - \frac{1071}{1184}x_2^2 \right) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{45\sqrt{37}}{148}x_2^2 - \frac{357}{1184}x_2^3 \right]_{\frac{\sqrt{37}}{2}}^{\sqrt{37}} \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{45\sqrt{37}}{148} \left( (\sqrt{37})^2 - \left( \frac{\sqrt{37}}{2} \right)^2 \right) - \frac{357}{1184} \left( (\sqrt{37})^3 - \left( \frac{\sqrt{37}}{2} \right)^3 \right) \right] = -\frac{339\sqrt{37}}{256EI} \end{aligned}$$

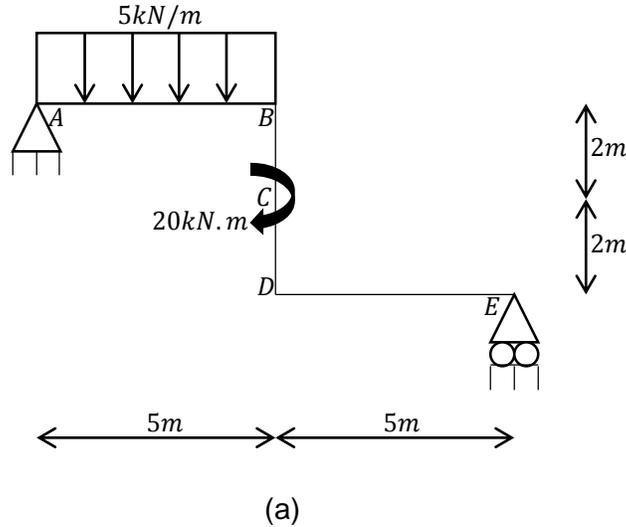
Por lo tanto,

$$\delta_{VB} = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{135}{16} + \frac{123\sqrt{37}}{256} - \frac{339\sqrt{37}}{256} \right] \cong -\frac{13.5698}{EI}$$

Dado que la suma resultante obtenida de todas las integrales es negativa, el sentido propuesto en la carga  $P$  fue incorrecto y entonces la deflexión va hacia arriba. Es decir,

$$\delta_{VB} = \frac{13.5698}{EI} \uparrow$$

**Ejercicio 2.14** Calcule la pendiente en el punto  $C$  del marco de tres elementos que se observa en la figura 2-14a. Considere  $EI$  como constante.

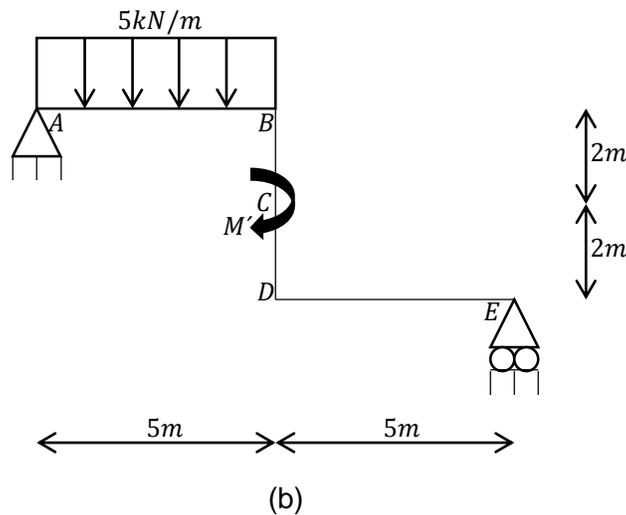


**Figura 2-14**

**SOLUCIÓN**

**Momento de par externo  $M'$**

Como se requiere calcular la rotación tangencial en el punto  $C$ , se le agrega al marco un momento  $M'$  de sentido horario (puede ser antihorario) en  $C$  y se suprime momentáneamente el momento de  $20\text{kN}\cdot\text{m}$  por estar situado en el mismo punto, figura 2-14b.

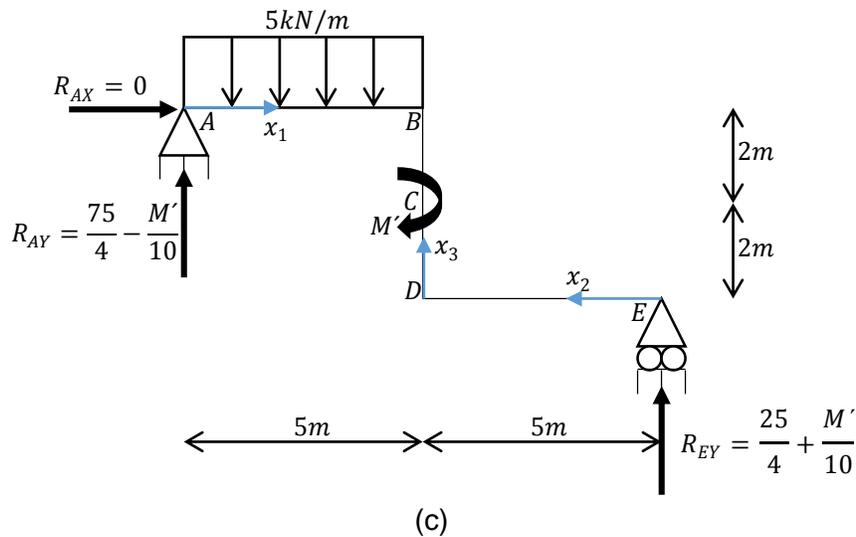


Las fuerzas reactivas en los apoyos se obtienen al emplear las ecuaciones de equilibrio.

$$\begin{aligned} \curvearrowleft \sum MA = 0 &\Rightarrow -5(5)(2.5) - M' + R_{EY}(10) = 0 \Rightarrow \therefore R_{EY} = \frac{25}{4} + \frac{M'}{10} \uparrow \\ +\uparrow \sum FY = 0 &\Rightarrow R_{AY} - 5(5) + \left(\frac{25}{4} + \frac{M'}{10}\right) = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{75}{4} - \frac{M'}{10} \uparrow \\ +\rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow \therefore R_{AX} = 0 \end{aligned}$$

### Momentos internos $M$

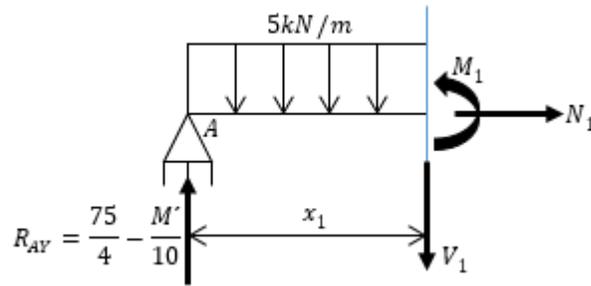
Se calculan las funciones de momento por tramos en los que la función no varía. Se usan tres coordenadas  $x$ , una para cada elemento, figura 2-14c; así, las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  con orígenes en  $A$  y  $D$  son válidas para las vigas  $A - B$  y  $E - D$ , mientras que  $x_3$  cuyo origen se asocia en  $D$  comprende la columna  $D - B$ . Ambas vigas tendrán una sola ecuación de momento flexionante, en cambio, la columna requiere de dos cortes perpendiculares a su eje, pues  $M$  es distinta entre la región  $D - C$  y  $C - B$  debido al momento de par  $M'$  aplicado en el punto  $C$ .



Con base en los diagramas de cuerpo libre representados en las figuras 2-14d, 2-14e, 2-14f y 2-14g, se escriben las ecuaciones de momento flector y se determinan las derivadas parciales con respecto a  $M'$ .

Miembro A – B.

$$0 \leq x_1 \leq 5m$$



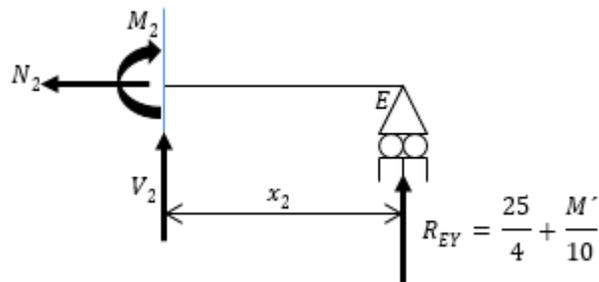
(d)

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow \left(\frac{75}{4} - \frac{M'}{10}\right)(x_1) - x_1(5)\left(\frac{x_1}{2}\right) - M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = -\frac{5}{2}x_1^2 - \frac{M'}{10}x_1 + \frac{75}{4}x_1$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial M'} = -\frac{1}{10}x_1$$

Miembro E – D.

$$0 \leq x_2 \leq 5m$$



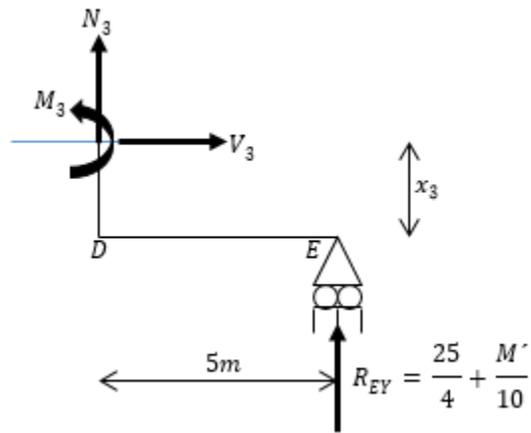
(e)

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{25}{4} + \frac{M'}{10}\right)(x_2) + M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = \frac{25}{4}x_2 + \frac{M'}{10}x_2$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial M'} = \frac{1}{10}x_2$$

Miembro  $D - B$ .

$$0 \leq x_3 \leq 2m$$

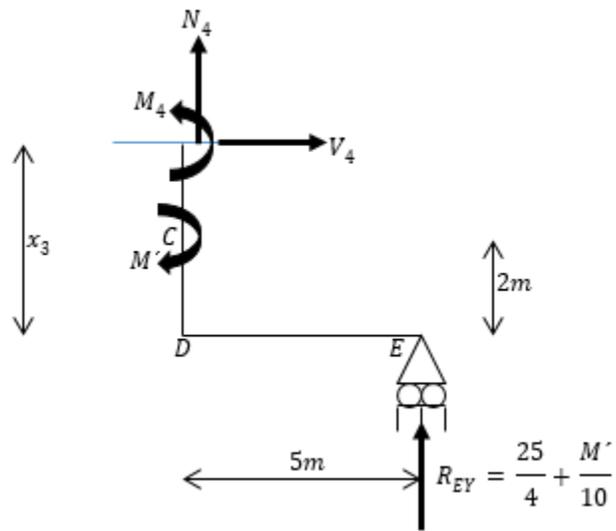


(f)

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{25}{4} + \frac{M'}{10}\right)(5) - M_3 = 0 \Rightarrow M_3 = -\frac{125}{4} - \frac{M'}{2}$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial M'} = -\frac{1}{2}$$

$$2m \leq x_3 \leq 4m$$



(g)

$$\sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{25}{4} + \frac{M'}{10}\right)(5) + M' - M_4 = 0 \Rightarrow M_4 = -\frac{125}{4} + \frac{M'}{2}$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial M'} = \frac{1}{2}$$

### Teorema del Castigliano

Al reemplazar  $M' = 20kN.m$ , su valor real, en las funciones de momento se tiene

$$M_1 = -\frac{5}{2}x_1^2 - \frac{20}{10}x_1 + \frac{75}{4}x_1 = -\frac{5}{2}x_1^2 + \frac{67}{4}x_1 \quad 0 \leq x_1 \leq 5m$$

$$M_2 = \frac{25}{4}x_2 + \frac{20}{10}x_2 = \frac{33}{4}x_2 \quad 0 \leq x_2 \leq 5m$$

$$M_3 = -\frac{125}{4} - \frac{20}{2} = -\frac{165}{4} \quad 0 \leq x_3 \leq 2m$$

$$M_4 = -\frac{125}{4} + \frac{20}{2} = -\frac{85}{4} \quad 2m \leq x_3 \leq 4m$$

Se aplica en el marco la siguiente expresión

$$\theta = \int_{L_1}^{L_2} M \left( \frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI}$$

Por consiguiente,

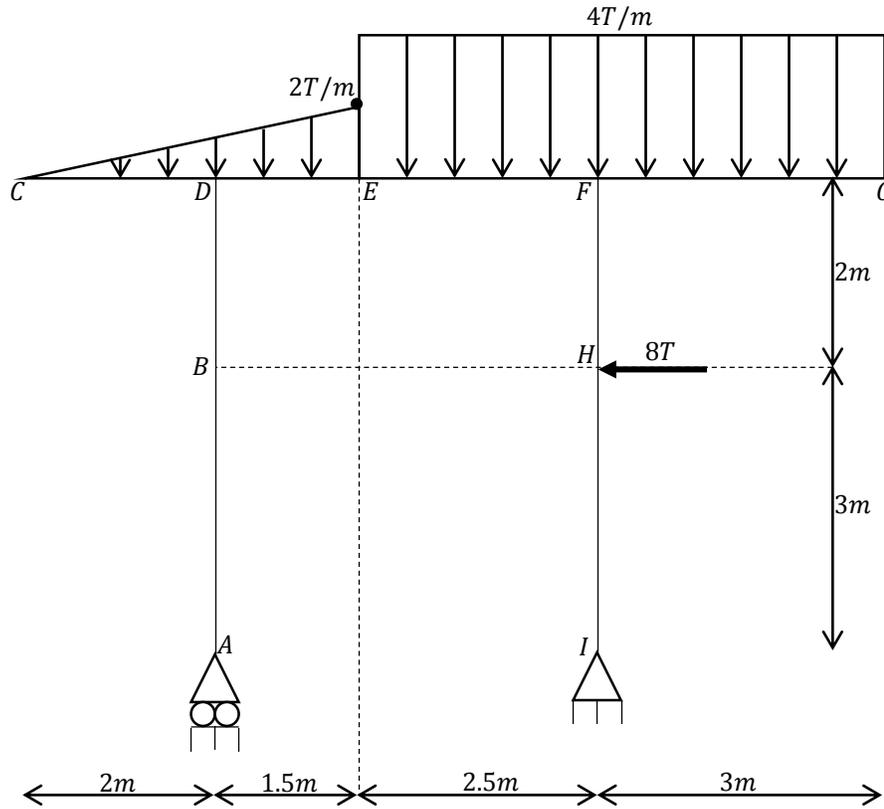
$$\theta_c = \frac{1}{EI} \int_0^5 \left( -\frac{5}{2}x_1^2 + \frac{67}{4}x_1 \right) \left( -\frac{1}{10}x_1 \right) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^5 \left( \frac{33}{4}x_2 \right) \left( \frac{1}{10}x_2 \right) dx_2$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^2 \left( -\frac{165}{4} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_2^4 \left( -\frac{85}{4} \right) \left( \frac{1}{2} \right) dx_4 = \frac{1135}{48EI}$$

Debido a que la magnitud de la pendiente resultó positiva, esta pendiente es del mismo sentido que el momento de par variable. Por lo tanto,

$$\theta_c = \frac{1135}{48EI} = \frac{23.6458}{EI}$$

**Ejercicio 2.15.** Determine el desplazamiento horizontal del punto  $B$  del marco representado en la figura 2-15a. Suponga que  $E$  e  $I$  son constantes.



(a)  
Figura 2-15

**SOLUCIÓN**

**Fuerza externa  $P$**

En vista de que se desea conocer el desplazamiento horizontal en  $C$ , se aplica una carga  $P$  de magnitud variable en tal dirección y en ese punto, y su sentido se supone hacia la derecha, aunque bien puede ir hacia la izquierda.

A continuación se calculan las reacciones en los soportes por medio de las ecuaciones de equilibrio.

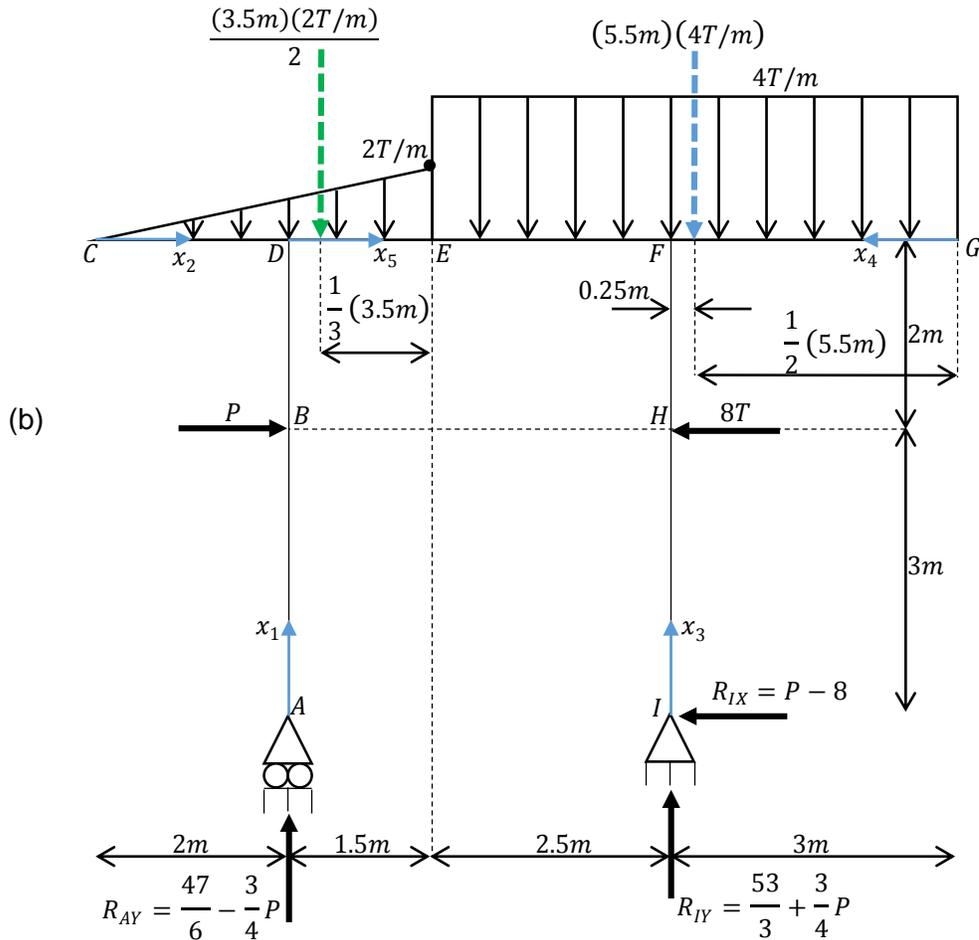
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow P - 8 - R_{IX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{IX} = P - 8 \leftarrow$$

$$\curvearrow + \sum MI = 0 \Rightarrow -R_{AY}(4) - P(3) + \left(\frac{3.5(2)}{2}\right)\left(\frac{1}{3}(3.5) + 2.5\right) - 5.5(4)(0.25) + 8(3) = 0$$

$$\therefore R_{AY} = \frac{47}{6} - \frac{3}{4}P \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow \left(\frac{47}{6} - \frac{3}{4}P\right) - \frac{3.5(2)}{2} - \frac{5.5(4)}{2} + R_{IY} \Rightarrow \therefore R_{IY} = \frac{53}{3} + \frac{3}{4}P \uparrow$$

Los resultados se muestran en la figura 2-15b.



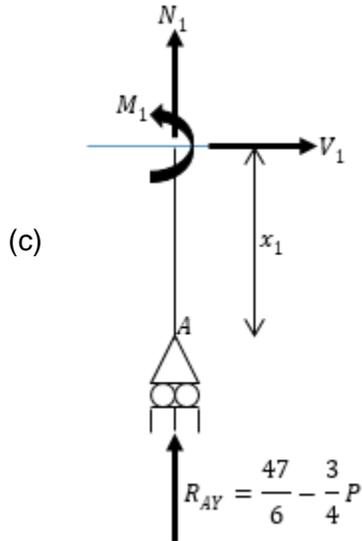
### Momentos internos $M$

Empleando el método de secciones, se calculan las funciones de momento y alternativamente se calculan las derivadas parciales, con base en las figuras 2-15c, 2-15d, 2-15e, 2-15f, 2-15g, 2-15h, 2-15i y 2-15j. Se ocupa una coordenada  $x$  para cada elemento.

Entonces, las coordenadas  $x_1, x_2, x_3, x_4$  y  $x_5$  con orígenes establecidos en los puntos  $A, C, I, G$  y  $D$  son válidas dentro de las regiones  $A - D, C - D, I - F, G - F$  y  $D - F$ , respectivamente. Observe como por la discontinuidad de carga, las dos columnas y la viga intermedia tendrán dos ecuaciones de momento, mientras que las vigas en voladizo sólo tendrán una ecuación de momento.

Miembro A – D.

$$0 \leq x_1 \leq 3m$$



$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow M_1 = 0$$

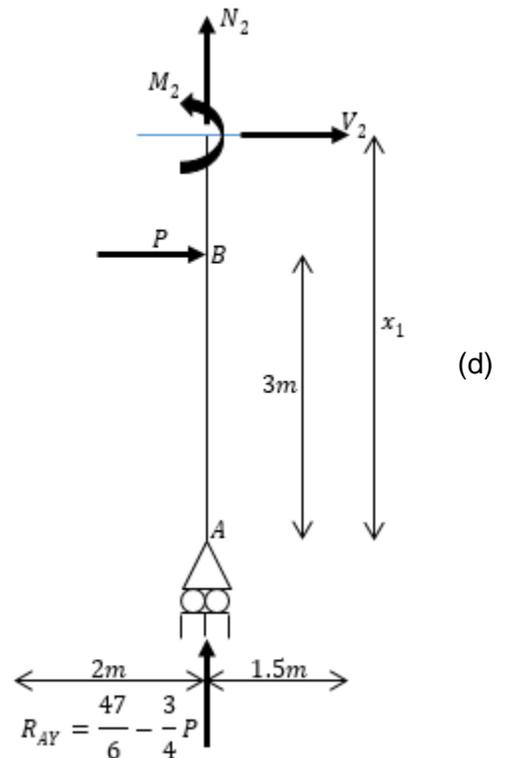
$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0$$

$$3m \leq x_1 \leq 5m$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow P(x_1 - 3) + M_2 = 0$$

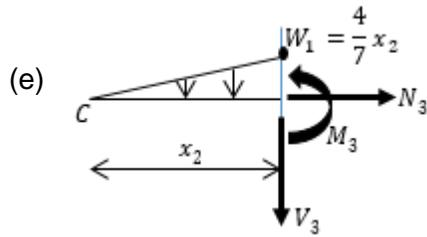
$$M_2 = -Px_1 + 3P$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = 3 - x_1$$



Miembro C – D.

$$0 \leq x_2 \leq 2m$$



$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow \left( \frac{x_2 \left( \frac{4}{7} x_2 \right)}{2} \right) \left( \frac{x_2}{3} \right) + M_3 = 0$$

$$M_3 = -\frac{2}{21} x_2^3 \quad \frac{\partial M_3}{\partial P} = 0$$

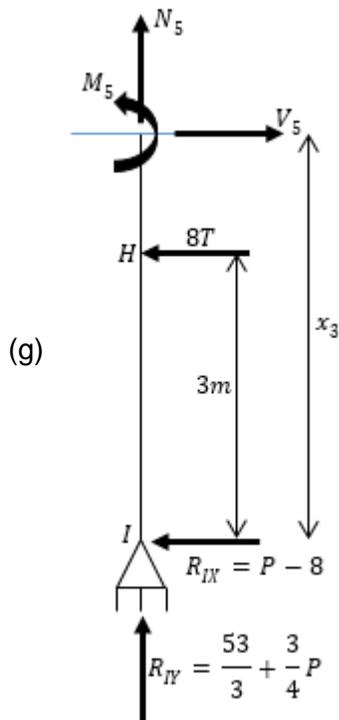
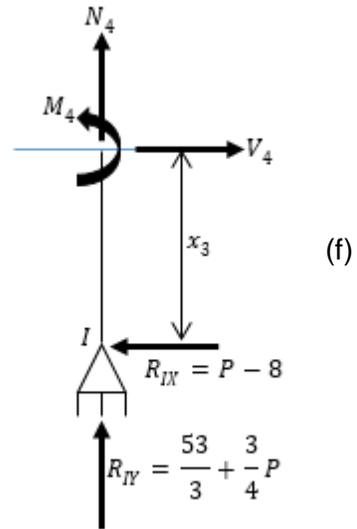
Miembro I – F.

$$0 \leq x_3 \leq 3m$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -(P - 8)(x_3) + M_4 = 0$$

$$M_4 = Px_3 - 8x_3$$

$$\frac{\partial M_4}{\partial P} = x_3$$



$$3m \leq x_3 \leq 5m$$

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -(P - 8)(x_3) - 8(x_3 - 3) + M_5 = 0$$

$$M_5 = -24 + Px_3$$

$$\frac{\partial M_5}{\partial P} = x_3$$

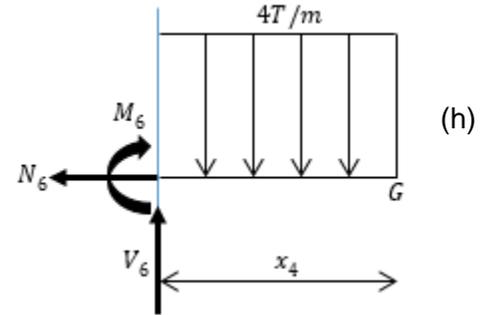
Miembro  $G - E$ .

$$0 \leq x_4 \leq 3m$$

$$\curvearrowleft \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -4(x_4) \left( \frac{x_4}{2} \right) - M_6 = 0$$

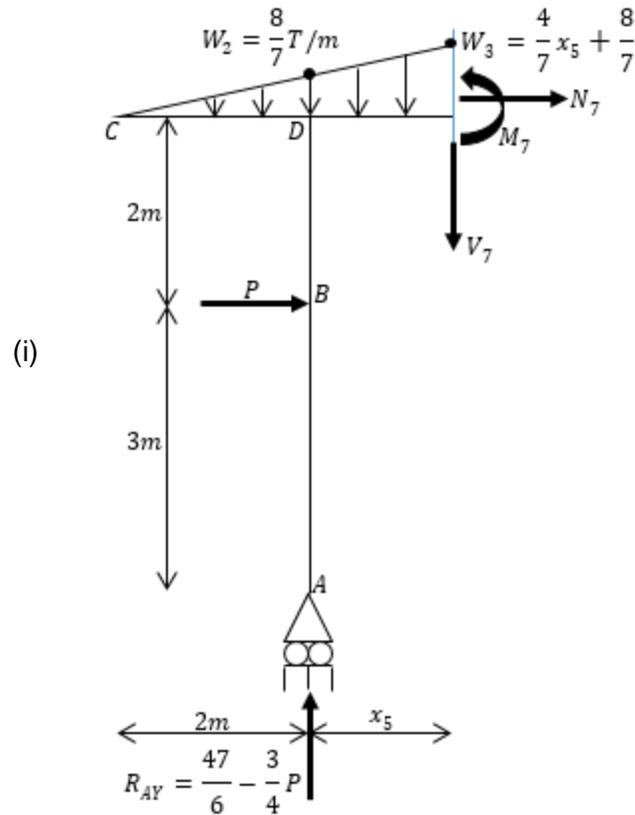
$$M_6 = -2x_4^2$$

$$\frac{\partial M_6}{\partial P} = 0$$



Miembro  $D - F$ .

$$0 \leq x_5 \leq 1.5m$$

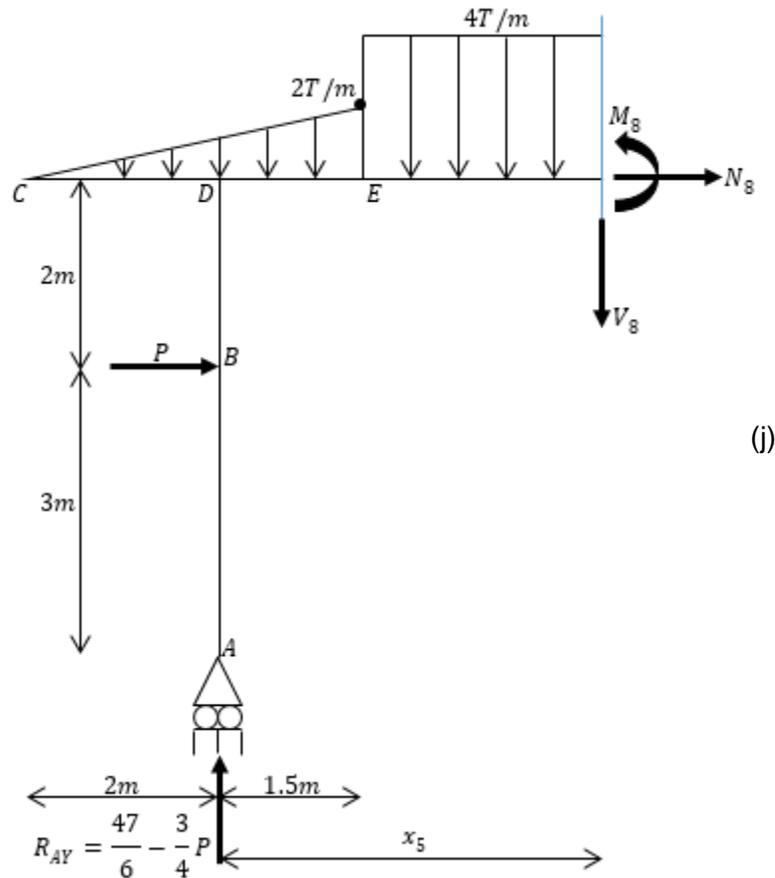


$$\curvearrowleft \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -\left( \frac{47}{6} - \frac{3}{4}P \right) (x_5) + P(2) + \left( \frac{(2) \left( \frac{8}{7} \right)}{2} \right) \left( \frac{1}{3} (2) + x_5 \right)$$

$$+(x_5) \left(\frac{8}{7}\right) \left(\frac{1}{2} x_5\right) + \left(\frac{(x_5) \left(\frac{4}{7} x_5\right)}{2}\right) \left(\frac{1}{3} (x_5)\right) + M_7 = 0$$

$$M_7 = -\frac{2}{21} x_5^3 - \frac{4}{7} x_5^2 - \frac{3}{4} P x_5 + \frac{281}{42} x_5 - 2P - \frac{16}{21} \quad \frac{\partial M_7}{\partial P} = -\frac{3}{4} x_5 - 2$$

$$1.5m \leq x_5 \leq 4m$$



$$\begin{aligned} \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow & -\left(\frac{47}{6} - \frac{3}{4}P\right)(x_5) + P(2) + \left(\frac{3.5(2)}{2}\right) \left(\frac{1}{3}(3.5) + (x_5 - 1.5)\right) \\ & + (x_5 - 1.5)(4) \left(\frac{x_5 - 1.5}{2}\right) + M_8 = 0 \end{aligned}$$

$$M_8 = -2x_5^2 - \frac{3}{4}Px_5 + \frac{31}{3}x_5 - 2P - \frac{10}{3} \quad \frac{\partial M_8}{\partial P} = -\frac{3}{4}x_5 - 2$$

**Teorema del Castigliano**

Si sustituimos  $P = 0$  en cada una de las ecuaciones de momento flector, entonces

$$M_1 = 0 \quad 0 \leq x_1 \leq 3m$$

$$M_2 = -(0)x_1 + 3(0) = 0 \quad 3 \leq x_1 \leq 5m$$

$$M_3 = -\frac{2}{21}x_2^3 \quad 0 \leq x_2 \leq 2m$$

$$M_4 = (0)x_3 - 8x_3 = -8x_3 \quad 0 \leq x_3 \leq 3m$$

$$M_5 = -24 + (0)x_3 = -24 \quad 3m \leq x_3 \leq 5m$$

$$M_6 = -2x_4^2 \quad 0 \leq x_4 \leq 3m$$

$$M_7 = -\frac{2}{21}x_5^3 - \frac{4}{7}x_5^2 - \frac{3}{4}(0)x_5 + \frac{281}{42}x_5 - 2(0) - \frac{16}{21} = -\frac{2}{21}x_5^3 - \frac{4}{7}x_5^2 + \frac{281}{42}x_5 - \frac{16}{21} \quad 0 \leq x_5 \leq 1.5m$$

$$M_8 = -2x_5^2 - \frac{3}{4}(0)x_5 + \frac{31}{3}x_5 - 2(0) - \frac{10}{3} = -2x_5^2 + \frac{31}{3}x_5 - \frac{10}{3} \quad 1.5m \leq x_5 \leq 4m$$

El desplazamiento horizontal del punto  $B$  en el marco puede evaluarse con la siguiente ecuación:

$$\Delta = \int_{L_1}^{L_2} M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{HB} &= \frac{1}{EI} \int_0^3 (0)(0) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_3^5 (0)(3 - x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^2 \left( -\frac{2}{21}x_2^3 \right) (0) dx_2 \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^3 (-8x_3)(x_3) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_3^5 (-24)(x_3) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^3 (-2x_4^2)(0) dx_4 \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^{1.5} \left( -\frac{2}{21}x_5^3 - \frac{4}{7}x_5^2 + \frac{281}{42}x_5 - \frac{16}{21} \right) \left( -\frac{3}{4}x_5 - 2 \right) dx_5 \\ &+ \frac{1}{EI} \int_{1.5}^4 \left( -2x_5^2 + \frac{31}{3}x_5 - \frac{10}{3} \right) \left( -\frac{3}{4}x_5 - 2 \right) dx_5 = -\frac{369.501}{EI} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sentido correcto del desplazamiento calculado es

$$\Delta_{HB} = \frac{369.501}{EI} \leftarrow$$

## CAPÍTULO 3

### ANÁLISIS DE ARMADURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

#### 3.1 REACCIONES EN LOS SOPORTES Y DETERMINACIÓN DE LAS FUERZAS AXIALES POR EL MÉTODO DE LOS NODOS

**Ejercicio 3.1** Calcule las reacciones en los soportes y use el método de los nodos para determinar las fuerzas internas de la armadura que se observa en la figura 3-1a. Indique si los elementos están en tensión o compresión.

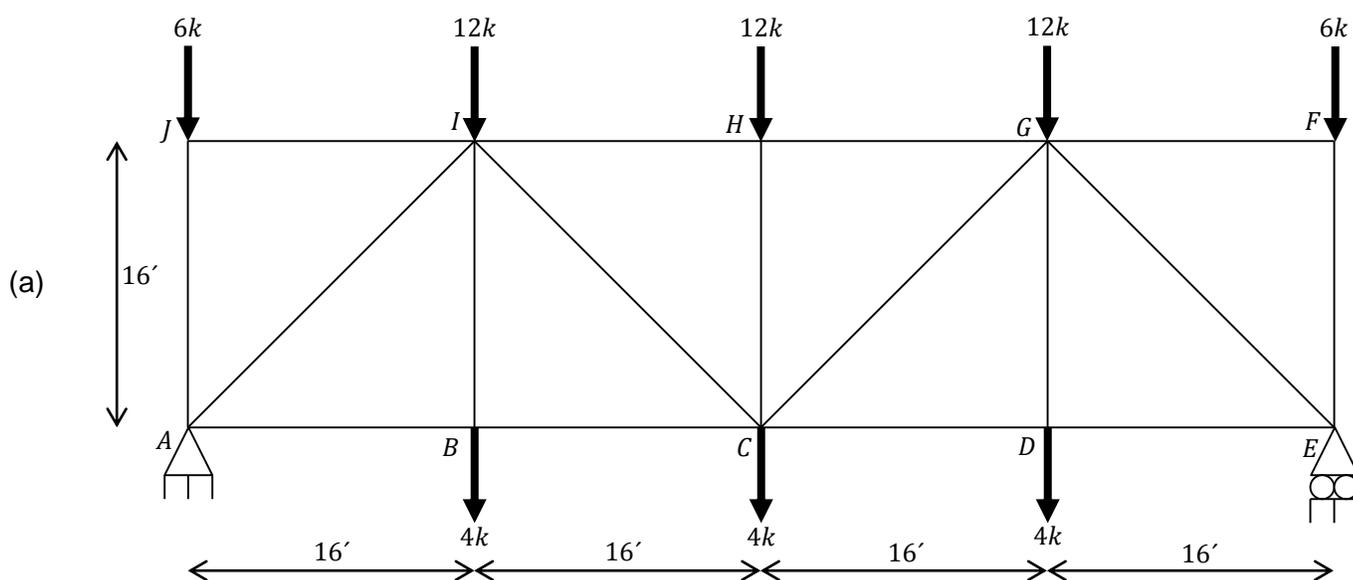


Figura 3-1

### SOLUCIÓN

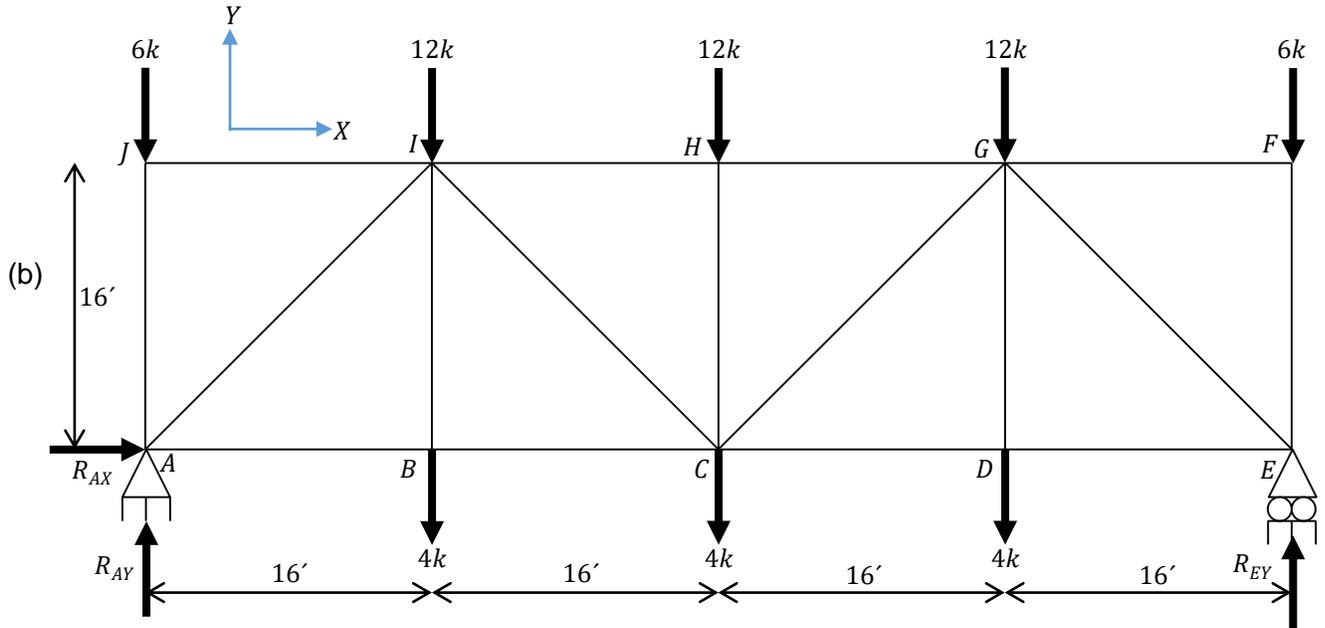
#### Verificación del grado de indeterminación

La armadura de este ejemplo es isostática externamente debido a que se tienen  $r = 3$  reacciones de apoyo (una horizontal y una vertical en el soporte articulado  $A$ , y una vertical en el soporte simple  $E$ ), tres ecuaciones de equilibrio ( $\sum FX = 0$ ,  $\sum FY = 0$ ,  $\sum M = 0$ ) y ninguna ecuación de condición, es decir,  $c = 0$ . Por otra parte, hay  $b = 17$  barras y  $j = 10$  nodos (etiquetados desde  $A$  hasta  $J$ ). Si  $b + r = 17 + 3 = 20$  y  $2j = 2(10) = 20$ , entonces  $b + r = 2j$ . Por lo tanto, la armadura es isostática internamente.

#### Cálculo de las reacciones en los apoyos

Las reacciones en los soportes se determinan de la misma forma que en las vigas y los marcos. Se realiza un diagrama de cargas en el que aparezcan las fuerzas externas que se aplican a la armadura y las fuerzas reactivas cuyos sentidos deben

suponerse arbitrariamente por ser incógnitas. Se orientan los ejes  $X$  y  $Y$  a lo largo de las líneas que ofrecen la reducción de fuerzas más simple en sus componentes  $X$  y  $Y$ . Se plantean las ecuaciones de equilibrio y en su caso, las ecuaciones de condición, y se resuelven; se invierte el sentido de cada fuerza que se propuso en el diagrama cuya magnitud resulte negativa en la solución de las ecuaciones de equilibrio. En la figura 3-1b se representa el diagrama de cargas de la estructura.



Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en una secuencia y al emplear los resultados calculados previamente, se obtiene

$$\curvearrowright \sum MA = 0$$

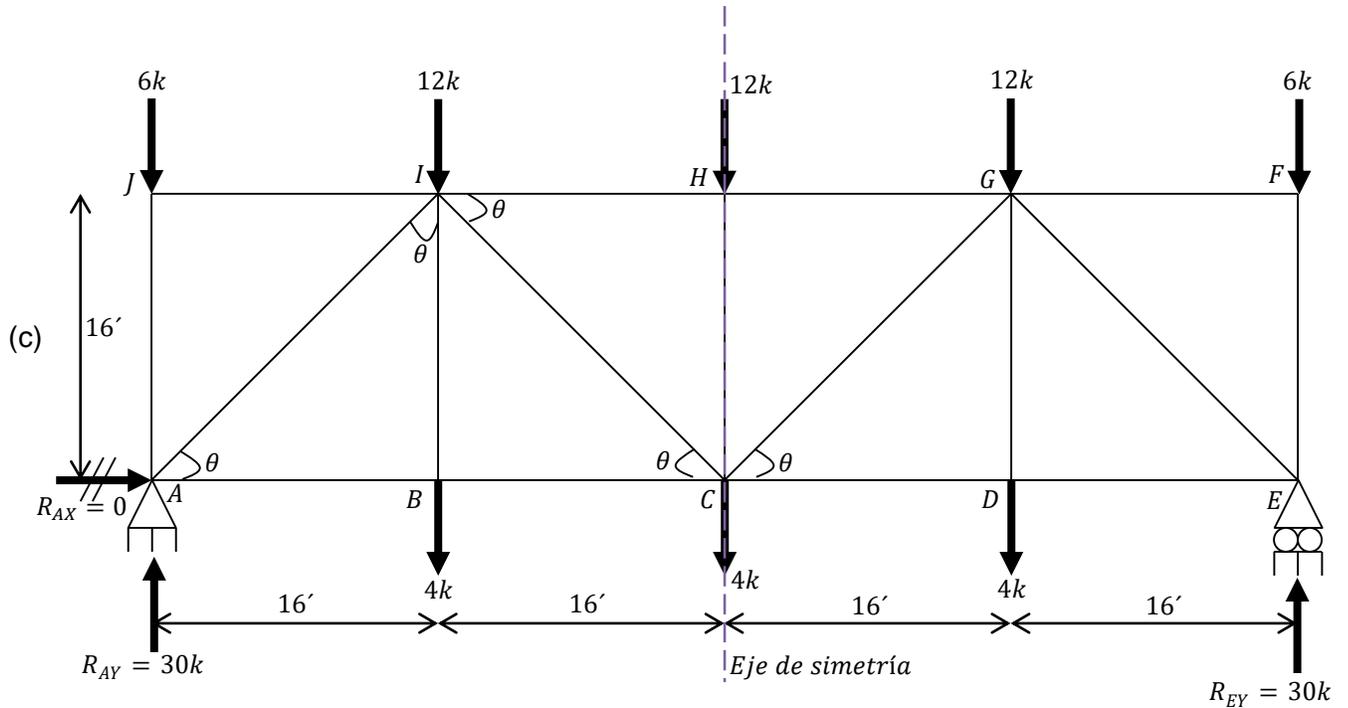
$$12(16) + 4(16) + 12(32) + 4(32) + 12(48) + 4(48) + 6(64) - R_{EY}(64) = 0$$

$$R_{EY} = -\frac{1920}{-64} \Rightarrow \therefore R_{EY} = 30k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -6 - 12 - 4 - 12 - 4 - 12 - 4 - 6 + 30 + R_{AY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 30k \uparrow$$

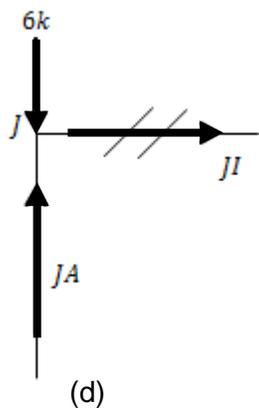
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 0$$

Como era de esperarse, al ser todas las cargas verticales, la reacción horizontal es nula. Los resultados obtenidos se visualizan en la figura 3-1c; obsérvese que sólo es necesario determinar las fuerzas en la mitad de los elementos debido a la simetría en la estructura tanto con respecto a la carga como a la geometría.



**Método de los nodos**

Nodo *J*. Para calcular las fuerzas internas, se empieza con el nodo (junta) *J*, ya que en él sólo hay dos fuerzas desconocidas, que es el número máximo de fuerzas desconocidas que puede haber en un nodo a analizar, así que también se pudo haber iniciado con el nodo *F*. Se representa el diagrama de cuerpo libre del nodo, figura 3-1d; el sentido de las incógnitas *JA* y *JI* se propone arbitrariamente. Los ejes *X – Y* han sido orientados de manera horizontal y vertical para mayor facilidad. Se plantearon entonces, para este nodo, las dos ecuaciones de equilibrio que corresponden a fuerzas concurrentes en un plano, y a partir de estas ecuaciones se determinaron ambas fuerzas desconocidas. Una respuesta positiva indica que el sentido propuesto es correcto, mientras que una respuesta negativa indica que el sentido que se supuso debe ser invertido. Así mismo, recuerde que un elemento en

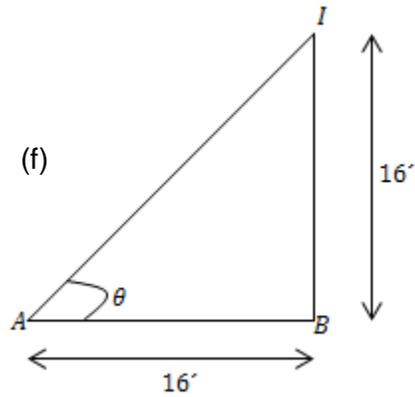
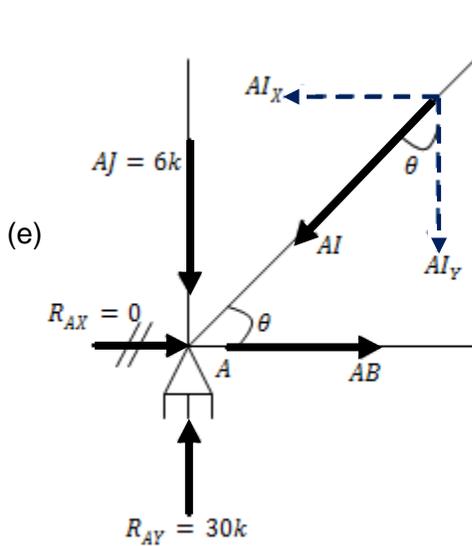


$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore JI = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -6 + JA = 0 \Rightarrow \therefore JA = 6k \text{ (Compresión)}$$

compresión “empuja” a la junta y un elemento en tensión “jala” a la junta. Una vez calculada una fuerza de barra desconocida, deben usarse su magnitud y sentido correctos (tensión o compresión) en los diagramas de cargas de los nodos subsecuentes. Lo explicado corresponde al algoritmo que debe seguirse para analizar un nodo.

Nodo *A*, figura 3-1e. A continuación se analiza este nodo, ya que al haber calculado anteriormente la fuerza del elemento *J – A*, sólo quedaban dos incógnitas, las fuerzas *AB* y *AI*.



$$\overline{AI} = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}m$$

$$\sin \theta = \frac{\overline{BI}}{\overline{AI}} = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Con base en la figura 3-1f, se han determinado  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  debido a que las componentes rectangulares horizontal y vertical de la fuerza *AI* involucran esos términos, en forma respectiva. Como el carácter (tensión o compresión) debe ser el mismo en los dos nodos que definen el elemento, se observa que la fuerza interna de la barra *A – J* empuja a la junta *A* tal y como lo hace con *J*. El análisis se hace también con las dos ecuaciones de equilibrio correspondientes a fuerzas concurrentes en un plano.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - AJ - AI_Y = 0 \Rightarrow 30 - 6 - AI(\cos \theta) = 0$$

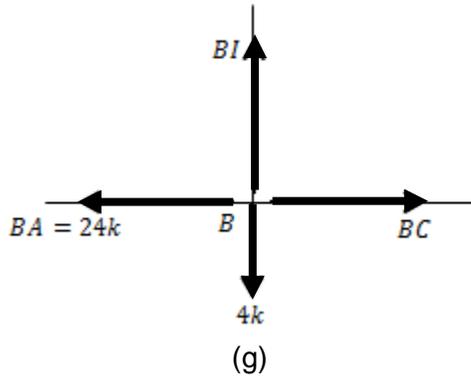
$$24 - AI\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow AI = -\frac{24}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \therefore AI = 33.9411k \text{ (Compresión)}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow AB - AI_x = 0 \Rightarrow AB - AI(\sin \theta) = 0$$

$$AB = (33.9411) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \therefore AB = 24k \text{ (Tensión)}$$

De forma análoga, se efectúa el análisis de cada uno de los nodos restantes.

Nodo B, figura 3-1g.



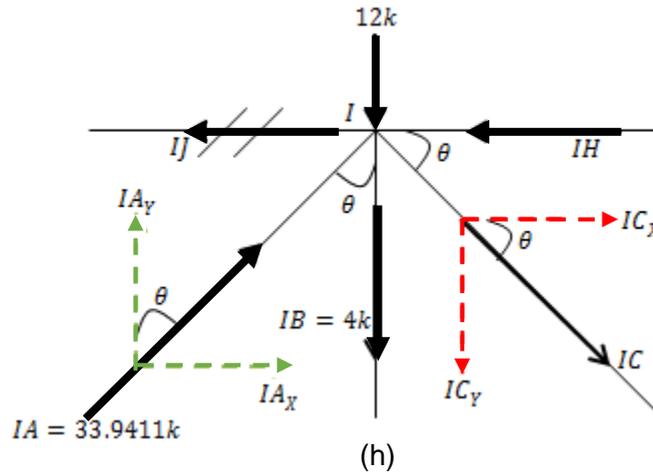
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -BA + BC = 0 \Rightarrow BC = BA$$

$$\therefore BC = 24k \text{ (Tensión)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow BI - 4 = 0$$

$$\therefore BI = 4k \text{ (Tensión)}$$

Nodo I, figura 3-1h.



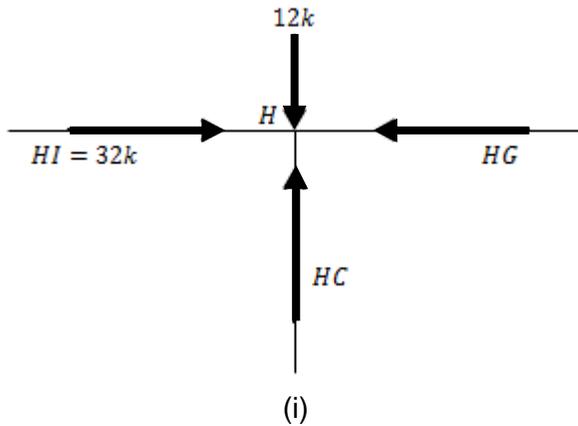
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -12 - IB + AI_y - IC_y = 0 \Rightarrow IC(\sin \theta) = -12 - 4 + IA(\cos \theta)$$

$$IC \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -16 + (33.9411) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow IC = \frac{8}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \therefore IC = 11.3137k \text{ (Tensión)}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow IA_x + IC_x - IH - IJ = 0 \Rightarrow IA(\sin \theta) + IC(\cos \theta) - IH - 0 = 0$$

$$IH = (33.9411) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + (11.3137) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \therefore IH = 32k \text{ (Compresión)}$$

Nodo H, figura 3-1i.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$HI - HG = 0 \Rightarrow HI = HG$$

$$\therefore HG = 32k \text{ (Compresión)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$HC - 12 = 0 \Rightarrow \therefore HC = 12k \text{ (Compresión)}$$

Por lo tanto,

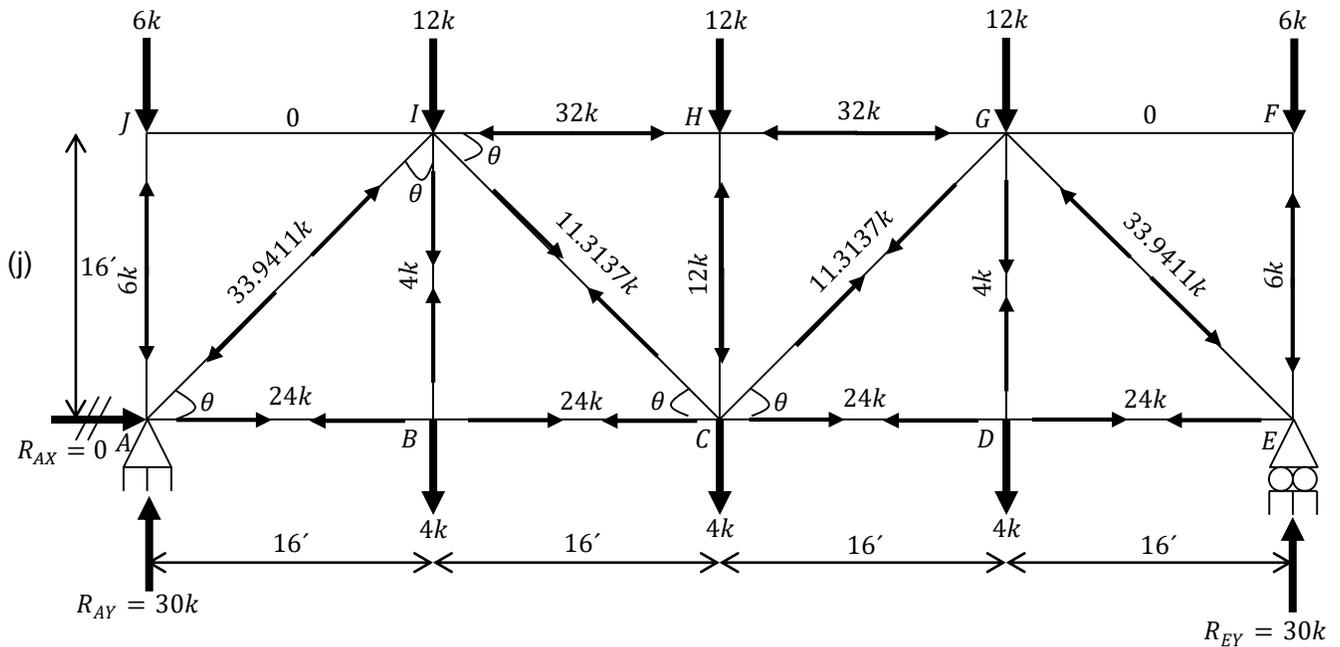
$$FG = JI = 0$$

$$EF = JA = 6k \text{ (Compresión)} \quad EG = AI = 33.9411k \text{ (Compresión)}$$

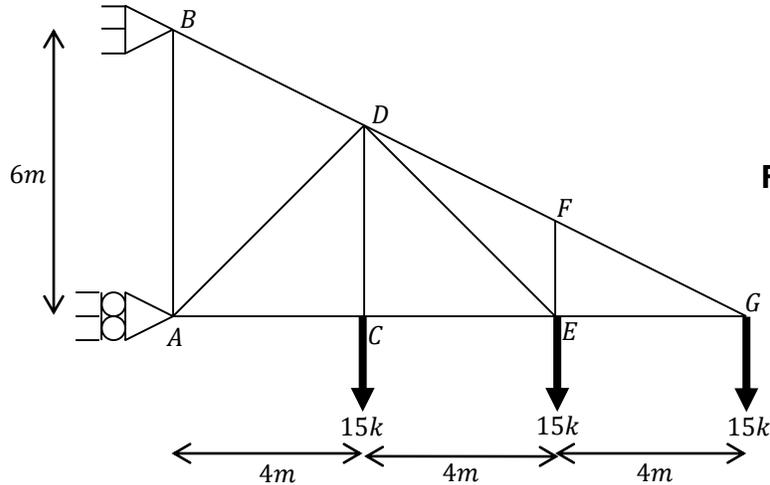
$$ED = AB = 24k \text{ (Tensión)} \quad CD = BC = 24k \text{ (Tensión)}$$

$$DG = BI = 4k \text{ (Tensión)} \quad CG = IC = 11.3137k \text{ (Tensión)}$$

Los resultados obtenidos se visualizan en la figura 3-1j.



**Ejercicio 3.2** Calcule las reacciones en los apoyos y determine la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la figura 3-2a. Indique si los elementos están en tensión o compresión.



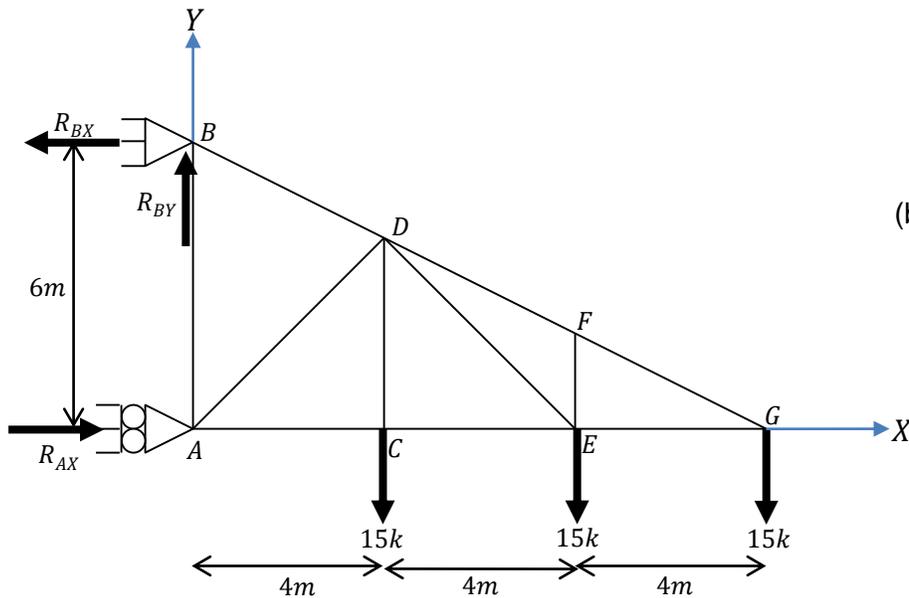
(a)  
**Figura 3-2**

**SOLUCIÓN**

**Verificación del grado de indeterminación**

Observe que  $b = 11, r = 3, j = 7$  y  $c = 0$ . Debido a que  $r - c = 3$  se cumple, la armadura se describe como determinada externamente desde el punto de vista estático. Además,  $b + r = 11 + 3 = 14$  y  $2j = 2(7) = 14$  conducen a  $b + r = 2j$ , así que la armadura es estáticamente determinada de forma interna.

**Cálculo de las reacciones en los apoyos**



(b)

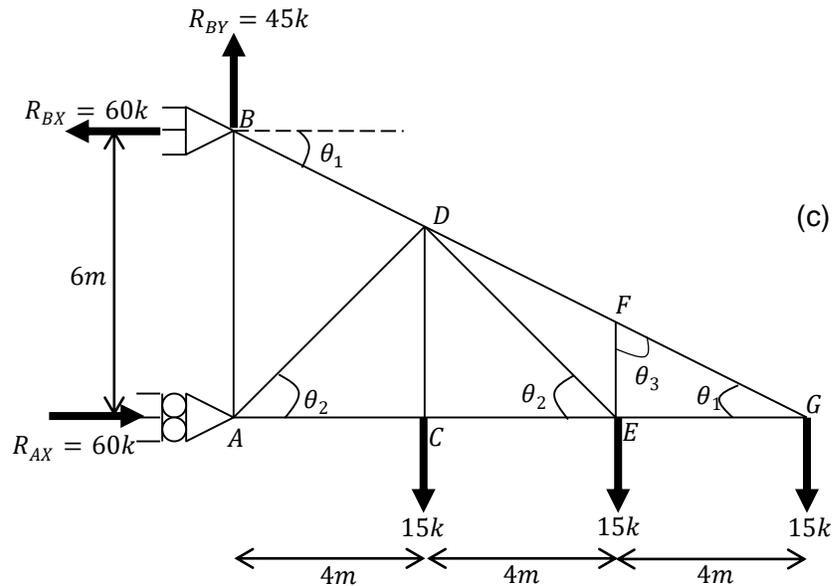
Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cargas, figura 3-2b, resulta

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -15 - 15 - 15 + R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = 45k \uparrow$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow 15(4) + 15(8) + 15(12) - R_{BX}(6) = 0 \Rightarrow R_{BX} = -\frac{360}{-6} \Rightarrow \therefore R_{BX} = 60k \leftarrow$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow R_{AX} - 60 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 60k \rightarrow$$

Los resultados obtenidos se visualizan esquemáticamente en la figura 3-2c.



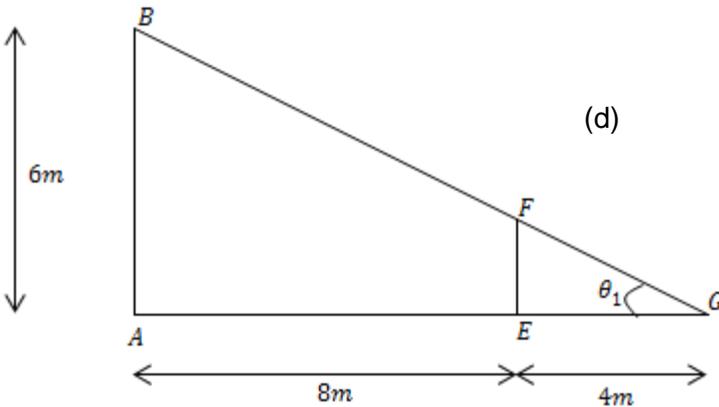
### Método de los nodos

Para calcular las fuerzas en los elementos, no hubo otra opción más que iniciar con el nodo  $G$  por ser el único en poseer dos incógnitas, las fuerzas  $GE$  y  $GF$ . A continuación se analizó el nodo  $F$ , debido a que al haber calculado anteriormente la fuerza en el elemento  $F - E$ , sólo quedaban dos incógnitas en este nodo. Después se pasó al nodo  $E$ , se siguió con los nodos  $C$  y  $A$ , y se concluyó con la junta  $B$ , ya que conforme se obtenían resultados, se iban utilizando en los diagramas de cuerpo libre de las juntas subsecuentes.

Un cambio en la orientación de los ejes  $X$  y  $Y$  en el nodo  $F$ , lo cual puede ser observado en el correspondiente diagrama, evitó una solución simultánea de ecuaciones.

Las fuerzas internas de la armadura son

Nodo G, figura 3-2e. Con base en la figura 3-2d, se tiene



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{\overline{FE}}{4}$$

$$\overline{FE} = \frac{6(4)}{12} = 2m$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} = \frac{2}{4}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{2}{4} = 26.5651^\circ$$

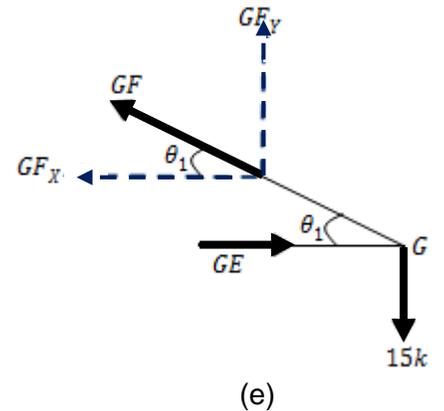
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow GF_Y - 15 = 0 \Rightarrow GF(\sin \theta_1) - 15 = 0$$

$$GF(\sin 26.5651^\circ) = 15 \Rightarrow GF = \frac{15}{\sin 26.5651^\circ}$$

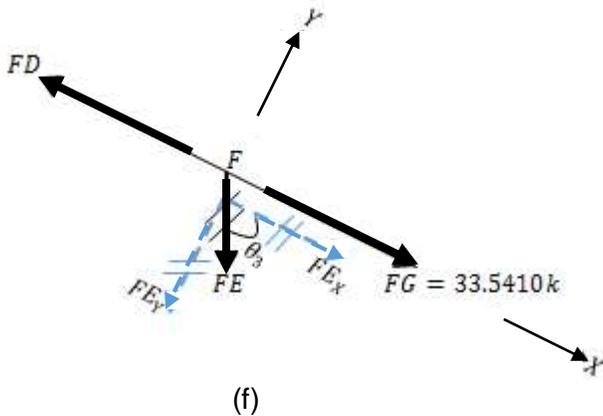
$$\therefore GF = 33.5410k \text{ (Tensión)}$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow GE - GF_X = 0 \Rightarrow GE - GF(\cos \theta_1) = 0$$

$$GE = (33.5410)(\cos 26.5651^\circ) \Rightarrow \therefore GE = 30k \text{ (Compresión)}$$



Nodo F, figura 3-2f.



$$\nearrow + \sum F_Y = 0 \Rightarrow -FE_Y = 0$$

$$FE(\sin \theta_3) = 0 \Rightarrow FE = \frac{0}{\cos \theta_3} \Rightarrow \therefore FE = 0$$

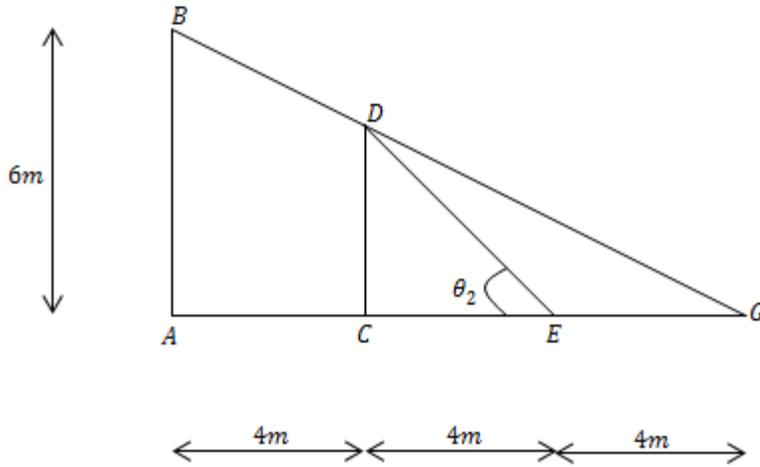
$$\searrow + \sum F_X = 0$$

$$-FD + FG + FE_X = 0 \Rightarrow FD = FG + FE(\cos \theta_3)$$

$$FD = 33.5410 + 0(\cos \theta_3)$$

$$\therefore FD = 33.5410k \text{ (Tensión)}$$

Nodo E, figura 3-2h. A partir de la figura 3-2g, se obtiene



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CG}} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{\overline{DC}}{8}$$

$$\overline{DC} = \frac{6(8)}{12} = 4m$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\overline{FE}}{\overline{EG}} = \frac{4}{4}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{4}{4} = 45^\circ$$

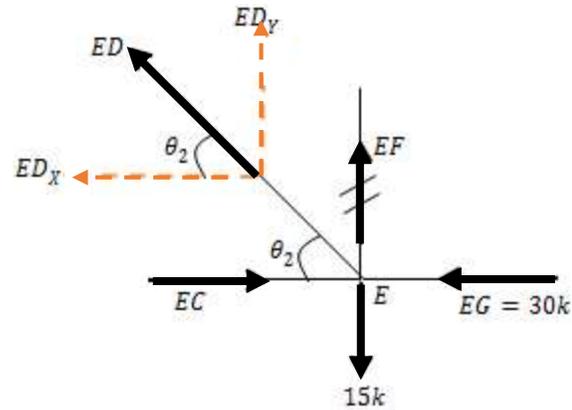
(g)

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -15 + EF + ED_Y = 0 \Rightarrow ED(\cos \theta_2) = 15 + 0$$

$$ED(\cos 45^\circ) = 15 \Rightarrow ED = \frac{15}{\cos 45^\circ} \Rightarrow \therefore ED = 21.2132k \text{ (Tensión)}$$

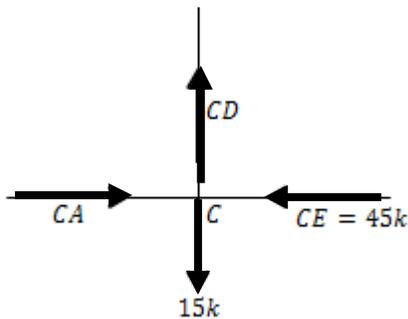
$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow -ED_X + EC - EG = 0 \Rightarrow EC = ED(\sin \theta_2) + EG$$

$$EC = (21.2132)(\sin 45^\circ) + 30 \Rightarrow \therefore EC = 45k \text{ (Compresión)}$$



(h)

Nodo C, figura 3-2i.



(i)

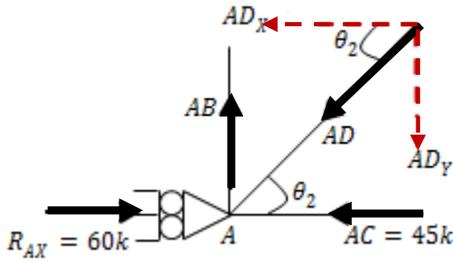
$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$CD - 15 = 0 \Rightarrow \therefore CD = 15k \text{ (Tensión)}$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$CA - CE = 0 \Rightarrow CA = CE \Rightarrow \therefore CA = 45k \text{ (Compresión)}$$

Nodo A, figura 3-2j.



(j)

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - AC - AD_x = 0 \Rightarrow AD(\cos \theta_2) = 60 - 45$$

$$AD = \frac{15}{\cos 45^\circ} \Rightarrow \therefore AD = 21.2132k \text{ (Compresión)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow AB - AD_y = 0 \Rightarrow AB = AD(\sin \theta_2)$$

$$AB = 21.2132(\sin 45^\circ) \Rightarrow \therefore AB = 15k \text{ (Tensión)}$$

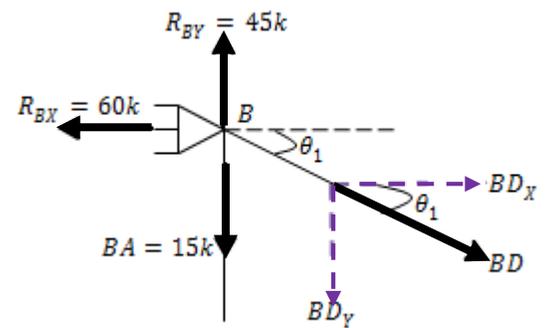
Nodo B, figura 3-2k.

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{BX} + BD_x = 0 \Rightarrow BD(\cos \theta_1) = 60$$

$$BD = \frac{60}{\cos 26.5651^\circ} \Rightarrow \therefore BD = 67.0821k \text{ (Compresión)}$$

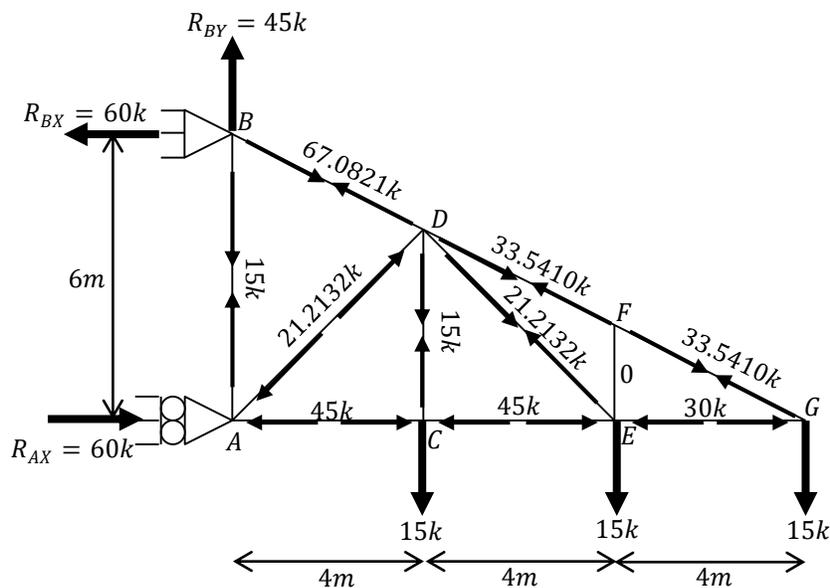
$$+\uparrow \sum FY = R_{BY} - BA - BD_y = 45 - 15 - BD(\sin \theta_1)$$

$$= 45 - 15 - 67.0821(\sin 26.5651^\circ) = 0 \quad \text{ok}$$



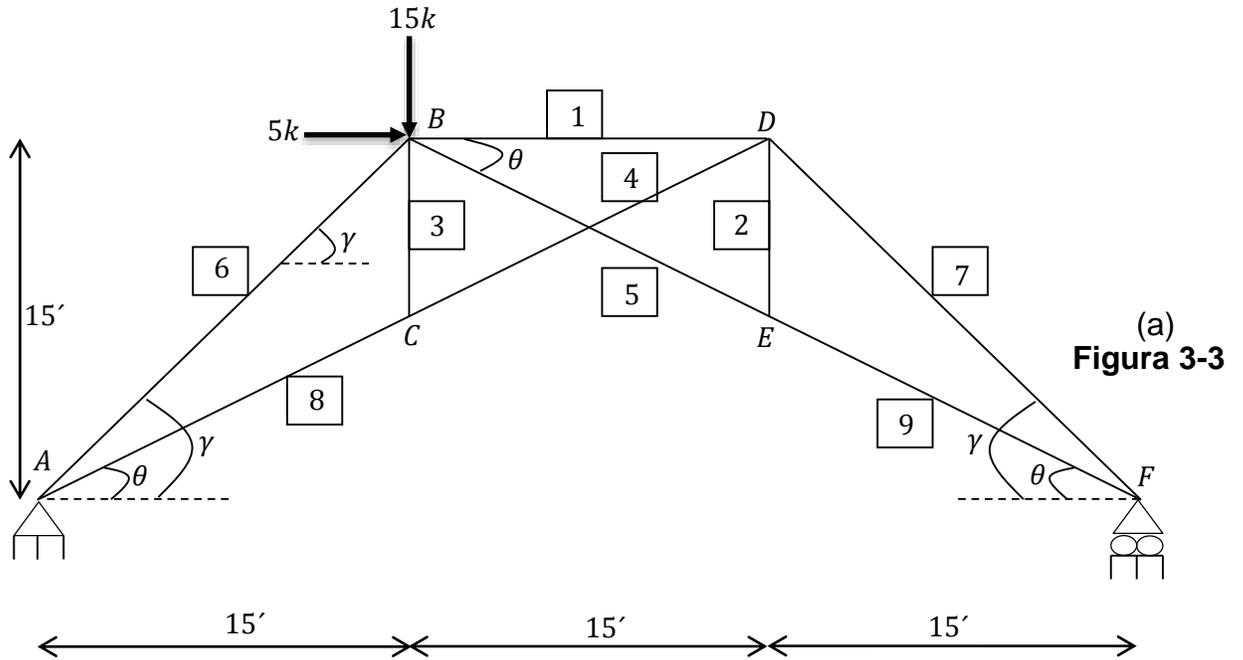
(k)

En la figura 3-2l se muestran los resultados obtenidos.



(l)

**Ejercicio 3.3** Calcule las reacciones de los apoyos de la armadura de la figura 3-3a al actuar la carga indicada. Además, determine la fuerza en cada elemento. Suponga que  $E$  es constante. En la tabla 3-1 se indican la longitud y el área de cada elemento.



**Tabla 3-1**

| No de barra | longitud (pies) | Área (pies <sup>2</sup> ) |
|-------------|-----------------|---------------------------|
| 1           | 15              | 0.05556                   |
| 2           | 7.5             | 0.02778                   |
| 3           | 7.5             | 0.02778                   |
| 4           | 16.7705         | 0.08333                   |
| 5           | 16.7705         | 0.08333                   |
| 6           | 21.2132         | 0.06944                   |
| 7           | 21.2132         | 0.06944                   |
| 8           | 16.7705         | 0.08333                   |
| 9           | 16.7705         | 0.08333                   |

**SOLUCIÓN**

**Verificación del grado de indeterminación**

Las ecuaciones de equilibrio son  $n = 3(\sum FX; \sum FY; \sum M)$  y en este caso no hay ecuaciones de condición, es decir,  $c = 0$ . En el apoyo articulado  $A$  hay dos incógnitas de reacción, una horizontal y una vertical, y en el rodillo  $B$  sólo hay una vertical, por lo

que  $r = 3(R_{AX}; R_{AY}; R_{FY})$ . Ello indica que la armadura es estáticamente determinada externamente.

Por otra parte, el número de nodos es  $j = 6(A; B; C; D; E; F)$  y la cantidad de barras es  $b = 9$ , así que  $r + b = 12$  y  $2j = 12$ . Como  $r + b = 2j$  ya que  $12 = 12$ , la armadura es estáticamente determinada internamente.

### Cálculo de las reacciones en los apoyos

Al aplicar las ecuaciones de la estática se tiene

$$\curvearrowright + \sum MA = 0 \Rightarrow R_{FY}(45) - 15(15) - 5(15) = 0 \Rightarrow \therefore R_{FY} = 6.6667k \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 15k + 6.6667k = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 8.3333k \uparrow$$

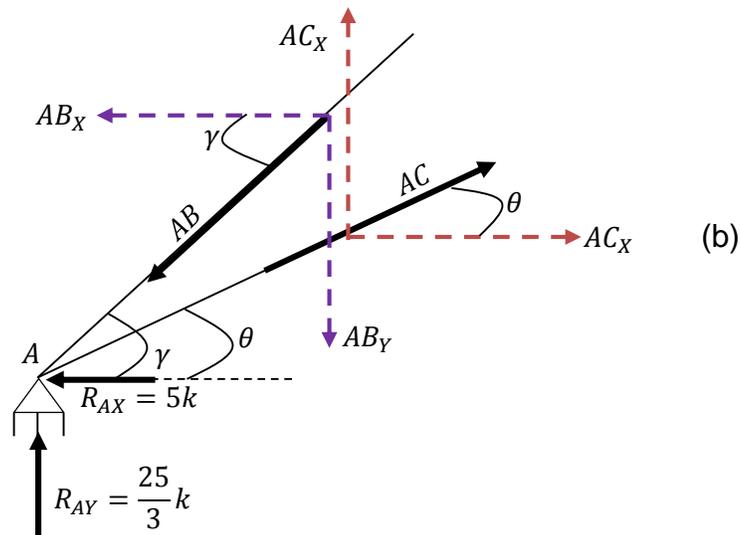
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 5 - R_{AX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 5k \leftarrow$$

Por trigonometría se deducen los siguientes ángulos

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{15}{15}\right) = 45^\circ \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{7.5}{15}\right) = 26.5650^\circ$$

### Método de los nodos

Nodo A, figura 3-3b. El análisis puede comenzarse en este nodo, debido a que, como se observa en el diagrama de cargas, sólo se tienen dos incógnitas que corresponden a las fuerzas en las barras AB y AC.



$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow AC_x - AB_x - 5 = 0 \Rightarrow AC(\cos\theta) - AB(\cos\gamma) = 5 \text{ --- (1)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow AC_y - AB_y + \frac{25}{3} = 0 \Rightarrow AC(\sin\theta) - AB(\sin\gamma) = -\frac{25}{3} \text{ --- (2)}$$

Resolvemos el sistema simultáneo de ecuaciones (1) y (2). Despejando  $AC$  de la ecuación (1) se obtiene

$$AC = \frac{5 + AB(\cos\gamma)}{\cos\theta} \text{ --- (3)}$$

Al sustituir la ecuación (3) en la ecuación (2) resulta

$$\left(\frac{5 + AB(\cos\gamma)}{\cos\theta}\right)(\sin\theta) - AB(\sin\gamma) = -\frac{25}{3} \Rightarrow 5(\tan\theta) + AB(\cos\gamma)(\tan\theta) - AB(\sin\gamma) = -\frac{25}{3}$$

$$AB = \frac{-\left(\frac{25}{3} + 5(\tan\theta)\right)}{(\cos\gamma)(\tan\theta) - (\sin\gamma)} = \frac{-\left(\frac{25}{3} + 5(\tan 26.5650^\circ)\right)}{(\cos 45^\circ)(\tan 26.5650^\circ) - (\sin 45^\circ)}$$

$$\therefore AB = 30.64129385k \text{ (Compresión)}$$

Reemplazando el valor obtenido de  $AB$  en la ecuación (3) da

$$AC = \frac{5 + AB(\cos\gamma)}{\cos\theta} = \frac{5 + (30.64129385)(\cos 45^\circ)}{\cos 26.5650^\circ} \Rightarrow \therefore AC = 29.8142397k \text{ (Tensión)}$$

Nodo  $F$ , figura 3-3c.

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -FE_x + FD_x = 0$$

$$FE(\cos\theta) = FD(\cos\gamma) \text{ --- (1')}$$

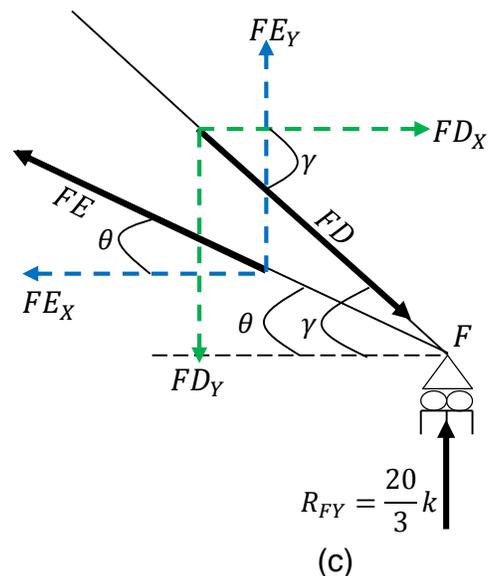
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow FE_y - FD_y + \frac{20}{3} = 0$$

$$FE(\sin\theta) - FD(\sin\gamma) = -\frac{20}{3} \text{ --- (2')}$$

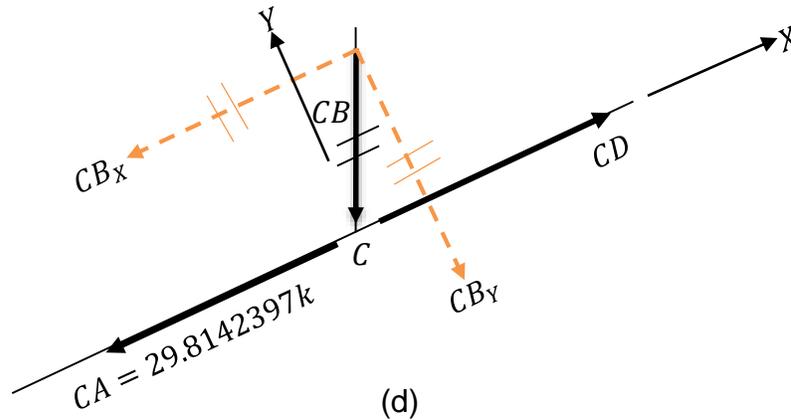
Se resuelve el sistema de ecuaciones (1') y (2').

$$\therefore FE = 14.90711985k \text{ (Tensión)}$$

$$\therefore FD = 18.85618033k \text{ (Compresión)}$$



Nodo C, figura 3-3d.



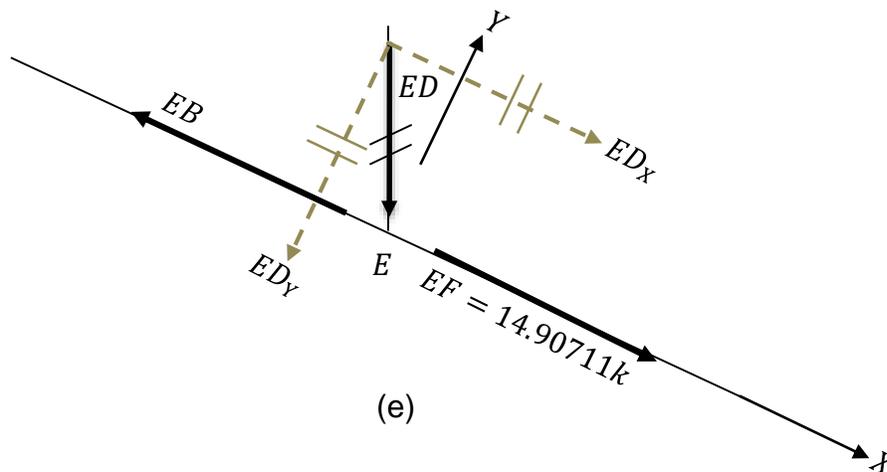
Se hace un cambio en la orientación de los ejes  $X$  y  $Y$  para evitar la solución simultánea de ecuaciones. Como la componente  $CB_Y$  es la única fuerza en la dirección  $Y$ , evidentemente tenemos

$$\uparrow + \sum F_Y = 0 \Rightarrow \therefore CB = 0$$

Por otra parte,

$$\rightarrow + \sum F_X = 0 \Rightarrow -CA + CD - CB_x = 0 \Rightarrow \therefore CD = 29.8142397k \text{ (Tensión)}$$

Nodo E, figura 3-3e.

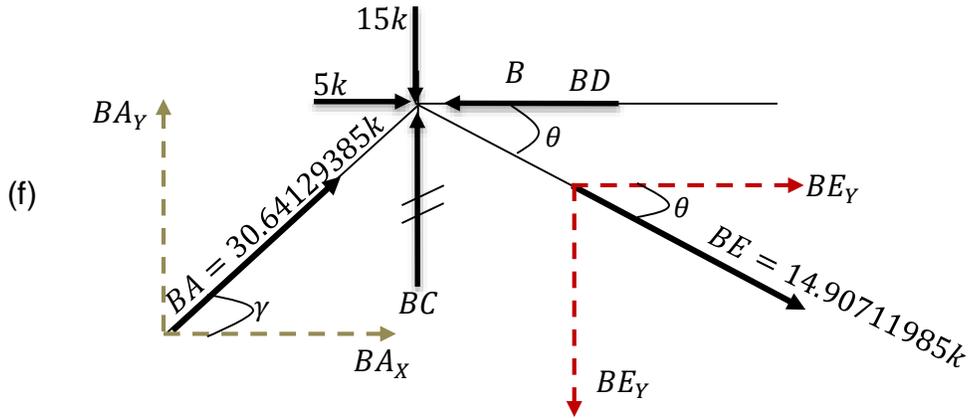


De forma análoga al nodo C se tiene

$$\uparrow + \sum F_Y = 0 \Rightarrow -ED_Y = 0 \Rightarrow \therefore ED = 0$$

$$\rightarrow + \sum F_X = 0 \Rightarrow -EB + EF + ED_X = 0 \Rightarrow \therefore EB = 14.90711985k \quad (\text{Tensión})$$

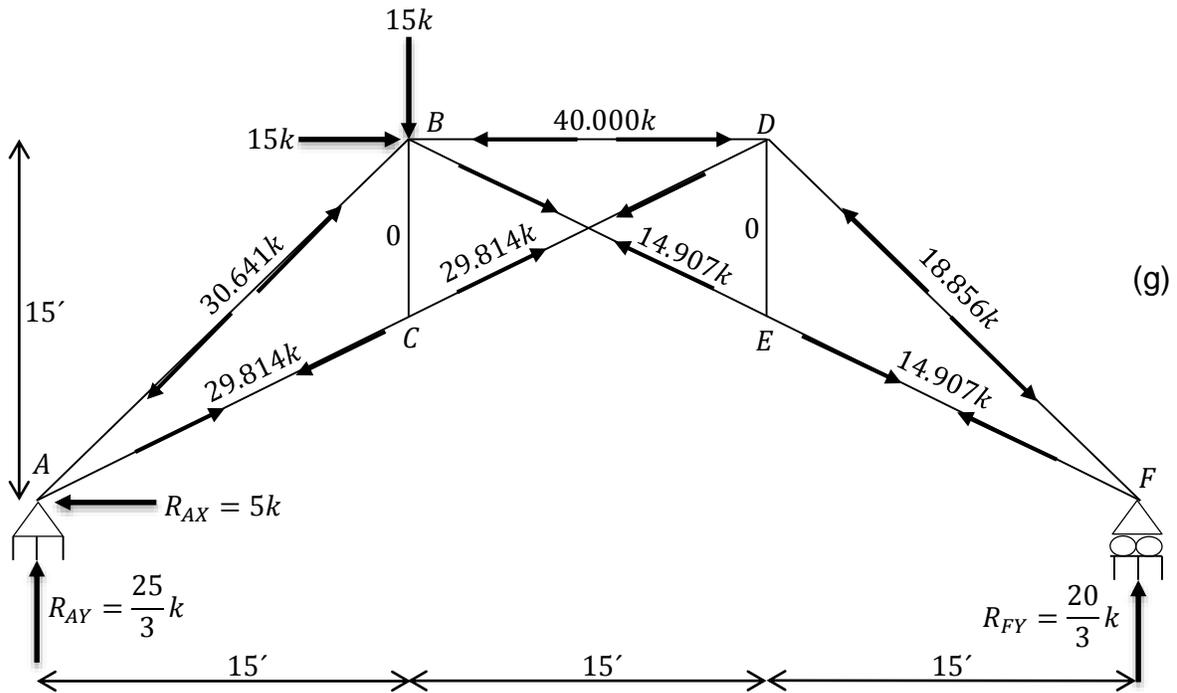
Nodo B, figura 3-3f.



$$\rightarrow + \sum F_X = 0 \Rightarrow BA_X + 5 + BE_X - BD = 0$$

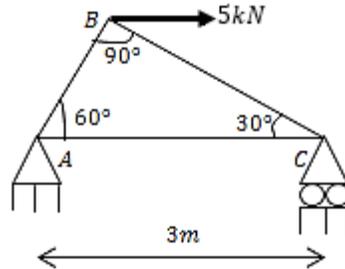
$$BA(\cos\gamma) + 5 + BE(\cos\theta) - BD = 0 \Rightarrow \therefore BD = 40k \quad (\text{Compresión})$$

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3-3g.



**3.2 MÉTODO DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL**

**Ejercicio 3.4** Determine el desplazamiento horizontal en la junta *B* de la armadura que se muestra en la figura 3-4a. Considere que *AE* es constante.

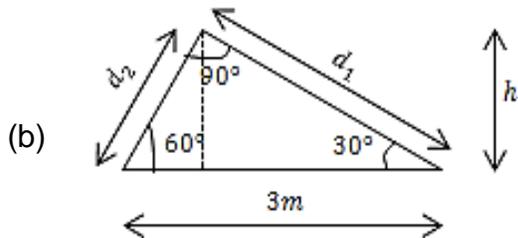


(a)  
**Figura 3-4**

**SOLUCIÓN**

**Fuerzas reales *N***

Se determinan las reacciones en los soportes y después las fuerzas en las barras causadas por las cargas reales que actúan en la armadura preferentemente con el método de los nodos. Las distancias  $d_1$  y  $d_2$  que corresponden a las longitudes de las barras *C – B* y *A – B*, respectivamente, y la altura *h* se deducen a partir de la figura 3-4b.

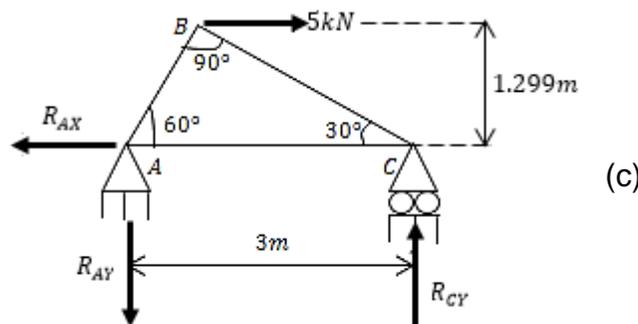


$$\cos 30^\circ = \frac{d_1}{3m} \Rightarrow d_1 = (3m)(\cos 30^\circ) = 2.598m$$

$$h = d_1(\sin 30^\circ) = 1.299m$$

$$d_2 = \sqrt{(3m)^2 - (2.598m)^2} = 1.50013m$$

El diagrama de cargas, en el que los sentidos de las reacciones (incógnitas) se suponen arbitrariamente se proporciona en la figura 3-4c.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio se obtiene

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow 5(1.299) - R_{CY}(3) = 0 \Rightarrow R_{CY} = \frac{6.495}{3} \Rightarrow \therefore R_{CY} = 2.165kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + 2.165 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 2.165kN \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{AX} + 5 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = 5kN \leftarrow$$

El cálculo de las fuerzas reales en los elementos se presenta en seguida.

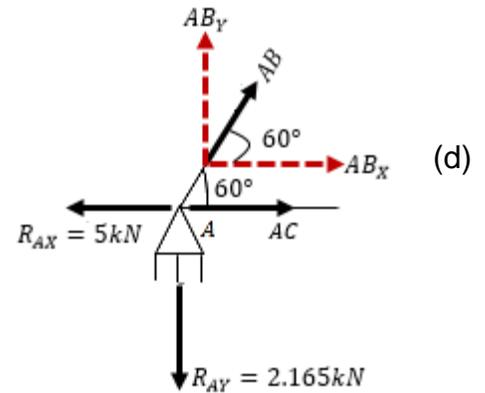
Junta A, figura 3-4d.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} + AB_Y = 0$$

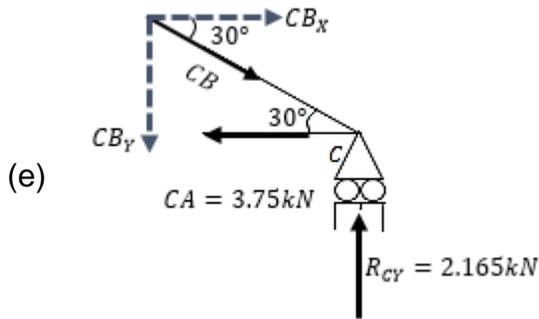
$$AB = \frac{2.165}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \therefore AB = 2.5kN \text{ (Tensión)}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -5 + AB_X + AC = 0$$

$$AC = 5 - (2.5)(\cos 60^\circ) \Rightarrow \therefore AC = 3.75kN \text{ (Tensión)}$$



Junta C, figura 3-4e.



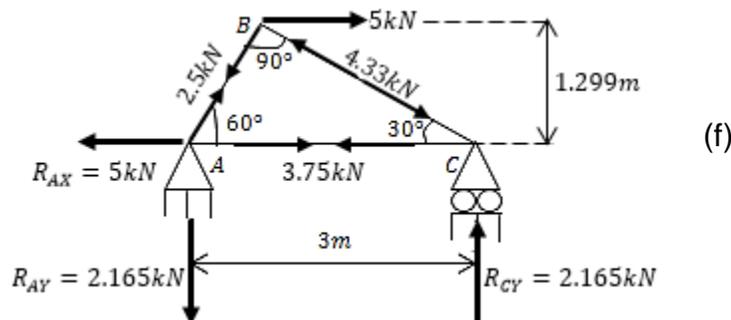
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 2.165 - CB_Y = 0$$

$$CB = \frac{2.165}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \therefore CB = 4.33kN \text{ (Compresión)}$$

$$+\rightarrow \sum FX = -3.75 + CB_X$$

$$= -3.75 + (4.33)(\cos 30^\circ) = 0 \quad \text{ok}$$

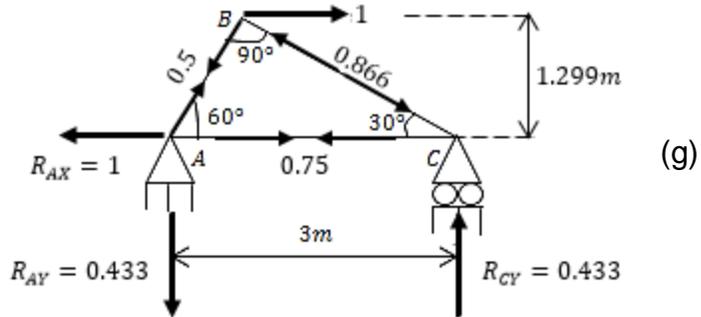
Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3-4f.



**Fuerzas virtuales  $n$**

Se coloca una carga virtual unitaria en la armadura sobre el nodo donde debe calcularse el desplazamiento. Dicha carga debe tener la misma dirección que el desplazamiento requerido y su sentido se supone arbitrariamente. Por tal motivo, a la armadura, en la que se desea conocer el desplazamiento horizontal en la junta  $B$ , se le aplica una fuerza virtual de 1 en  $B$  con dirección horizontal y un sentido hacia la derecha, y las cargas reales son eliminadas, figura 3-4g.

Se calculan las reacciones en los soportes  $A$  y  $C$  y después se determina la fuerza interna en cada elemento por el método de los nodos. En este problema, obsérvese que las reacciones y las fuerzas virtuales  $n$  pueden calcularse fácilmente si dividimos los resultados obtenidos en la estructura real entre cinco ya que la única diferencia radica en que para la estructura virtual la fuerza horizontal aplicada en  $B$  es de 1 y no de 5KN.



**Ecuación del trabajo virtual**

Dado que  $AE$  es constante, puede aplicarse hasta el final de la sumatoria y por ahora atender la parte de  $NnL$ .

Las fuerzas de tensión deben considerarse positivas y las de compresión negativas en ambas estructuras; al disponer los datos en forma tabular, tabla 3-2, se tiene

| Barra | $L(m)$  | $N(kN)$ | $n$      | $NnL$   |
|-------|---------|---------|----------|---------|
| A-B   | 1.50013 | 2.5     | 0.5      | 1.87516 |
| A-C   | 3       | 3.75    | 0.75     | 8.4375  |
| C-B   | 2.598   | -4.33   | -0.866   | 9.74193 |
|       |         |         | $\sum =$ | 20.0546 |

Entonces,

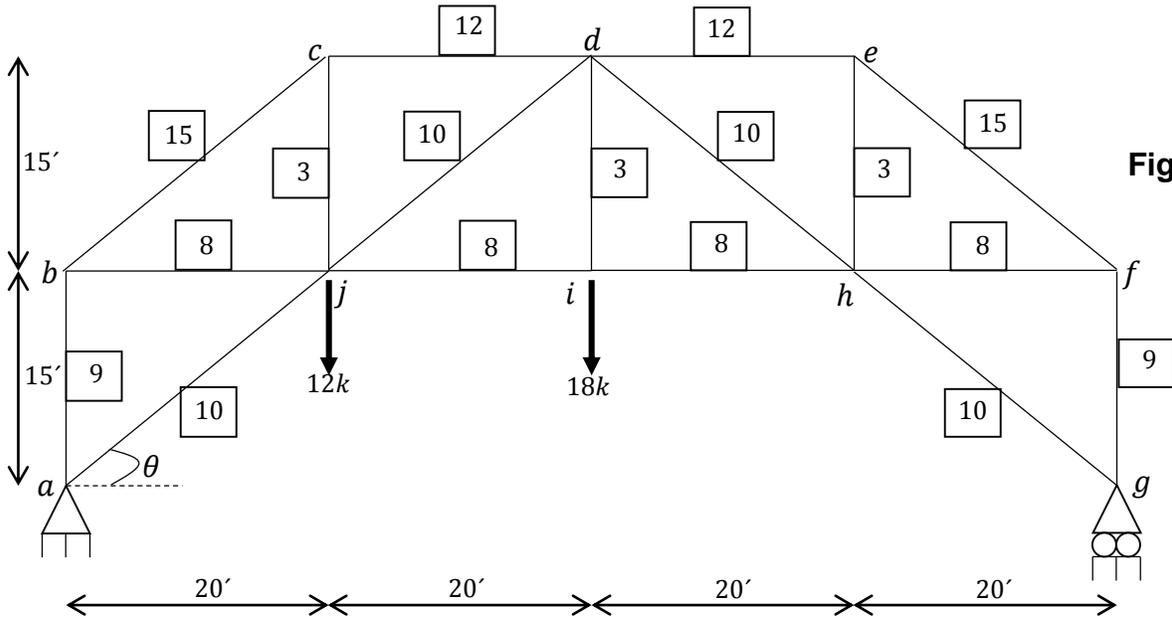
**Tabla 3-2**

$$1 \cdot \Delta_{HB} = \sum \frac{NnL}{AE} = \frac{20.0546}{AE}$$

Como la sumatoria resultante es positiva, el desplazamiento calculado tiene el mismo sentido que la carga virtual unitaria.

$$\therefore \Delta_{HB} = \frac{20.0546}{AE} \rightarrow \text{en } m, \text{ si } A(m^2) \text{ y } E \left( \frac{kN}{m^2} \right)$$

**Ejercicio 3.5** Calcule el desplazamiento que experimenta el nudo  $i$  de la armadura que se muestra en la figura 3-5a al actuar sobre ella el sistema de cargas indicado. El área de la sección transversal de cada elemento es constante y su valor se indica en el cuadrado adyacente; se expresa en pulgadas cuadradas. El módulo de elasticidad del material de los miembros de la estructura es  $30000k/pulg^2$ .



(a)  
Figura 3-5

**SOLUCIÓN**

**Fuerzas reales  $N$**

Las reacciones en los soportes son resultado de

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{aX} = 0$$

$$\curvearrowright \sum Ma = 0 \Rightarrow 12(20) + 18(40) - R_{gY}(80) = 0 \Rightarrow R_{gY} = \frac{960}{80} = 12 \Rightarrow \therefore R_{gY} = 12k \uparrow$$

$$\uparrow + \sum FY = 0 \Rightarrow 12 - 18 + 12 - R_{aY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{aY} = 18k \uparrow$$

La longitud de cada barra inclinada es

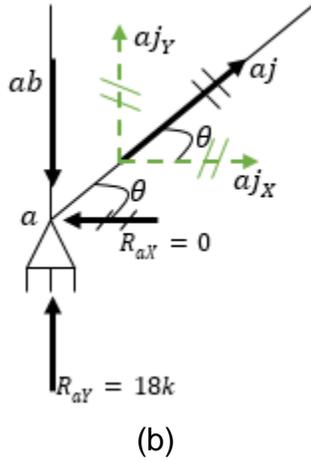
$$L_{a-j} = L_{a-j} = L_{b-c} = L_{j-d} = L_{h-d} = L_{f-e} = L_{g-h} \sqrt{(20')^2 + (15')^2} = 25'$$

Por otra parte,

$$\sin \theta = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \quad \cos \theta = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

El cálculo de las fuerzas en las barras causadas por las cargas reales que actúan sobre la armadura se presenta enseguida.

Nodo *a*, figura 3-5b.



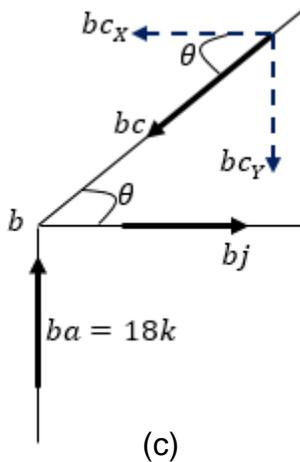
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{aX} + aj_X = 0 \Rightarrow -R_{aX} + aj\cos\theta = 0$$

$$aj = \frac{R_{aX}}{\cos\theta} = \frac{0}{4/5} \Rightarrow \therefore aj = 0$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -ab + R_{aY} + aj_Y = 0 \Rightarrow -ab + R_{aY} + aj\sin\theta = 0$$

$$-ab + 18 + 0\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow \therefore ab = 18k(\text{Compresión})$$

Nodo *b*, figura 3-5c.



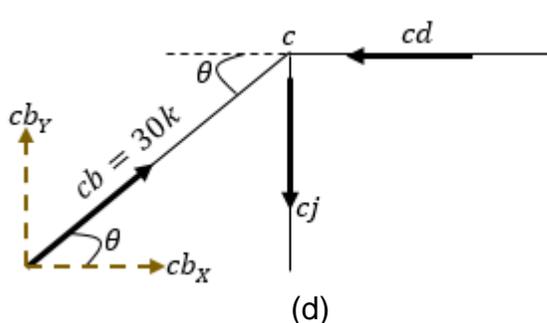
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow ba - bc_Y = 0 \Rightarrow ba - bc\sin\theta = 0$$

$$bc = \frac{ba}{\sin\theta} = \frac{18}{3/5} \Rightarrow \therefore bc = 30k(\text{Compresión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow bj - bc_X = 0 \Rightarrow bj - bc\cos\theta = 0$$

$$bj = bc\cos\theta = 30\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \therefore bj = 24k(\text{Tensión})$$

Nodo *c*, figura 3-5d.



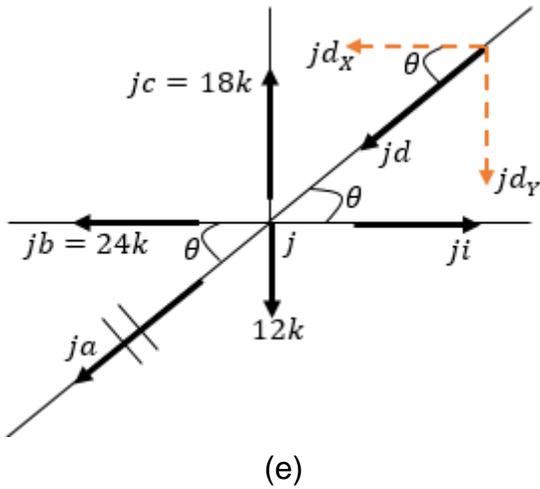
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow cb_X - cd = 0 \Rightarrow cb\cos\theta - cd = 0$$

$$cd = cb\cos\theta = 30\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \therefore cd = 24k(\text{Compresión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow cb_Y - cj = 0 \Rightarrow cb\sin\theta - cj = 0$$

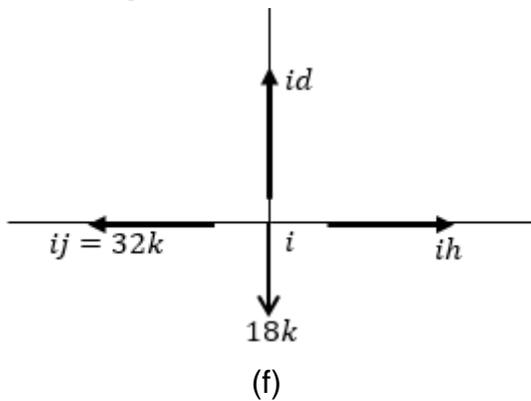
$$cj = cb\sin\theta = 30\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \therefore cj = 18k(\text{Tensión})$$

Nodo  $j$ , figura 3-5e.



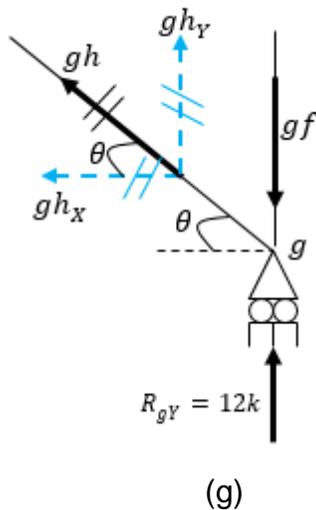
$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y = 0 &\Rightarrow jc - 12 - jd_y \\
 jc - 12 - jdsin\theta &= 0 \\
 jd = \frac{jc - 12}{sin\theta} &= \frac{18 - 12}{3/5} \Rightarrow \therefore jd = 10k(\text{Compresión}) \\
 +\rightarrow \sum F_X = 0 &\Rightarrow -jb + ji - jd_x = 0 \\
 -jb + ji - jdcos\theta &= 0 \\
 ji = jb + jdcos\theta &= 24 + 10\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \therefore ji = 32k(\text{Tensión})
 \end{aligned}$$

Nodo  $i$ , figura 3-5f.



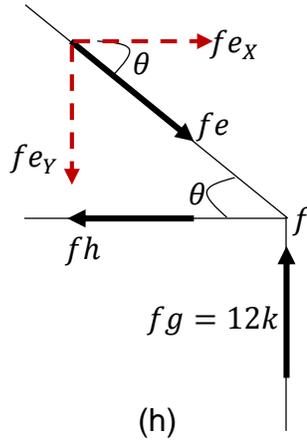
$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y = 0 &\Rightarrow id - 18 = 0 \\
 \therefore id &= 18k(\text{Tensión}) \\
 +\rightarrow \sum F_X = 0 &\Rightarrow -ij + ih = 0 \\
 ih = ij &\Rightarrow \therefore ih = 32k(\text{Tensión})
 \end{aligned}$$

Nodo  $g$ , figura 3-5g.



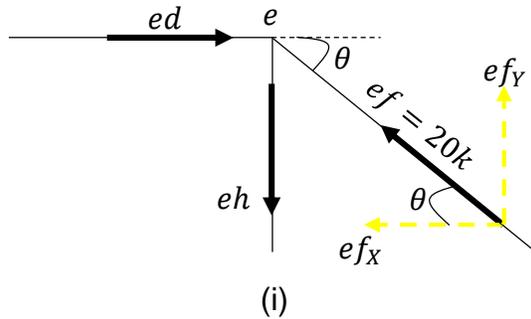
$$\begin{aligned}
 +\rightarrow \sum F_X = 0 &\Rightarrow -gh_x = 0 \Rightarrow -ghcos\theta = 0 \\
 gh = 0/cos\theta &= \frac{0}{4/5} \Rightarrow \therefore gh = 0 \\
 +\uparrow \sum F_Y = 0 &\Rightarrow R_{gY} - gf + gh_y = 0 \Rightarrow R_{gY} - gf + ghsin\theta = 0 \\
 gf = R_{gY} + ghsin\theta &= 12 + 0\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \therefore gf = 12k(\text{Compresión})
 \end{aligned}$$

Nodo *f*, figura 3-5h.



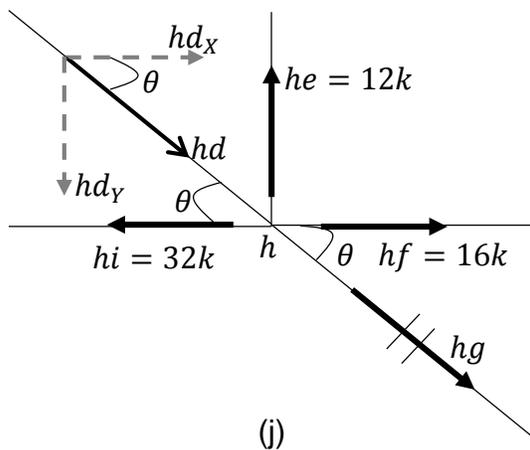
$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum FY = 0 &\Rightarrow -fe_y + fg = 0 \\
 &-fesin\theta + fg = 0 \\
 fe = fg/\sin\theta = \frac{12}{\frac{3}{5}} &\Rightarrow \therefore fe = 20k(\text{Compresión}) \\
 +\rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow -fh + fe_x = 0 \\
 &-fh + fecos\theta = 0 \\
 fh = fecos\theta = 20\left(\frac{4}{5}\right) &\Rightarrow \therefore fh = 16k(\text{Tensión})
 \end{aligned}$$

Nodo *e*, figura 3-5i.



$$\begin{aligned}
 +\rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow ed - ef_x = 0 \\
 &ed = ef_x \\
 ed = efcos\theta = 20\left(\frac{4}{5}\right) &\Rightarrow \therefore ed = 16k(\text{Compresión}) \\
 +\uparrow \sum FY = 0 &\Rightarrow -eh + ef_y = 0 \\
 &eh = ef_y \\
 eh = efsin\theta = 20\left(\frac{3}{5}\right) &\Rightarrow \therefore eh = 12k(\text{Tensión})
 \end{aligned}$$

Nodo *h*, figura 3-5j.



$$\begin{aligned}
 +\rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow -32 + 16 + hd_x = 0 \\
 &-16 + hdcos\theta = 0 \\
 hd = 16/\cos\theta = \frac{16}{\frac{4}{5}} &\Rightarrow \therefore hd = 20k(\text{Compresión}) \\
 +\uparrow \sum FY = he - hd_y & \\
 = he - hdsin\theta = 12 - 20\left(\frac{3}{5}\right) &= 0 \text{ ok}
 \end{aligned}$$



Se calculan las reacciones en los soportes  $a$  y  $g$  y después se determina la fuerza  $nv$  en cada elemento por el método de los nodos.

La aplicación de las ecuaciones de equilibrio conlleva a

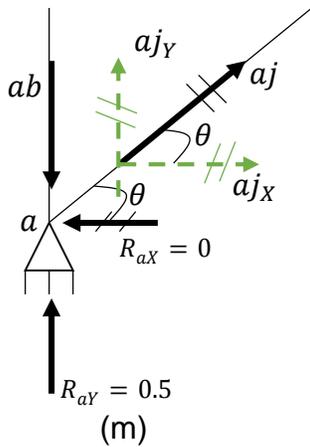
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \therefore R_{ax} = 0$$

$$+\curvearrowright \sum Ma = 0 \Rightarrow 1(40) - R_{gY}(80) = 0 \Rightarrow R_{gY} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore R_{gY} = 0.5 \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{aY} - 1 + 0.5 = 0 \Rightarrow \therefore R_{aY} = 0.5 \uparrow$$

Se proporciona el cálculo de las fuerzas que se producen en las barras al aplicar una carga virtual vertical unitaria en el nudo  $i$ .

Nodo  $a$ , figura 3-5m.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-R_{ax} + a_{jX} = 0 \Rightarrow -R_{ax} + aj\cos\theta = 0$$

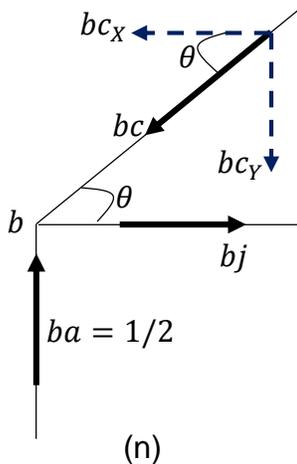
$$aj = \frac{R_{ax}}{\cos\theta} = \frac{0}{4/5} \Rightarrow \therefore aj = 0$$

$$+\rightarrow \sum FY = 0$$

$$-ab + R_{aY} + a_{jY} = 0 \Rightarrow -ab + R_{aY} + aj\sin\theta = 0$$

$$-ab + 0.5 + 0\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow \therefore ab = 0.5(\text{Compresión})$$

Nodo  $b$ , figura 3-5n.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$ba - b_{cY} = 0 \Rightarrow ba - bc\sin\theta = 0$$

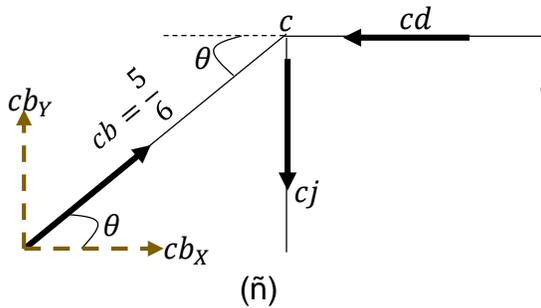
$$bc = \frac{ba}{\sin\theta} = \frac{0.5}{3/5} = 5/6 \Rightarrow \therefore bc = 0.8333(\text{Compresión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$bj - b_{cX} = 0 \Rightarrow bj - bc\cos\theta = 0$$

$$bj = bc\cos\theta = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \therefore bj = 0.6667(\text{Tensión})$$

Nodo *c*, figura 3-5ñ.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$cb_x - cd = 0 \Rightarrow cb \cos \theta - cd = 0$$

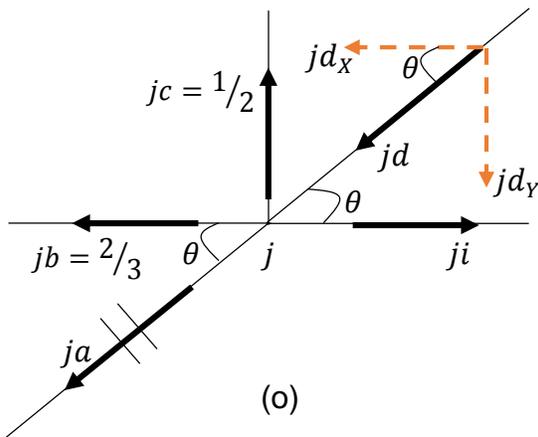
$$cd = cb \cos \theta = \frac{5}{6} \left( \frac{4}{5} \right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \therefore cd = 0.6667 (\text{Compresión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$cb_y - cj = 0 \Rightarrow cb \sin \theta - cj = 0$$

$$cj = cb \sin \theta = \left( \frac{5}{6} \right) \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore cj = 0.5 (\text{Tensión})$$

Nodo *j*, figura 3-5o.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$jc - jd_y = 0 \Rightarrow jc - jd \sin \theta = 0$$

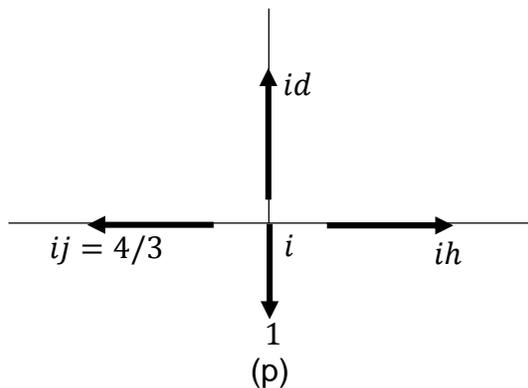
$$jd = \frac{jc}{\sin \theta} = \frac{1/2}{3/5} = 5/6 \Rightarrow \therefore jd = 0.8333 (\text{Compresión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-jb + ji - jd_x = 0 \Rightarrow ji = jb + jd \cos \theta$$

$$ji = 2/3 + \left( \frac{5}{6} \right) \left( \frac{4}{5} \right) = \frac{4}{3} \Rightarrow \therefore ji = 1.3333 (\text{Tensión})$$

Nodo *i*, figura 3-5p.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$id - 1 = 0$$

$$\therefore id = 1 (\text{Tensión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-ij + ih = 0$$

$$ih = ij = 4/3 \Rightarrow \therefore ih = 1.3333 (\text{Tensión})$$

Por la simetría en la armadura en cuanto a cargas y geometría, se tiene

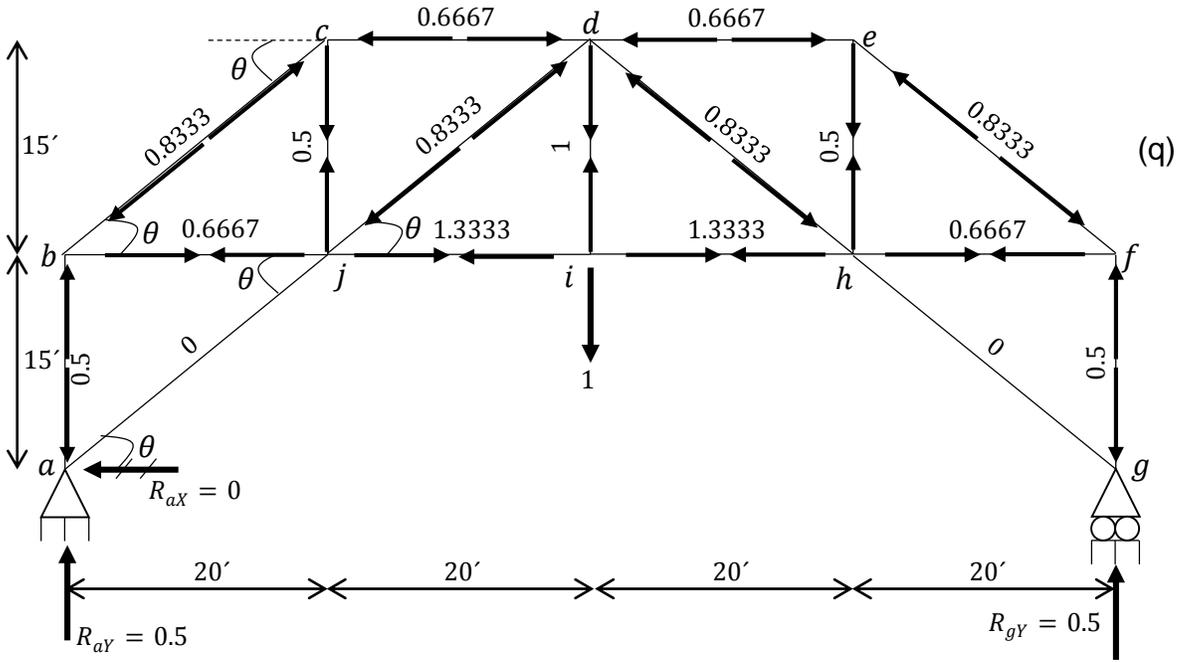
$$ab = gf = 0.5 (\text{Compresión}) \quad bj = fh = 0.6667 (\text{Tensión}) \quad jd = hd = 0.8333 (\text{Compresión})$$

CAPÍTULO 3 ANÁLISIS DE ARMADURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

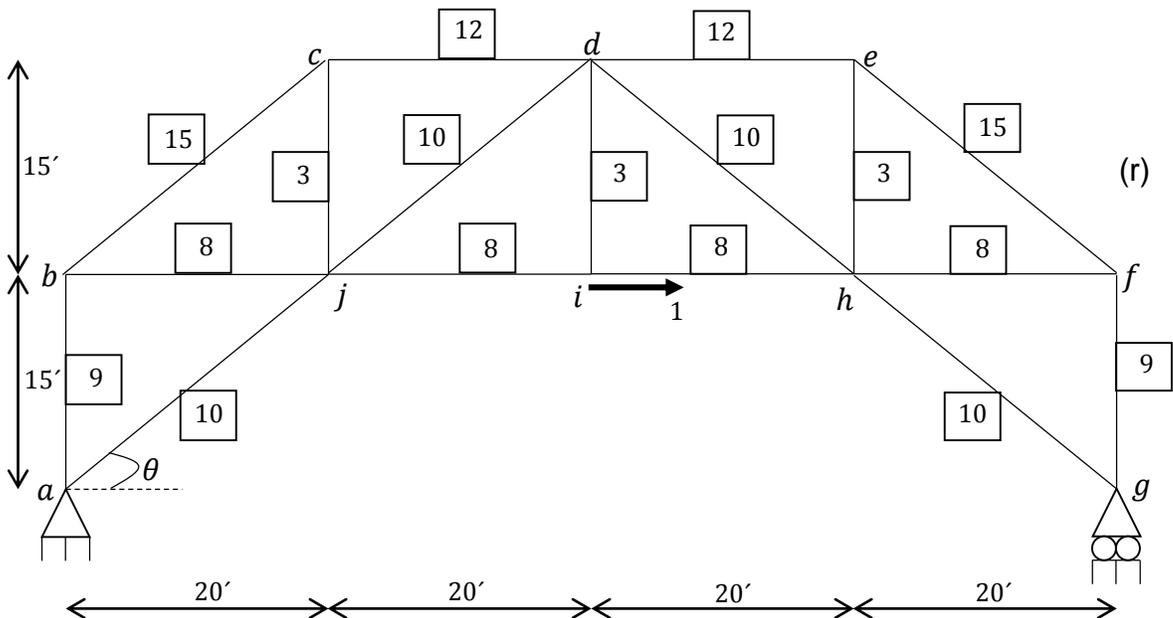
$$aj = gh = 0 \quad bc = fe = 0.8333(\text{Compresión}) \quad cd = ed = 0.6667(\text{Compresión})$$

$$cj = eh = 0.5(\text{Tensión})$$

Los resultados obtenidos se visualizan en la figura 3-5q.



Ahora, se aplica una carga horizontal que vaya hacia la derecha de 1 sobre la armadura en la junta  $i$  y se calculan las fuerzas en los elementos, figura 3-5r.



Las reacciones en los soportes son

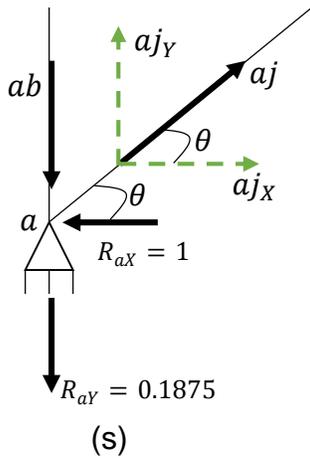
$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{ax} + 1 = 0 \Rightarrow \therefore R_{ax} = 1 \leftarrow$$

$$\curvearrowright \sum Ma = 0 \Rightarrow 1(15) - R_{gY}(80) = 0 \Rightarrow R_{gY} = \frac{15}{80} = \frac{3}{16} \Rightarrow \therefore R_{gY} = 0.1875 \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{aY} + \frac{3}{16} = 0 \Rightarrow R_{aY} = 3/16 \Rightarrow R_{aY} = 0.1875 \downarrow$$

Las fuerzas que se producen en las barras al aplicar una carga virtual vertical unitaria en el nudo  $i$  son

Nodo  $a$ , figura 3-5s.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-R_{ax} + aj_x = 0 \Rightarrow -R_{ax} + aj \cos \theta = 0$$

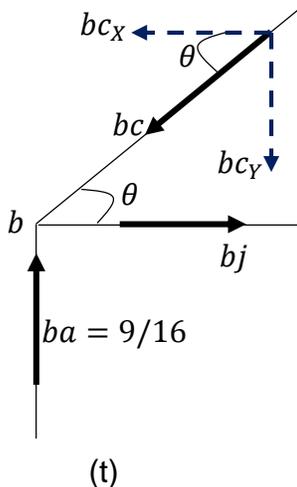
$$aj = \frac{R_{ax}}{\cos \theta} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4} \Rightarrow \therefore aj = 1.25 (\text{Tensión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$-R_{aY} - ab + aj_y = 0 \Rightarrow ab = aj \sin \theta - R_{aY}$$

$$ab = \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{16} = \frac{9}{16} \Rightarrow \therefore ab = 0.5625 (\text{Compresión})$$

Nodo  $b$ , figura 3-5t.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$ba - bc_y = 0 \Rightarrow ba - bc \sin \theta = 0$$

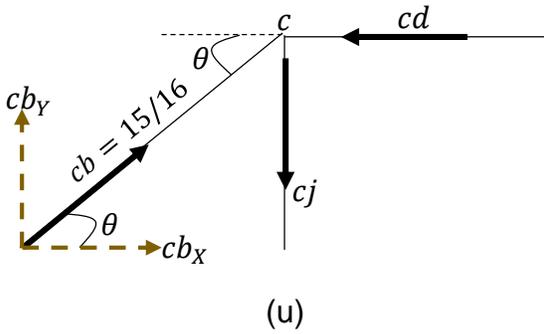
$$bc = \frac{ba}{\sin \theta} = \frac{9/16}{3/5} = 15/16 \Rightarrow \therefore bc = 0.9375 (\text{Compresión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$bj - bc_x = 0 \Rightarrow bj - bc \cos \theta = 0$$

$$bj = bc \cos \theta = \left(\frac{15}{16}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \therefore bj = 0.75 (\text{Tensión})$$

Nodo c, figura 3-5u.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$cb_x - cd = 0 \Rightarrow cbcos\theta - cd = 0$$

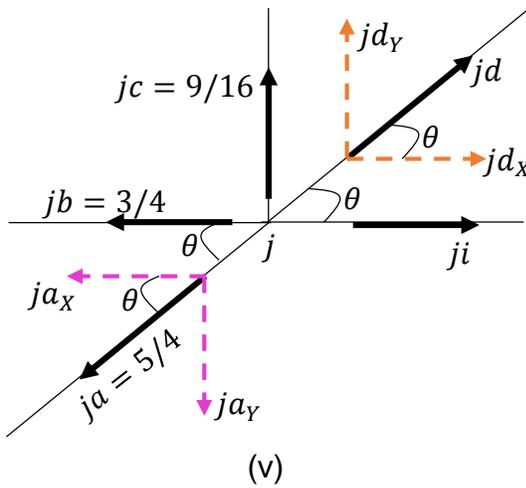
$$cd = cbcos\theta = \frac{15}{16} \left( \frac{4}{5} \right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \therefore cd = 0.75 (\text{Compresión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$cb_y - cj = 0 \Rightarrow cbsin\theta - cj = 0$$

$$cj = cbsin\theta = \frac{15}{16} \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{9}{16} \Rightarrow \therefore cj = 0.5625 (\text{Tensión})$$

Nodo j, figura 3-5v.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$-ja_y + jc + jd_y = 0 \Rightarrow -ja \sin\theta + jc + jdsin\theta = 0$$

$$jd = \frac{ja \sin\theta - jc}{\sin\theta} = \frac{\frac{5}{4} \left( \frac{3}{5} \right) - \frac{9}{16}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{16} \Rightarrow \therefore jd = 0.3125 (\text{Tensión})$$

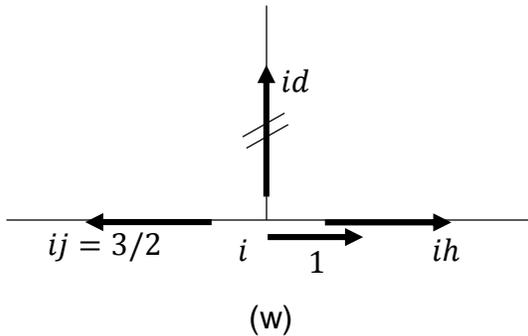
$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-ja_x - jb + ji + jd_x = 0 \Rightarrow -jacos\theta - jb + ji + jdcos\theta = 0$$

$$ji = jacos\theta + jb - jdcos\theta = \left( \frac{5}{4} \right) \left( \frac{4}{5} \right) + \frac{3}{4} - \left( \frac{5}{16} \right) \left( \frac{4}{5} \right)$$

$$ji = \frac{3}{2} \Rightarrow \therefore ji = 1.5 (\text{Tensión})$$

Nodo i, figura 3-5w.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

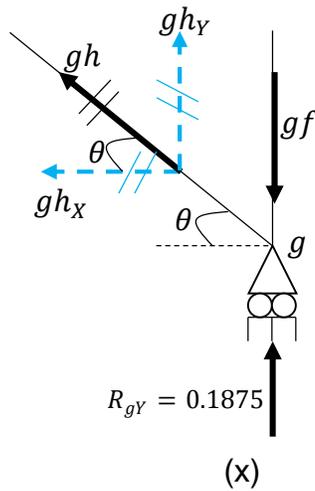
$$\therefore id = 0$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-ij + 1 + ih = 0$$

$$ih = ij - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore ih = 0.5 (\text{Tensión})$$

Nodo *g*, figura 3-5x.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-gh_x = 0 \Rightarrow -gh \cos \theta = 0$$

$$gh = 0 / \cos \theta = \frac{0}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \therefore gh = 0$$

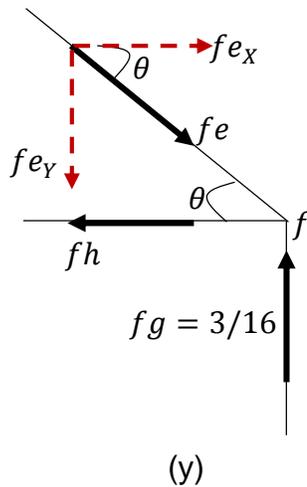
$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$R_{gy} - gf + gh_y = 0 \Rightarrow R_{gy} - gf + gh \sin \theta = 0$$

$$gf = R_{gy} + gh \sin \theta = \frac{3}{16} + 0 \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{3}{16}$$

$$\therefore gf = 0.1875 (\text{Compresión})$$

Nodo *f*, figura 3-5y.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$-fe_y + fg = 0 \Rightarrow -fe \sin \theta + fg = 0$$

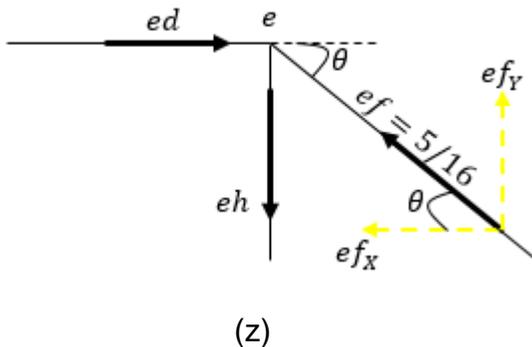
$$fg = \frac{fe}{\sin \theta} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{16} \Rightarrow \therefore fg = 0.3125 (\text{Compresión})$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-fh + fe_x = 0 \Rightarrow -fh + fe \cos \theta = 0$$

$$fh = fe \cos \theta = \left( \frac{5}{16} \right) \left( \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \therefore fh = 0.25 (\text{Tensión})$$

Nodo *e*, figura 3-5z.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$ed - ef_x = 0 \Rightarrow ed = ef_x$$

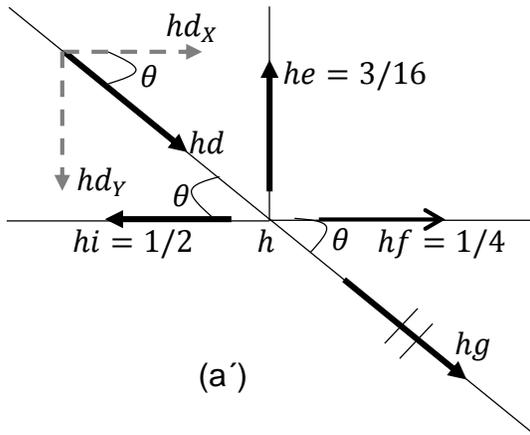
$$ed = ef \cos \theta = \left( \frac{5}{16} \right) \left( \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \therefore ed = 0.25 (\text{Compresión})$$

$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$-eh + ef_y = 0 \Rightarrow eh = ef_y$$

$$eh = ef \sin \theta = \left( \frac{5}{16} \right) \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{3}{16} \Rightarrow \therefore eh = 0.1875 (\text{Tensión})$$

Nodo *h*, figura 3-5a´.



$$+\uparrow \sum FY = 0$$

$$he - hd_y = 0 \Rightarrow he - hdsin\theta = 0$$

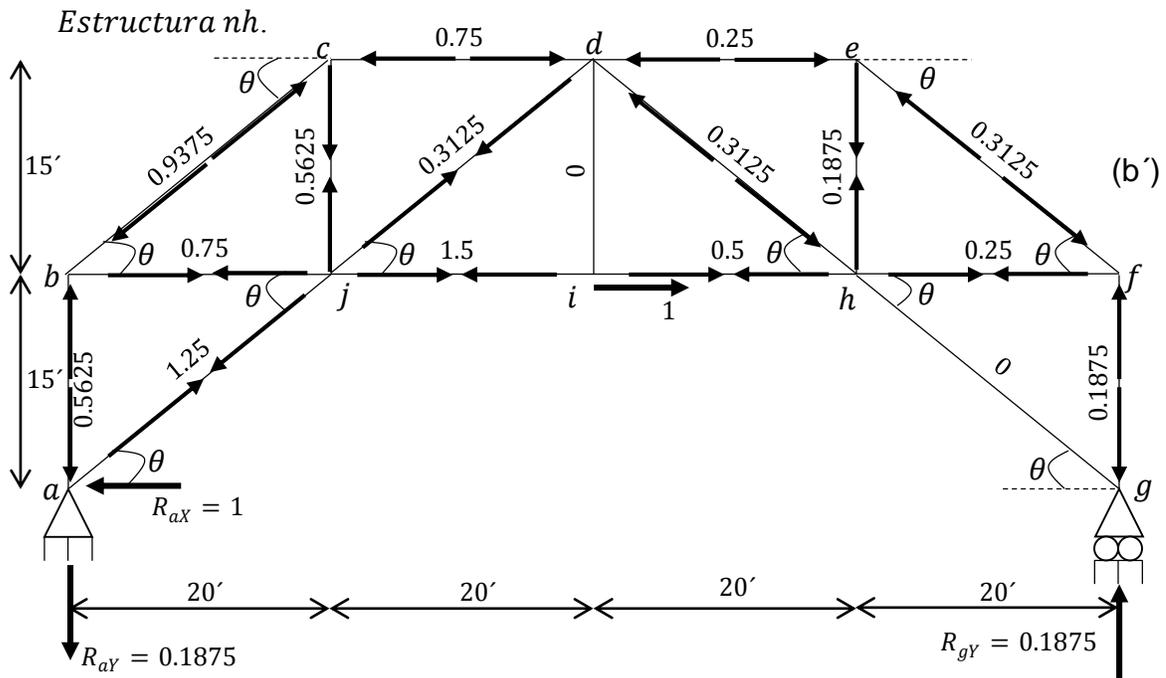
$$hd = \frac{he}{\sin\theta} = \frac{3/16}{3/5} = \frac{5}{16} \Rightarrow \therefore hd = 0.3125 \text{ (Compresión)}$$

$$+\rightarrow \sum FX = -hi + hf + hd_x$$

$$= -hi + hf + hdcos\theta$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{16}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \text{ ok}$$

Los resultados obtenidos se visualizan a en la figura 3-5b´.



### Ecuación del trabajo virtual

En la tabla 3-3 se consignan todos los datos requeridos para el cálculo de las componentes horizontal y vertical del desplazamiento del nudo *i*. Observe que debe manejarse una congruencia de unidades. Aquí las fuerzas de tensión son indicadas con números positivos y fuerzas de compresión con números negativos.

| Barra | N (k) | L (pulg) | A(pulg^2) | E(k/pulg^2) | vertical   |                   | horizontal |                   |
|-------|-------|----------|-----------|-------------|------------|-------------------|------------|-------------------|
|       |       |          |           |             | nv         | $\frac{NnvL}{AE}$ | nh         | $\frac{NnhL}{AE}$ |
| a-b   | -18   | 180      | 9         | 30000       | -0.5000    | 0.0060            | -0.5625    | 0.0068            |
| b-c   | -30   | 300      | 15        | 30000       | -0.8333    | 0.0167            | -0.9375    | 0.0188            |
| c-d   | -24   | 240      | 12        | 30000       | -0.6667    | 0.0107            | -0.7500    | 0.0120            |
| d-e   | -16   | 240      | 12        | 30000       | -0.6667    | 0.0071            | -0.2500    | 0.0027            |
| e-f   | -20   | 300      | 15        | 30000       | -0.8333    | 0.0111            | -0.3125    | 0.0042            |
| f-g   | -12   | 180      | 9         | 30000       | -0.5000    | 0.0040            | -0.1875    | 0.0015            |
| a-j   | 0     | 300      | 10        | 30000       | 0.0000     | 0.0000            | 1.2500     | 0.0000            |
| g-h   | 0     | 300      | 10        | 30000       | 0.0000     | 0.0000            | 0.0000     | 0.0000            |
| b-j   | 24    | 240      | 8         | 30000       | 0.6667     | 0.0160            | 0.7500     | 0.0180            |
| j-i   | 32    | 240      | 8         | 30000       | 1.3333     | 0.0427            | 1.5000     | 0.0480            |
| i-h   | 32    | 240      | 8         | 30000       | 1.3333     | 0.0427            | 0.5000     | 0.0160            |
| h-f   | 16    | 240      | 8         | 30000       | 0.6667     | 0.0107            | 0.2500     | 0.0040            |
| j-c   | 18    | 180      | 3         | 30000       | 0.5000     | 0.0180            | 0.5625     | 0.0203            |
| j-d   | -10   | 300      | 10        | 30000       | -0.8333    | 0.0083            | 0.3125     | -0.0031           |
| i-d   | 18    | 180      | 3         | 30000       | 1.0000     | 0.0360            | 0.0000     | 0.0000            |
| h-d   | -20   | 300      | 10        | 30000       | -0.8333    | 0.0167            | -0.3125    | 0.0063            |
| h-e   | 12    | 180      | 3         | 30000       | 0.5000     | 0.0120            | 0.1875     | 0.0045            |
|       |       |          |           |             | $\Sigma =$ | 0.2586            |            | 0.1597            |

**Tabla 3-3**

La componente vertical del desplazamiento del nudo i es

$$1 \cdot \delta_{Vi} = \sum \frac{NnvL}{AE} = 0.2586 \text{ pulg}$$

Como el resultado obtenido es positivo, tal desplazamiento tiene la misma dirección que la propuesta para la carga virtual vertical unitaria, es decir,  $\delta_{Vi} = 0.2586 \text{ pulg} \downarrow$ .

La componente horizontal del desplazamiento del nudo i es

$$1 \cdot \Delta_{Hi} = \sum \frac{NnhL}{AE} = 0.1597 \text{ pulg}$$

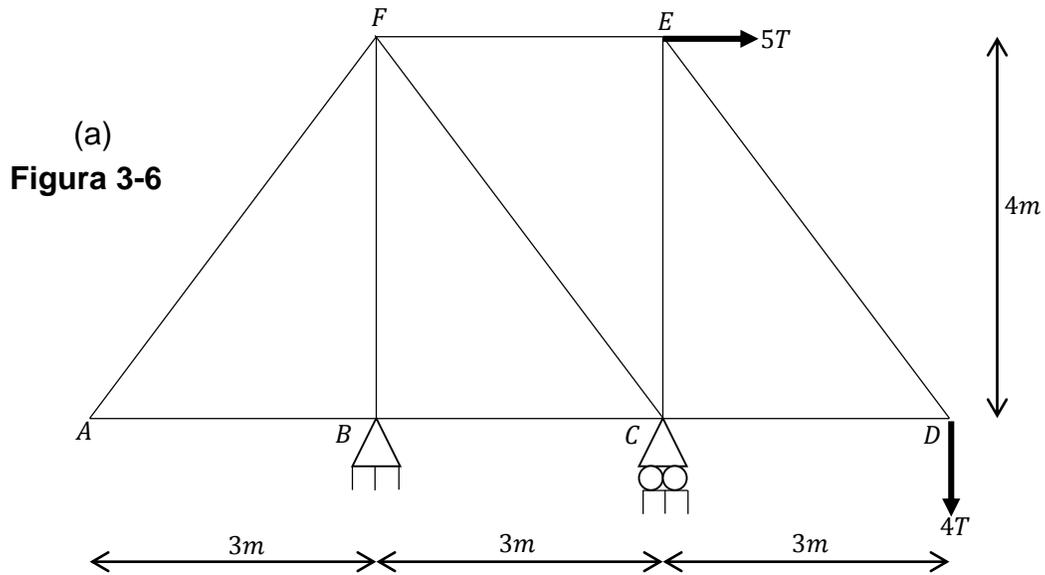
La magnitud positiva indica que el desplazamiento es de la misma dirección que la supuesta para la carga virtual horizontal unitaria. Por lo tanto,  $\Delta_{Hi} = 0.1597 \text{ pulg} \rightarrow$ .

Finalmente, la deflexión del nudo i es

$$\Delta_i = \sqrt{(\delta_{Vi})^2 + (\Delta_{Hi})^2} = \sqrt{(0.2586 \text{ pulg})^2 + (0.1597 \text{ pulg})^2} = 0.304 \text{ pulg} \searrow$$

### 3.3 TEOREMA DE CASTIGLIANO

**Ejercicio 3.6** Determine el desplazamiento horizontal del nodo  $E$  de la armadura que se muestra en la figura 3-6a. Considere para todas las barras una sección transversal cuadrada de  $10\text{cm}$  por lado y un Módulo de Elasticidad de  $E = 2.1 \cdot 10^7 \frac{T}{m^2}$  que corresponde al del acero.



### SOLUCIÓN

#### Fuerza externa $P$

Se aplica una carga  $P$ , cuya magnitud es variable, sobre la armadura en el punto y en la dirección donde se requiere calcular el desplazamiento; en este caso, una carga horizontal  $P$  es colocada en el nodo  $E$ , con un sentido que se ha propuesto de manera arbitraria hacia la derecha (puede ser hacia la izquierda), debido a que en  $E$  debe determinarse el desplazamiento horizontal, y aunque momentáneamente reemplaza a la fuerza de  $5T$  por encontrarse ubicada en el mismo punto, después será igual a un valor fijo de  $5T$ .

#### Fuerzas internas $N$

Una vez calculadas las reacciones en los soportes se hallan las fuerzas  $N$  en las barras utilizando el método de los nodos.

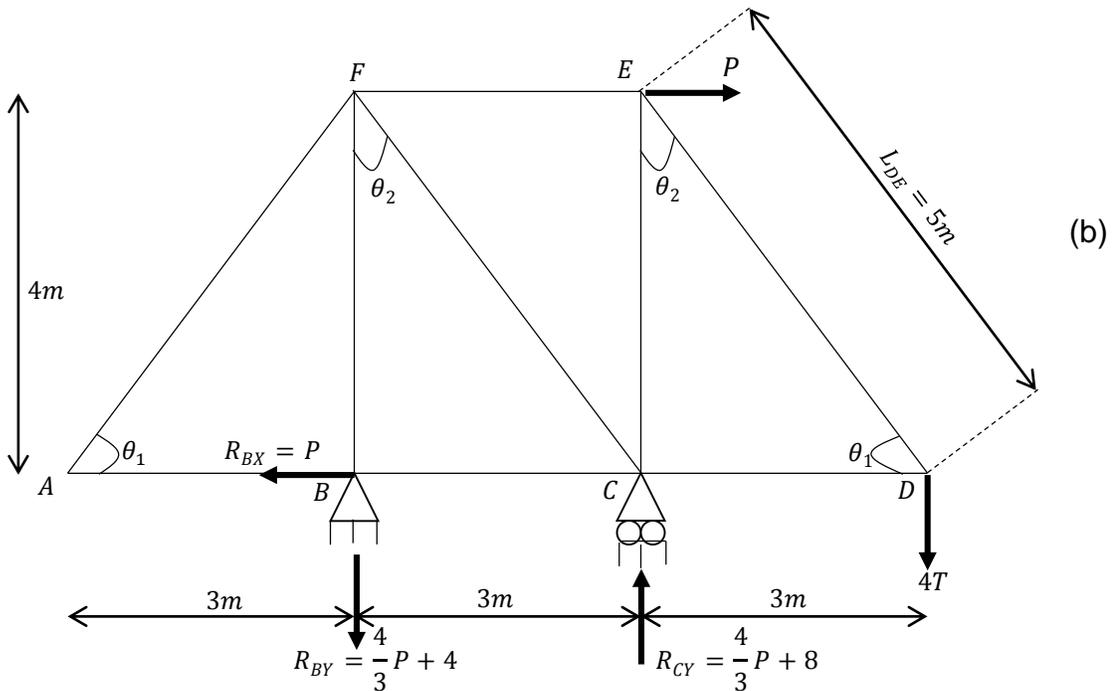
Al aplicar las ecuaciones de equilibrio resulta

$$+\rightarrow \sum FX = 0 - R_{BX} + P = 0 \Rightarrow \therefore R_{BX} = P \leftarrow$$

$$\curvearrowright \sum MB = 0 \Rightarrow P(4) + 4(6) - R_{CY}(3) = 0 \Rightarrow R_{CY} = \frac{4P + 24}{3} \Rightarrow \therefore R_{CY} = \left(\frac{4}{3}P + 8\right) \uparrow$$

$$\uparrow + \sum FY = 0 \Rightarrow -4 + \frac{4}{3}P + 8 - R_{BY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{BY} = \left(\frac{4}{3}P + 4\right) \downarrow$$

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3-6b.



La longitud de cada elemento inclinado es

$$L_{D-E} = L_{C-F} = L_{A-F} = \sqrt{(3m)^2 + (4m)^2} = 5m$$

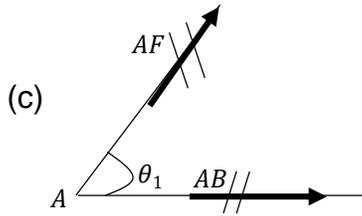
Se deducen los siguientes cosenos directores, ya que más adelante serán requeridos.

$$\sin\theta_1 = \frac{4}{5} \quad \cos\theta_1 = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{3}{5} \quad \cos\theta_2 = \frac{4}{5}$$

A continuación, se efectúa el análisis de cada nodo de la armadura

Nodo A, figura 3-6c.

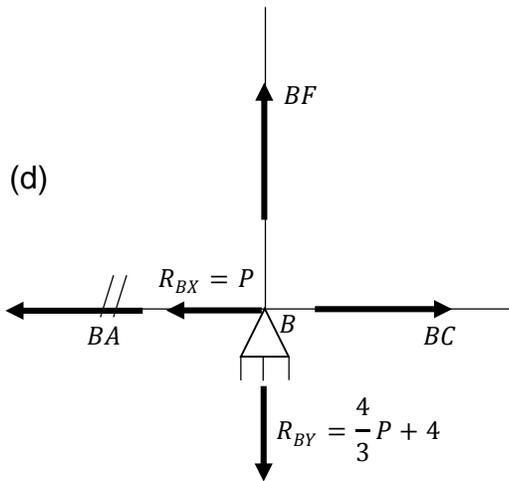


Por inspección,

$$AF = 0$$

$$AB = 0$$

Nodo B, figura 3-6d.



$$\uparrow + \sum F_Y = 0$$

$$BF - R_{BY} = 0$$

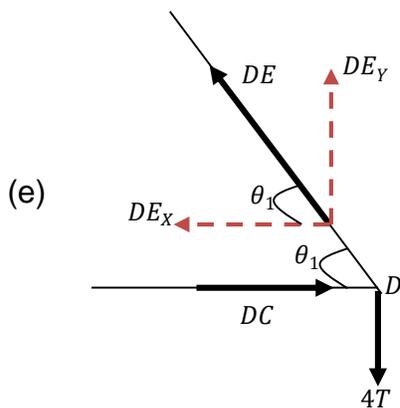
$$BF - \left(\frac{4}{3}P + 4\right) = 0 \Rightarrow \therefore BF = \frac{4}{3}P + 4 \text{ (Tensión)}$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$BC - R_{BX} = 0$$

$$BC = R_{BX} \Rightarrow \therefore BC = P \text{ (Tensión)}$$

Nodo D, figura 3-6e.



$$\uparrow + \sum F_Y = 0$$

$$DE_y - 4 = 0 \Rightarrow DE \sin \theta_1 - 4 = 0$$

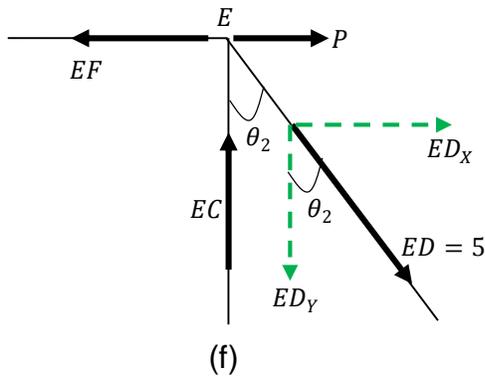
$$DE = \frac{4}{\sin \theta_1} = \frac{4}{4/5} \Rightarrow \therefore DE = 5 \text{ (Tensión)}$$

$$+\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$-DE_x + DC = 0 \Rightarrow -DE \cos \theta_1 + DC = 0$$

$$DC = DE \cos \theta_1 = 5 \left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \therefore DC = 3 \text{ (Compresión)}$$

Nodo E, figura 3-6f.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$-EF + P + ED_x = 0 \Rightarrow -EF + P + ED \sin \theta_2 = 0$$

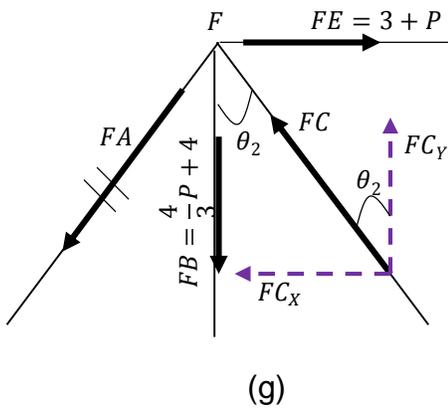
$$-EF + P + 5 \left( \frac{3}{5} \right) = 0 \Rightarrow \therefore EF = 3 + P \text{ (Tensión)}$$

$$\uparrow + \sum FY = 0$$

$$-ED_x + EC = 0 \Rightarrow -ED \cos \theta_2 + EC = 0$$

$$EC = ED \cos \theta_2 = 5 \left( \frac{4}{5} \right) \Rightarrow \therefore EC = 4 \text{ (Compresión)}$$

Nodo F, figura 3-6g.



$$+\rightarrow \sum FX = 0$$

$$FE - FC_x = 0 \Rightarrow FE - FC \sin \theta_2 = 0$$

$$FC = \frac{FE}{\sin \theta_2} = \frac{3 + P}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \therefore FC = 5 + \frac{5}{3}P \text{ (Compresión)}$$

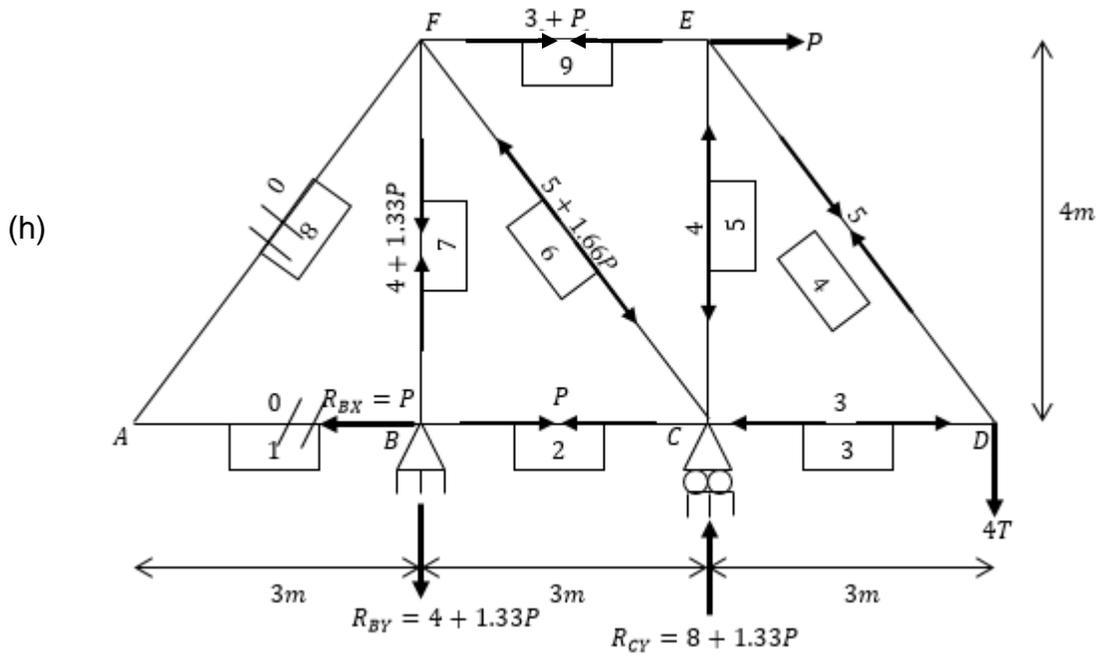
$$\uparrow + \sum FY = 0$$

$$-FB + FC_y = 0 \Rightarrow -FB + FC \cos \theta_2 = 0$$

$$-\left( \frac{4}{3}P + 4 \right) + \left( 5 + \frac{5}{3}P \right) \left( \frac{4}{5} \right) = 0 \text{ ok}$$

Los resultados obtenidos se visualizan en la figura 3-6h; cada barra se ha etiquetado con un número encerrado en un cuadrado adyacente a ella, de forma arbitraria. Debajo, en la tabla 3-4 se enuncian por conveniencia los resultados junto con las derivadas parciales  $\partial N / \partial P$ ; en ella, las fuerzas de tensión son positivas, mientras que las de compresión son negativas. De igual forma, se debe hacer  $P = 5T$ , su valor real. Además, se sabe que

$$AE = [(0.1m)(0.1m)] \left( 2.1 * 10^7 \frac{T}{m^2} \right) = 210000T$$



| No. Barra | $N$                 | $L$ | $\frac{\partial N}{\partial P}$ | $N, \text{ sust } P = 5$ | $N \frac{\partial N}{\partial P} \frac{L}{AE}$ |
|-----------|---------------------|-----|---------------------------------|--------------------------|--|
| 1         | 0                   | 3   | 0                               | 0                        | 0.0000000                                      |
| 2         | $P$                 | 3   | 1                               | 5                        | 0.0000714                                      |
| 3         | -3                  | 3   | 0                               | -3                       | 0.0000000                                      |
| 4         | 5                   | 5   | 0                               | 5                        | 0.0000000                                      |
| 5         | -4                  | 4   | 0                               | -4                       | 0.0000000                                      |
| 6         | $-5 - \frac{5}{3}P$ | 5   | -1.6667                         | -13.3333                 | 0.0005291                                      |
| 7         | $4 + \frac{4}{3}P$  | 4   | 1.3333                          | 10.6667                  | 0.0002709                                      |
| 8         | 0                   | 5   | 0                               | 0                        | 0.0000000                                      |
| 9         | $3 + P$             | 3   | 1                               | 8                        | 0.0001143                                      |
|           |                     |     |                                 | $\Sigma =$               | 0.0009857                                      |

Tabla 3-4

**Teorema de Castigliano**

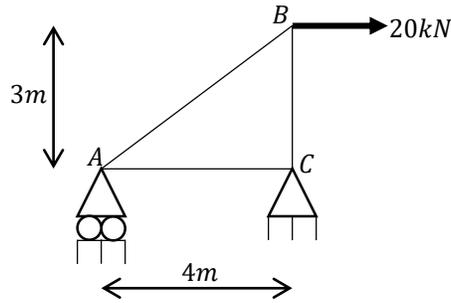
Al aplicar la ecuación para determinar el desplazamiento, se tiene

$$\Delta_{HE} = \sum N \left( \frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} = 9.857 * 10^{-4} \text{ m}$$

Como la sumatoria resultante es positiva, el desplazamiento calculado tiene el mismo sentido que el propuesto para la carga  $P$ .

$$\therefore \Delta_{HE} = 9.857 * 10^{-4} \text{ m} \rightarrow$$

**Ejercicio 3.7** Calcule el desplazamiento vertical de la junta  $B$  de la armadura de tres elementos que se muestra en la figura 3-7a; suponga que  $E$  y  $A$  son constantes.



(a)

**Figura 3-7**

### SOLUCIÓN

#### Fuerza externa $P$

Ya que se desea conocer el desplazamiento vertical en la junta  $B$ , se incorpora una carga vertical  $P$  sobre la armadura justo ahí; el sentido de tal fuerza de magnitud variable es supuesto hacia abajo, aunque bien puede ir hacia arriba.

#### Fuerzas internas $N$

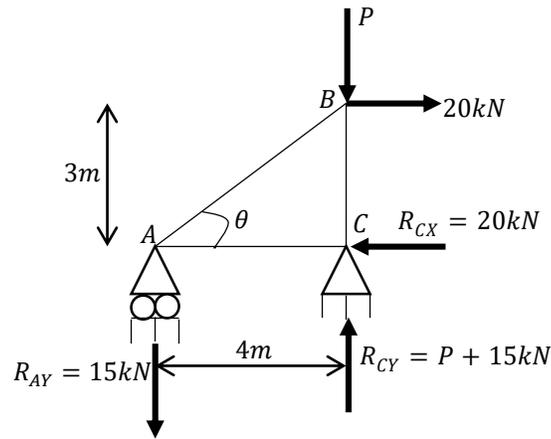
Se obtienen las reacciones en los apoyos  $A$  y  $B$  por medio de las ecuaciones de equilibrio y luego se calculan las fuerzas  $N$  en las barras empleando el método de los nodos.

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow P(4) + 20(3) - R_{CY}(4) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = P + 15kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -R_{AY} - P + (P + 15) = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 15kN \downarrow$$

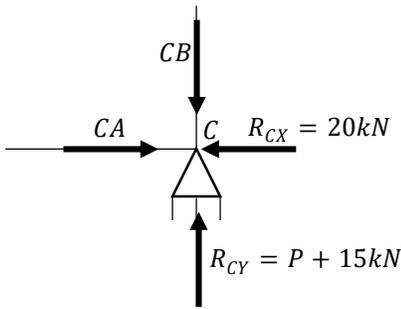
$$+\uparrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{CX} + 20 = 0 \Rightarrow \therefore R_{CX} = 20kN \leftarrow$$

Se muestran los resultados en la figura 3-7b.



(b)

Nodo C, figura 3-7c.



(c)

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -CB + R_{CY} = 0$$

$$-CB + (P + 15) = 0 \Rightarrow \therefore CB = P + 15kN \text{ (Compresión)}$$

$$+\uparrow \sum F_X = 0 \Rightarrow CA - R_{CX} = 0 \Rightarrow CA - 20 = 0$$

$$\therefore CA = 20kN \text{ (Compresión)}$$

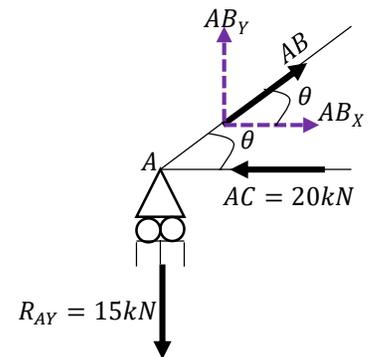
Nodo A, figura 3-7d.

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow AB_Y - R_{AY} = 0 \Rightarrow AB \sin \theta - 15 = 0$$

$$AB = \frac{15}{\sin \theta} = \frac{15}{3/5} \Rightarrow \therefore AB = 25kN \text{ (Tensión)}$$

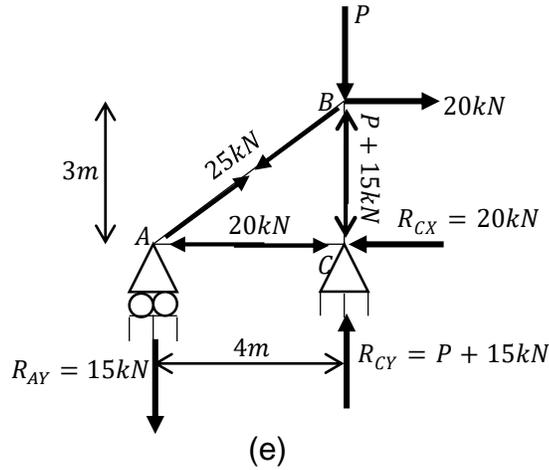
$$+\uparrow \sum F_X = -AC + AB_X = -20 + AB \cos \theta$$

$$= -20 + 25 \left( \frac{4}{5} \right) = 0 \text{ ok}$$



(d)

Se observan los resultados en la figura 3-7e.



Los datos requeridos se disponen tabularmente, tabla 3-5. Se establece  $P = 0$ , debido a que en realidad no hay una carga real vertical aplicada en  $B$  sobre la armadura.

| Barra   | $N$         | $L$ | $\partial N/\partial P$ | $N, \text{ sust } P = 0$ | $N(\partial N/\partial P)L$ |
|---------|-------------|-----|-------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| $A - B$ | 25          | 5   | 0                       | 25                       | 0                           |
| $A - C$ | -20         | 4   | 0                       | -20                      | 0                           |
| $C - B$ | $-(P + 15)$ | 3   | -1                      | -15                      | 45                          |
|         |             |     |                         | $\Sigma =$               | 45                          |

Tabla 3-5

### Teorema de Castigliano

Al reemplazar los valores necesarios en la expresión útil para evaluar el desplazamiento, se obtiene

$$\delta_{VB} = \sum N \left( \frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} = \frac{45}{AE}$$

Dado que se obtuvo una magnitud positiva en el desplazamiento calculado, este tiene el mismo sentido que el supuesto para  $P$ . Por lo tanto,

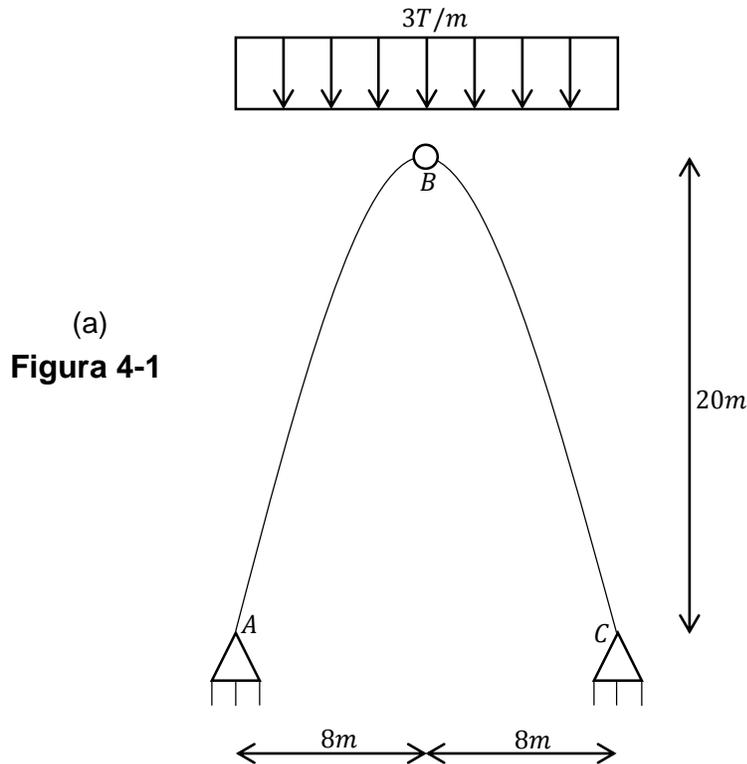
$$\delta_{VB} = \frac{45}{AE} \downarrow$$

## CAPÍTULO 4

### RESOLUCIÓN DE ARCOS ISOSTÁTICOS

#### 4.1 ARCOS PARABÓLICOS

**Ejercicio 4.1** El arco de tres articulaciones que se muestra en la figura 4-1a tiene una forma parabólica. El arco soporta una carga uniforme distribuida de  $3T/m$  y tiene las dimensiones indicadas, lo cual hace que sea simétrico. Demuestre que toda la estructura está sometida únicamente a compresión axial.



### SOLUCIÓN

#### Cálculo de las reacciones en los soportes

Como todo arco triarticulado, el de este ejemplo es isostático. Para calcular las reacciones en los soportes, el arco se desmonta y luego se realiza un diagrama de cuerpo libre de cada segmento, figura 4-1b. La articulación se ubica en la clave, es decir, en el punto B. Entonces, se aíslan los segmentos A – B y B – C. Obsérvese que se tienen seis incógnitas de reacción (el sentido de cada una se supone arbitrariamente), pero como se pueden aplicar las tres ecuaciones de la estática a cada segmento, hay seis ecuaciones de equilibrio disponibles. En los diagramas se indican las resultantes de las cargas distribuidas y su punto de aplicación de cada una.

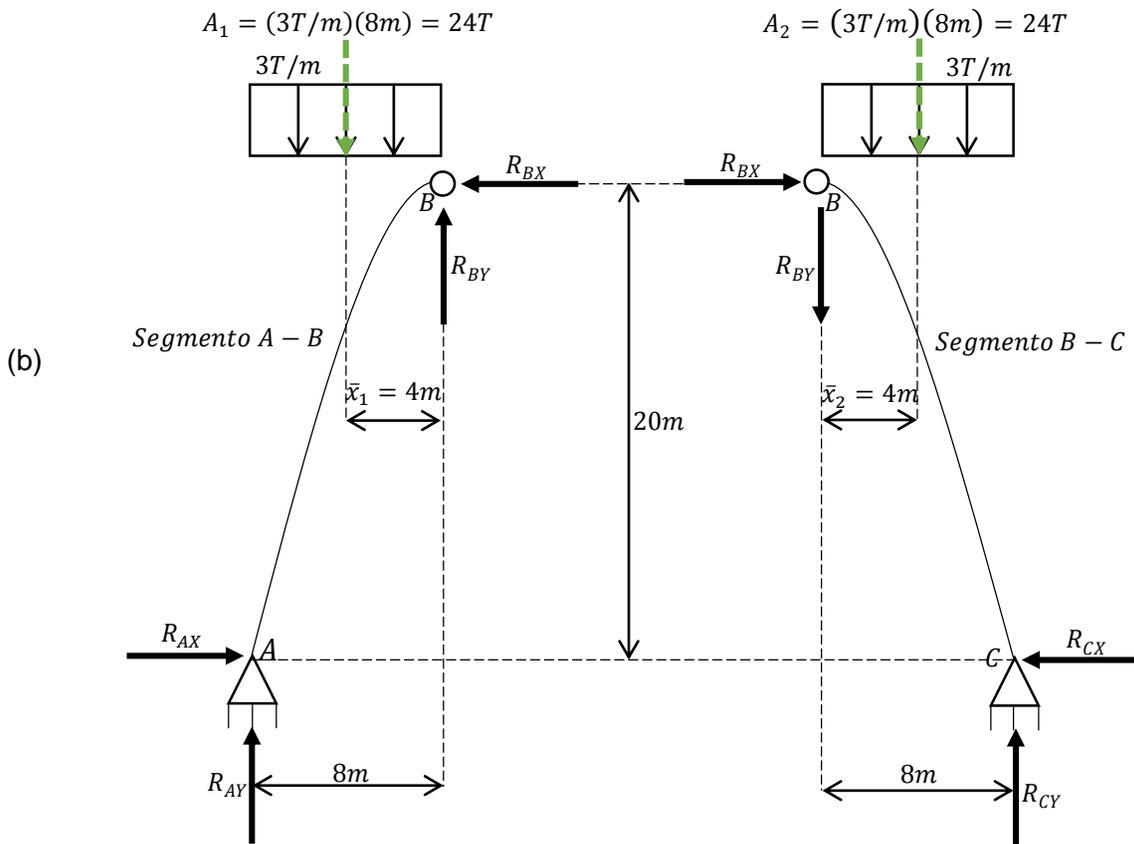
Para determinar las reacciones  $B_X$  y  $B_Y$  en la articulación, tomamos momentos alrededor de  $A$  en el segmento  $A - B$  y alrededor de  $C$  en el segmento  $B - C$ . Las dos ecuaciones resultantes se resuelven simultáneamente.

Segmento  $A - B$  del arco:

$$\curvearrowright \sum MA = 0 \Rightarrow -R_{BX}(20) - R_{BY}(8) + 24(4) = 0 \Rightarrow -20R_{BX} - 8R_{BY} = -96 \text{ --- (1)}$$

Segmento  $B - C$  del arco:

$$\curvearrowright \sum MC = 0 \Rightarrow R_{BX}(20) - R_{BY}(8) - 24(4) = 0 \Rightarrow 20R_{BX} - 8R_{BY} = 96 \text{ --- (2)}$$



Si se despeja  $R_{BY}$  de la ecuación (1) se tiene

$$R_{BY} = \frac{-96 + 20R_{BX}}{-8} = 12 - \frac{5}{2}R_{BX} \text{ --- (3)}$$

Combinando las ecuaciones (3) y (2) resulta

$$20R_{BX} - 8\left(12 - \frac{5}{2}R_{BX}\right) = 96 \Rightarrow R_{BX} = \frac{96 + 8(12)}{20 + 8\left(\frac{5}{2}\right)} \Rightarrow R_{BX} = \frac{24}{5}$$

Reemplazando el valor calculado de  $R_{BX}$  en la expresión (3) da

$$R_{BY} = 12 - \frac{5}{2} \left( \frac{24}{5} \right) = 0$$

Dado que se obtuvo una magnitud positiva para  $R_{BX}$ , el sentido de esta reacción es el mismo que se muestra en ambas porciones del arco; luego, note como en realidad  $R_{BY}$  no existe. A continuación se determinan las reacciones en los soportes con base en las ecuaciones de equilibrio de fuerzas.

Segmento  $A - B$  del arco:

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow R_{AX} - \frac{24}{5} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = \frac{24}{5} T \rightarrow$$

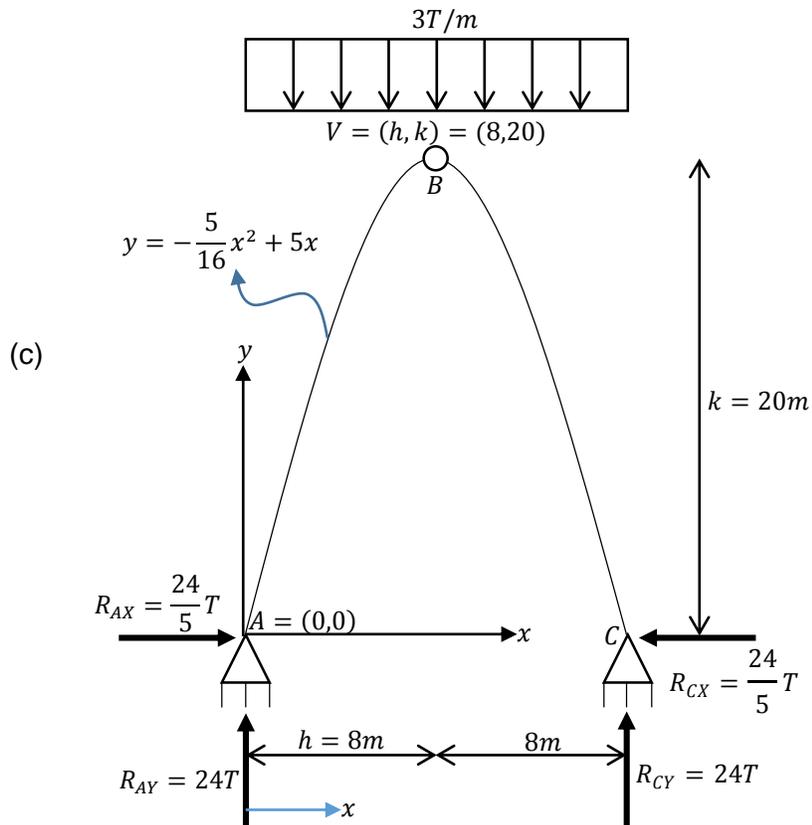
$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{AY} - 24 = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = 24T \uparrow$$

Segmento  $B - C$  del arco:

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{24}{5} - R_{CX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{CX} = \frac{24}{5} T \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow R_{CY} - 24 = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = 24T \uparrow$$

Se dibuja un diagrama del arco completo mostrando los resultados, figura 4-1c; las reacciones de la articulación se omiten por anularse entre sí.



**Ecuación que define al arco parabólico**

Se ha elegido al punto  $A$  como el origen del sistema de coordenadas, sin embargo, el lector debe estar consciente de que el origen bien pudo haberse seleccionado en cualquier otro punto. Por consiguiente, el vértice  $V$ , ubicado en  $B$ , no está en el origen. La ecuación de una parábola es

$$(x - h)^2 = -4p(y - k) \text{ --- (a)}$$

Al sustituir  $h = 8$  y  $k = 20$  en la ecuación (a) se tiene

$$(x - 8)^2 = -4p(y - 20) \text{ --- (b)}$$

Si se despeja  $p$  de la ecuación (b) se llega a

$$p = -\frac{(x - 8)^2}{4(y - 20)} \text{ --- (c)}$$

Reemplazando las coordenadas del origen en la ecuación (c) obtenemos

$$p = -\frac{(0 - 8)^2}{4(0 - 20)} = -\frac{64}{-80} = \frac{4}{5}$$

Al expandir la ecuación (b), sustituir el valor calculado de  $p$  y despejar  $y$  da

$$x^2 - 16x + 64 = -4py + 80p \Rightarrow x^2 - 16x + 64 = -4\left(\frac{4}{5}\right)y + 80\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$x^2 - 16x + 64 = -\frac{16}{5}y + 64 \Rightarrow -\frac{16}{5}y = x^2 - 16x$$

$$y = -\frac{5}{16}(x^2 - 16x) = -\frac{5}{16}x^2 + 5x \text{ --- (d)}$$

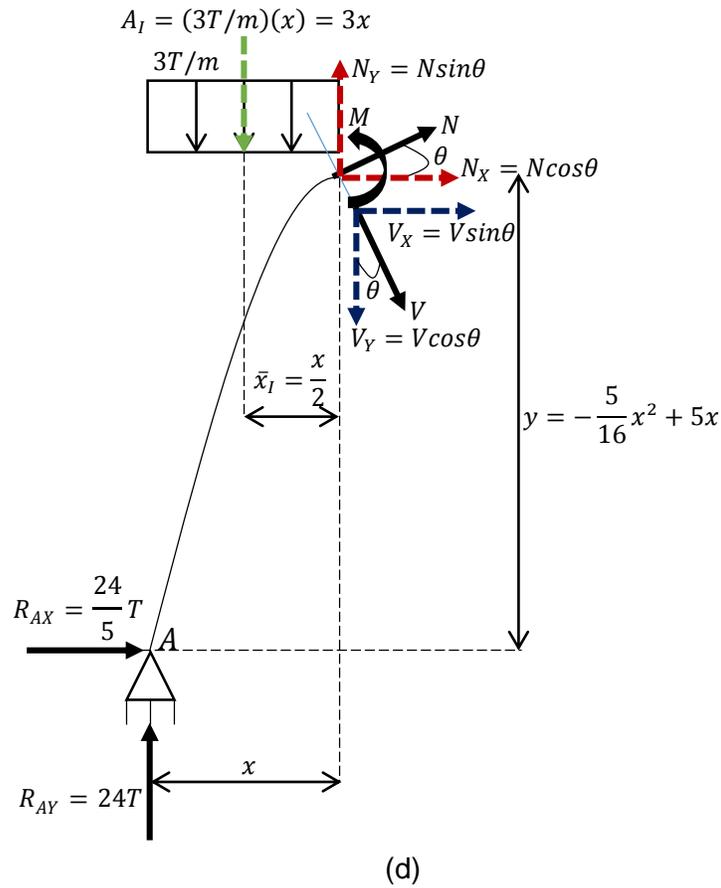
La expresión (d) es la ecuación que define al arco parabólico de este ejemplo.

**Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector**

Ya que se han calculado las reacciones en los soportes y se ha deducido la ecuación parabólica del arco, es posible determinar las variaciones de las fuerzas normal  $N$  y cortante  $V$  internas, y del momento flector  $M$ , en función de la posición  $x$  empleando el método de las secciones. La distribución de la carga y la geometría de la estructura no varían, así que sólo se distingue un único segmento, el  $A - C$ , por lo que se efectúa nada más un corte perpendicular al eje del arco para definir las acciones internas a lo largo de él. La coordenada  $x$  con origen en  $A$ , es positiva hacia la derecha y puede usarse para analizar en su totalidad a la región mencionada. En la figura 4-1d se proporciona un diagrama de cargas de la sección cortada. Los elementos mecánicos actúan en su dirección positiva. La fuerza

resultante  $A_I$  de la carga distribuida uniforme del corte y su punto de aplicación  $\bar{x}_I$  se determinan como de costumbre. Lógicamente, la fuerza normal, que es tangente a la curva parabólica en el punto de corte, es perpendicular a la fuerza cortante, y esta última a su vez, es perpendicular al eje del arco en tal punto considerado. Estas dos últimas fuerzas deben descomponerse de manera individual en sus componentes rectangulares horizontal y vertical.

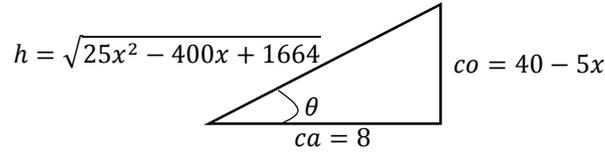
$$0 \leq x \leq 16m$$



La pendiente del segmento cortado en el punto del corte es igual a la derivada.

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(-\frac{5}{16}x^2 + 5x\right)}{dx} = 5 - \frac{5}{8}x = \frac{40 - 5x}{8} = \frac{ca}{ca}$$

Siendo el cociente del cateto opuesto  $co$  entre el cateto adyacente  $ca$  la definición para la tangente de un determinado ángulo  $\theta$ , lo anterior puede ser acomodado en un triángulo rectángulo como el de la figura 4-1e.



(e)

Se calcula la hipotenusa  $h$  a través del Teorema de Pitágoras.

$$h = \sqrt{(8)^2 + (40 - 5x)^2} = \sqrt{25x^2 - 400x + 1664}$$

Ahora, ya es posible determinar los valores en función de  $x$  de  $\sin\theta$  y  $\cos\theta$ , los cuales son útiles cuando se resuelven las fuerzas  $N$  y  $V$  en sus componentes.

$$\sin\theta = \frac{co}{h} = \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}}$$

$$\cos\theta = \frac{ca}{h} = \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}}$$

Se aplican las ecuaciones de equilibrio en el cuerpo libre. Tomando momentos respecto del punto del corte, se calcula el momento interno  $M$ .

$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow 24(x) - \frac{24}{5} \left( -\frac{5}{16}x^2 + 5x \right) - 3x \left( \frac{x}{2} \right) - M = 0 \Rightarrow M = 0$$

A partir del planteamiento de las ecuaciones de equilibrio para fuerzas en las direcciones horizontal y vertical, se origina un sistema simultáneo de ecuaciones que al resolverse proporciona los valores de las fuerzas normal  $N$  y cortante  $V$  internas.

$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{24}{5} + N_x + V_x = 0 \Rightarrow \frac{24}{5} + N\cos\theta + V\sin\theta = 0$$

$$\frac{24}{5} + N \left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) + V \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) = 0 \dots (I)$$

$$\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow 24 - 3x + N_y - V_y = 0 \Rightarrow 24 - 3x + N\sin\theta - V\cos\theta = 0$$

$$24 - 3x + N \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) - V \left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) = 0 \text{ --- (II)}$$

Al despejar  $N$  de la ecuación (I) obtenemos

$$N = - \frac{V \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) + \frac{24}{5}}{\left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right)} \text{ --- (III)}$$

Al combinar las ecuaciones (II) y (III) resulta

$$24 - 3x + \left( - \frac{V \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) + \frac{24}{5}}{\left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right)} \right) \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) - V \left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) = 0$$

Si efectuamos un cambio de variable, tenemos

$$24 - 3x + \left( - \frac{V \left( \frac{co}{h} \right) + \frac{24}{5}}{\frac{ca}{h}} \right) \left( \frac{co}{h} \right) - V \left( \frac{ca}{h} \right) = 0 \text{ --- (IV)}$$

Multiplicando la ecuación (IV) por  $\frac{ca}{h}$  da

$$(24 - 3x) \left( \frac{ca}{h} \right) - \left( V \left( \frac{co}{h} \right) + \frac{24}{5} \right) \left( \frac{co}{h} \right) - V \left( \frac{ca}{h} \right)^2 = 0 \text{ --- (V)}$$

Multiplicamos la ecuación (V) por  $h$ . Por consiguiente,

$$(24 - 3x)(ca) - \left( V \left( \frac{co}{h} \right) + \frac{24}{5} \right) (co) - V \left( \frac{(ca)^2}{h} \right) = 0 \text{ --- (VI)}$$

Se expande y se factoriza la ecuación (VI), por lo que

$$(24 - 3x)(ca) - V \left( \frac{(co)^2}{h} \right) - \frac{24}{5} co - V \left( \frac{(ca)^2}{h} \right) = 0$$

$$-V \left( \frac{(co)^2}{h} + \frac{(ca)^2}{h} \right) = \frac{24}{5} co - (24 - 3x)(ca)$$

No obstante,

$$\frac{24}{5}co - (24 - 3x)(ca) = \frac{24}{5}(40 - 5x) - (24 - 3x)(8) = 192 - 24x - 192 + 24x = 0$$

En consecuencia,

$$-V \left( \frac{(co)^2}{h} + \frac{(ca)^2}{h} \right) = 0 \Rightarrow V = -\frac{0}{\left( \frac{(co)^2}{h} + \frac{(ca)^2}{h} \right)} = 0$$

Si se reemplaza  $V = 0$  en la ecuación (III) da

$$N = -\frac{(0) \left( \frac{40 - 5x}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right) + \frac{24}{5}}{\left( \frac{8}{\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}} \right)} = -\frac{3\sqrt{25x^2 - 400x + 1664}}{5}$$

De acuerdo con los resultados obtenidos, se concluye que un arco de forma parabólica, con una rótula en la clave y dos apoyos articulados posicionados a la misma altura, que se somete una carga vertical uniformemente distribuida de manera horizontal que abarca una longitud igual a la distancia que hay entre apoyo y apoyo, sólo resistirá fuerzas a compresión axial. Bajo estas condiciones, el arco recibe el nombre de arco funicular, porque dentro de él no se generan fuerzas de flexión ni fuerzas cortantes, ya que como se dedujo, tanto  $V$  como  $M$  son nulos a lo largo de la estructura. Un arco de tres articulaciones, tal y como se mencionó al inicio, es estáticamente determinado, en consecuencia, no se ve afectado por cambios de temperatura o en el asentamiento. Puede ser construido de concreto, madera o metal. El lector puede dibujar fácilmente el diagrama de carga axial (cortante) de este ejemplo al evaluar la función de  $N$  en el intervalo  $0 \leq x \leq 16m$  y después graficar los datos.

**Ejercicio 4.2** Determine en primer lugar las fuerzas normal y cortante internas, así como el momento flexionante, en el punto específico intermedio a la porción  $C - D$  que la carga prescrita induce en el arco de tres articulaciones que se muestra en la figura 4-2a. Después obtenga las expresiones algebraicas que describen la variación de la fuerza axial, de la fuerza cortante y del momento flector. Como dato recordatorio, un KIP es igual a mil libras, es decir,  $1kip = 1000lb$ .

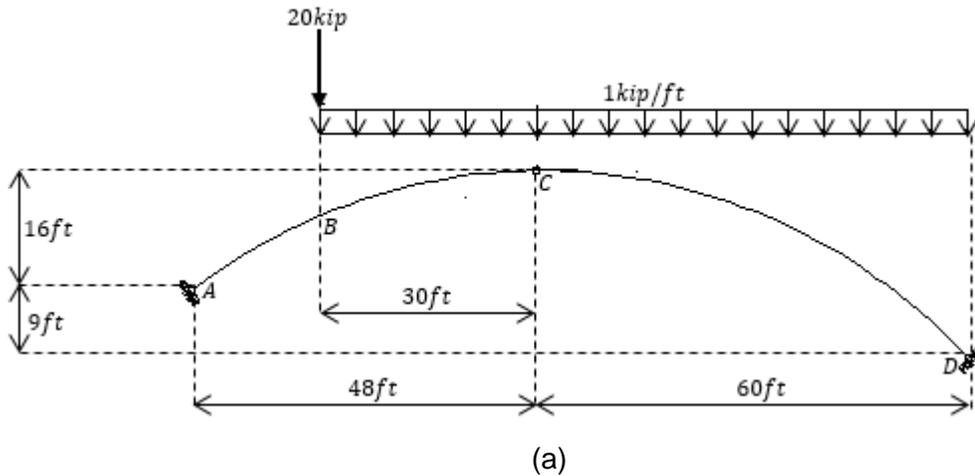
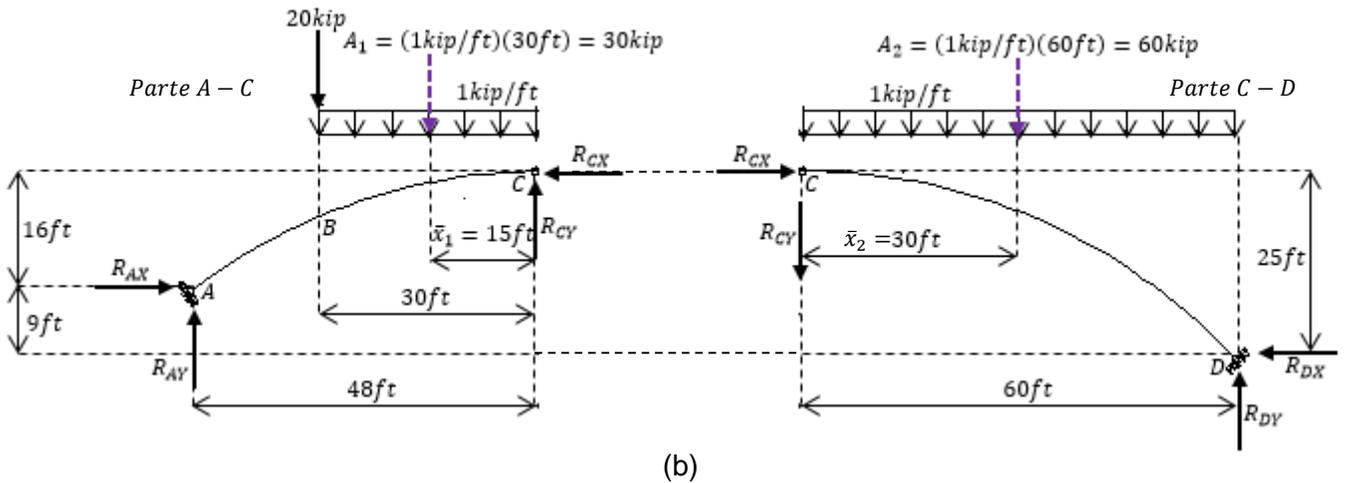


Figura 4-2

**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**

El arco triarticulado es isostático. Como hay una rótula en el punto  $C$ , las seis incógnitas de reacción se pueden hallar separando las partes  $A - C$  y  $C - D$  cuyos diagramas de cargas se muestran en la figura 4-2b.



Para calcular las reacciones en las articulaciones, tomamos momentos respecto de  $A$  en la parte  $A - C$  y respecto de  $D$  en la parte  $C - D$  con base en los diagramas anteriores.

Segmento  $A - C$  del arco:

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MA = 0 &\Rightarrow 20(48 - 30) + 30(48 - 15) - R_{CX}(16) - R_{CY}(48) = 0 \\ -R_{CX}(16) - R_{CY}(48) &= -1350 \Rightarrow R_{CX} + 3R_{CY} = 84.375 \text{ --- (1)} \end{aligned}$$

Segmento  $C - D$  del arco:

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MD = 0 &\Rightarrow R_{CY}(60) - R_{CX}(25) + 60(30) = 0 \\ R_{CY}(60) - R_{CX}(25) &= -1800 \Rightarrow 12R_{CY} - 5R_{CX} = -360 \text{ --- (2)} \end{aligned}$$

Se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones (1) y (2). Despejando  $R_{CX}$  de las expresiones (1) y (2) respectivamente, obtenemos

$$R_{CX} = 84.375 - 3R_{CY} \text{ --- (3)}$$

$$R_{CX} = \frac{360 + 12R_{CY}}{5} = 72 + 2.4R_{CY} \text{ --- (4)}$$

Al igualar la ecuación (3) con la ecuación (4) resulta

$$84.375 - 3R_{CY} = 72 + 2.4R_{CY} \Rightarrow R_{CY}(3 + 2.4) = -72 + 84.375 \Rightarrow R_{CY} = 2.2917 \text{ kip}$$

Al sustituir el valor calculado de  $R_{CY}$  en la ecuación (4) se tiene

$$R_{CX} = 72 + 2.4(2.2917) = 77.5 \text{ kip}$$

En consecuencia, los sentidos propuestos para ambas reacciones son correctos. Ahora se determinan las reacciones en los apoyos articulados  $A$  y  $D$ .

Segmento  $A - C$  del arco:

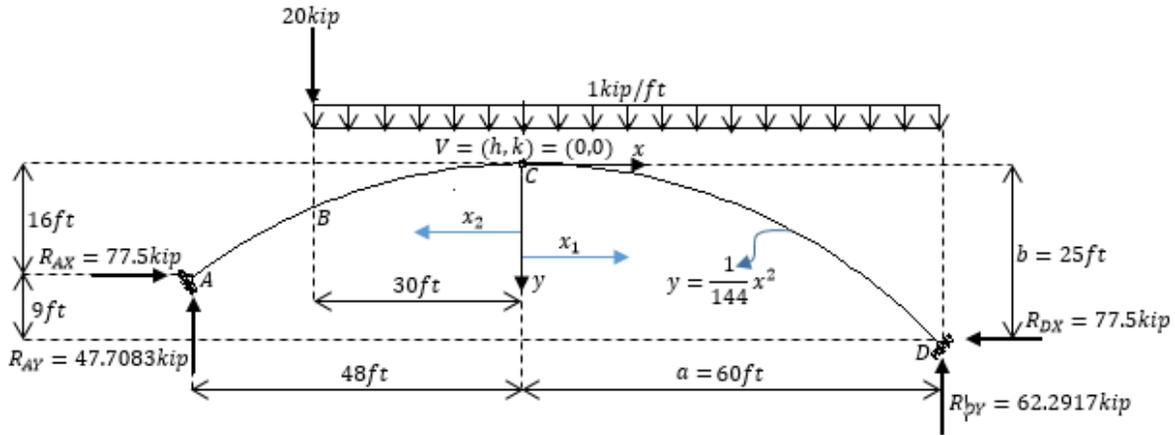
$$\begin{aligned} +\rightarrow \sum FX = 0 &\Rightarrow R_{AX} - 77.5 = 0 \Rightarrow R_{AX} = 77.5 \text{ kip} \rightarrow \\ +\uparrow \sum FY = 0 &\Rightarrow R_{AY} - 30 - 20 + 2.2917 = 0 \Rightarrow R_{AY} = 47.7083 \text{ kip} \uparrow \end{aligned}$$

Segmento  $C - D$  del arco:

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -R_{DX} + 77.5 = 0 \Rightarrow R_{DX} = 77.5 \text{ kip} \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow -2.2917 - 60 + R_{DY} = 0 \Rightarrow \therefore R_{DY} = 62.2917 \text{ kip} \uparrow$$

En la figura 4-2c se muestra el diagrama del arco completo con los resultados obtenidos.



(c)

### Ecuación que define al arco parabólico

La ecuación de una parábola es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \text{ --- (a)}$$

Como observación, la parte derecha de la ecuación ya no está afectada por un signo negativo debido a que la parábola abre hacia abajo, que en este caso es la dirección positiva. La expresión anterior se simplifica notoriamente debido a que esta vez se ha optado porque el vértice se ubique en el origen de los ejes referenciales, justo donde está la clave C.

Al sustituir  $h = k = 0$  en la ecuación (a) y despejando  $y$  se tiene

$$(x - 0)^2 = 4p(y - 0) \Rightarrow x^2 = 4py \Rightarrow y = \frac{1}{4p} x^2 \text{ --- (b)}$$

Podemos hacer  $\frac{1}{4p} = k$  debido a que se trata de una constante. Entonces, la ecuación (b) pasa a ser

$$y = kx^2 \text{ --- (c)}$$

Se despeja  $k$  de la ecuación (c). En consecuencia,

$$k = \frac{y}{x^2} \text{--- -- -- (d)}$$

Si se reemplaza un punto cualquiera de la parábola en la ecuación (d), se calcula el valor numérico de  $k$ . Si se sabe que  $P = (x, y) = (a, b) = (60, 25)$ , entonces

$$k = \frac{y}{x^2} = \frac{(25)}{(60)^2} = \frac{1}{144}$$

Si se sustituye el valor obtenido de  $k$  en la ecuación (c), se obtiene la ecuación definitiva que define al arco parabólico de este ejemplo.

$$y = \frac{1}{144} x^2$$

### Fuerzas normal y cortante internas, y momento flexionante en un punto específico

Una vez obtenidas las reacciones en los soportes y la ecuación del arco parabólico, es posible determinar las fuerzas normal y cortante internas, así como las cargas de momento en cualquier punto del arco siguiendo el método de las secciones. Recuerde que la sección se debe tomar perpendicular al eje del arco en el punto considerado.

Una sección del arco tomada a través del punto intermedio a la porción  $C - D$  es mostrada en la figura 4-2d; en ella, el sentido de cada acción interna se propone arbitrariamente. Los valores específicos de  $x$  y  $y$ , y la pendiente del segmento en ese punto son

$$x = 30 \text{ ft} \qquad y = \frac{1}{144} (30)^2 = 6.25 \text{ ft}$$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{144}x^2\right)}{dx} \Bigg|_{x=30ft} = \frac{x}{72} \Bigg|_{x=30ft} = \frac{5}{12} \qquad \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = 22.6199^\circ$$

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio en el diagrama de cargas se tiene

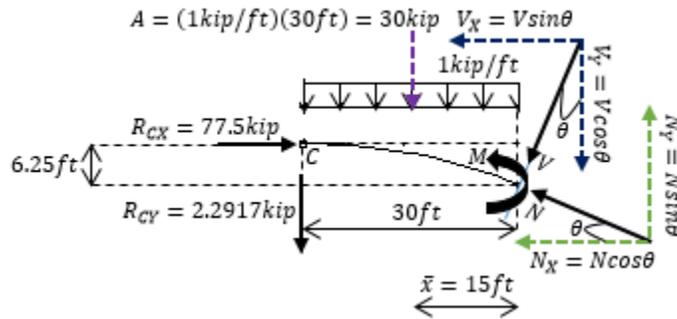
$$\curvearrowright \sum M_{corte} = 0 \Rightarrow 77.5(6.25) - 2.2917(30) - 30(15) - M = 0 \Rightarrow M = -34.376 \text{ kip. ft}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 77.5 - V_x - N_x = 0$$

$$V_x + N_x = 77.5 \Rightarrow V(\text{sen}22.6199) + N(\text{cos}22.6199) = 77.5 \text{ --- (1)}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -2.2917 - 30 - V_y + N_y = 0$$

$$N_y - V_y = 32.2917 \Rightarrow N(\text{sen}22.6199) - V(\text{cos}22.6199) = 32.2917 \text{ --- (2)}$$



(d)

Se le da solución al sistema simultáneo de ecuaciones (1) y (2). Al despejar  $V$  de manera respectiva en las expresiones (1) y (2) se tiene

$$V = \frac{77.5 - N(\text{cos}22.6199)}{\text{sen}22.6199} \text{ --- (3)}$$

$$V = \frac{N(\text{sen}22.6199) - 32.2917}{\text{cos}22.6199} \text{ --- (4)}$$

Combinando las ecuaciones (3) y (4) obtenemos

$$\frac{77.5 - N(\text{cos}22.6199)}{\text{sen}22.6199} = \frac{N(\text{sen}22.6199) - 32.2917}{\text{cos}22.6199} \text{ --- (5)}$$

Multiplicando la ecuación (5) por  $\text{cos}22.6199$  se llega a

$$\frac{77.5\text{cos}(22.6199)}{\text{sen}22.6199} - \frac{N(\text{cos}^2 22.6199)}{\text{sen}22.6199} = N(\text{sen}22.6199) - 32.2917 \text{ --- (6)}$$

Al simplificar la ecuación (6) y despejar la incógnita resulta

$$186 - 2.21538N = 0.384616N - 32.2917 \Rightarrow N = \frac{-(32.2917 + 186)}{-(2.21538 + 0.384616)} = 83.9585\text{kip}$$

Al emplear el valor calculado de  $N$  en la ecuación (3) se determina el valor de  $V$ .

$$V = \frac{77.5 - N(\cos 22.6199)}{\sin 22.6199} = \frac{77.5 - 83.9585(\cos 22.6199)}{\sin 22.6199} \approx 0$$

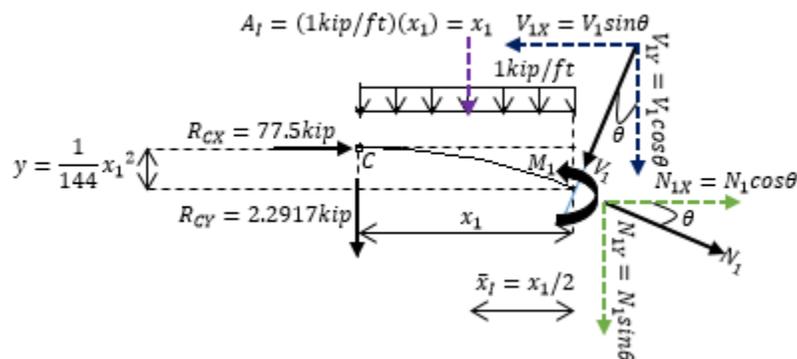
Observese como en realidad, en el punto específico analizado, no hay fuerza cortante; además, como se obtuvo una magnitud negativa para el momento flector, este actúa en sentido contrario al supuesto en el diagrama de cargas.

### Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector

Dado que la ecuación parabólica fue hecha estableciendo el vértice en el origen, las coordenadas  $x$  a emplear deben tener su origen en ese punto. Siendo así, la coordenada  $x_1$  con origen en  $C$ , es positiva hacia la derecha y es útil para analizar la parte  $C - D$ ; por su cuenta, la coordenada  $x_2$  con el mismo punto de origen, es positiva hacia la izquierda y se emplea para analizar la parte  $C - A$ . En cuanto a los cortes se refiere, se deben efectuar tres en total para definir las acciones internas a lo largo de la estructura; para el segmento  $C - D$  sólo se necesita de un seccionamiento, figura 4-2e, dado que la carga distribuida no varía, en cambio, para el segmento  $C - A$  se requieren de dos seccionamientos, figuras 4-2g y 4-2h, debido a que las funciones de los elementos mecánicos son discontinuas en  $B$ , ya que en ese punto hay aplicada una carga puntual de  $20kip$  y la carga distribuida sufre una discontinuidad.

Parte  $C - D$ .

$$0 \leq x \leq 60ft$$



(e)

$$\sum M_{corte} = 0 \Rightarrow -M_1 - 2.2917(x_1) + 77.5 \left( \frac{1}{144} x_1^2 \right) - x_1 \left( \frac{x_1}{2} \right) = 0$$

$$M_1 = 0.038194x_1^2 - 2.2917x_1$$

en  $x_1 = 0, M_1 = 0$ ; en  $x_1 = 30ft, M_1 = -34.376kip.ft$ ; en  $x_1 = 60ft, M_1 = 0$

La pendiente del segmento en el punto del corte es

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} \left( \frac{1}{144} x^2 \right) = \frac{x_1}{72} = \frac{co}{ca}$$

Con base en la figura 4-2f, se tiene

$$h = \sqrt{(72)^2 + (x_1)^2} = \sqrt{5184 + 25x_1^2}$$

$$\cos\theta = \frac{72}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \quad \text{sen}\theta = \frac{x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}}$$

(f)

$$\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow 77.5 + N_{1X} - V_{1X} = 0 \Rightarrow N_1(\cos\theta) - V_1(\text{sen}\theta) = -77.5$$

$$N_1 \left( \frac{72}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \right) - V_1 \left( \frac{x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \right) = -77.5 \quad \text{--- (1')}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -2.2917 - x_1 - V_{1Y} - N_{1Y} = 0 \Rightarrow V_1(\cos\theta) + N_1(\text{sen}\theta) = -2.2917 - x_1$$

$$V_1 \left( \frac{72}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \right) + N_1 \left( \frac{x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \right) = -2.2917 - x_1 \quad \text{--- (2')}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones (1') y (2'). Al despejar  $N_1$  de forma individual en las expresiones (1') y (2') se tiene

$$N_1 = \frac{V_1 \left( \frac{x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \right) - 77.5}{\left( \frac{72}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \right)} \Rightarrow N_1 = -1.07639 \sqrt{x_1^2 + 5184} + \frac{1}{72} x_1 V_1 \quad \text{--- (3')}$$

$$N_1 = \frac{-2.2917 - x_1 - V_1 \left( \frac{72}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \right)}{\left( \frac{x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}} \right)}$$

$$N_1 = -\frac{2.2917(\sqrt{5184 + x_1^2})}{x_1} - \sqrt{5184 + x_1^2} - \frac{72}{x_1} V_1 \quad \text{--- (4')}$$

Al igualar las ecuaciones (3') y (4') y simplificar resulta

$$-1.07639\sqrt{5184 + x_1^2} + \frac{1}{72}x_1V_1 = -\frac{2.2917(\sqrt{5184 + x_1^2})}{x_1} - \sqrt{5184 + x_1^2} - \frac{72}{x_1}V_1$$

$$V_1\left(\frac{1}{72}x_1 + \frac{72}{x_1}\right) = (\sqrt{5184 + x_1^2})\left(-\frac{2.2917}{x_1} - 1 + 1.07639\right)$$

$$V_1\left(\frac{x_1^2 + 5184}{72x_1}\right) = (\sqrt{5184 + x_1^2})\left(-\frac{2.2917}{x_1} + 0.07639\right)$$

$$V_1 = \frac{(5184 + x_1^2)^{\frac{1}{2}}(72x_1)\left(-\frac{2.2917}{x_1} + 0.07639\right)}{(5184 + x_1^2)^{\frac{2}{2}}} = \frac{5.50008x_1 - 165.002}{\sqrt{5184 + x_1^2}}$$

Si se sustituye el valor obtenido de  $V_1$  en la ecuación (3') se obtiene

$$N_1 = -1.07639\sqrt{5184 + x_1^2} + \frac{1}{72}x_1\left(\frac{5.50008x_1 - 165.002}{\sqrt{5184 + x_1^2}}\right)$$

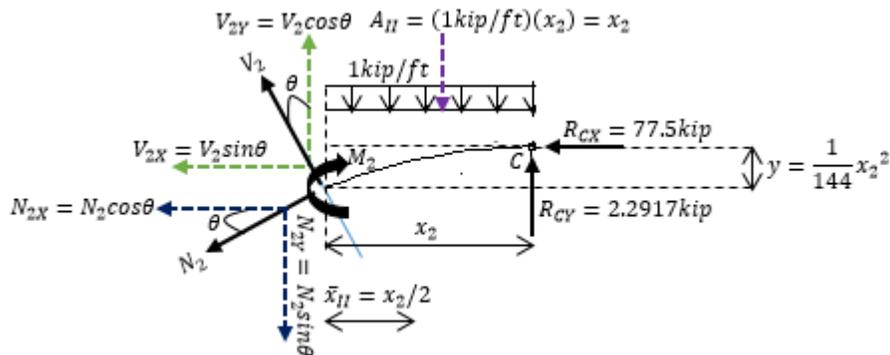
$$N_1 = -1.07639\sqrt{5184 + x_1^2} + \frac{0.07639x_1^2 - 2.2917x_1}{\sqrt{5184 + x_1^2}}$$

en  $x_1 = 0, V_1 = -2.2917\text{kip}$ ; en  $x_1 = 30\text{ft}, V_1 = 0$

en  $x_1 = 0, N_1 = -77.5001\text{kip}$ ; en  $x_1 = 30\text{ft}, N_1 = -83.9584$

Parte C - A.

$$0 \leq x_2 \leq 30\text{ft}$$



(g)

$$\curvearrowright \sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow M_2 + x_2 \left( \frac{x_2}{2} \right) - 2.2917(x_2) - 77.5 \left( \frac{1}{144} x_2^2 \right) = 0$$

$$M_2 = 0.038194x_2^2 + 2.2917x_2$$

$$\text{en } x_2 = 0, M_2 = 0; \text{ en } x_2 = 30 \text{ ft}, M_2 = 103.126 \text{ kip. ft}$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -N_{2X} - V_{2X} - 77.5 = 0 \Rightarrow -N_2(\cos\theta) - V_2(\text{sen}\theta) = 77.5$$

$$-N_2 \left( \frac{72}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) - V_2 \left( \frac{x_2}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) = 77.5 \text{ --- (1'')}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow -N_{2Y} + V_{2Y} - x_2 + 2.2917 = 0 \Rightarrow -N_2 \text{sen}\theta + V_2 \cos\theta - x_2 + 2.2917 = 0$$

$$-N_2 \left( \frac{x_2}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) + V_2 \left( \frac{72}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) = x_2 - 2.2917 \text{ --- (2'')}$$

Al resolver el sistema simultáneo de ecuaciones (1'') y (2'') se obtiene

$$N_2 = \frac{-\left(\sqrt{5184 + x_2^2}\right)(x_2^2 - 2.2917 + 5580)}{5184 + x_2^2}$$

$$V_2 = \frac{-5.5(x_2 + 30.0004)(\sqrt{5184 + x_2^2})}{5184 + x_2^2}$$

$$\text{en } x_2 = 0, N_2 = -77.5 \text{ kip}; \text{ en } x_2 = 30 \text{ ft}, N_2 = -82.1955 \text{ kip}$$

$$\text{en } x_2 = 0, V_2 = -2.2917 \text{ kip}; \text{ en } x_2 = 30 \text{ ft}, V_2 = -4.2308 \text{ kip}$$

$$30 \text{ ft} \leq x_2 \leq 48 \text{ ft}$$

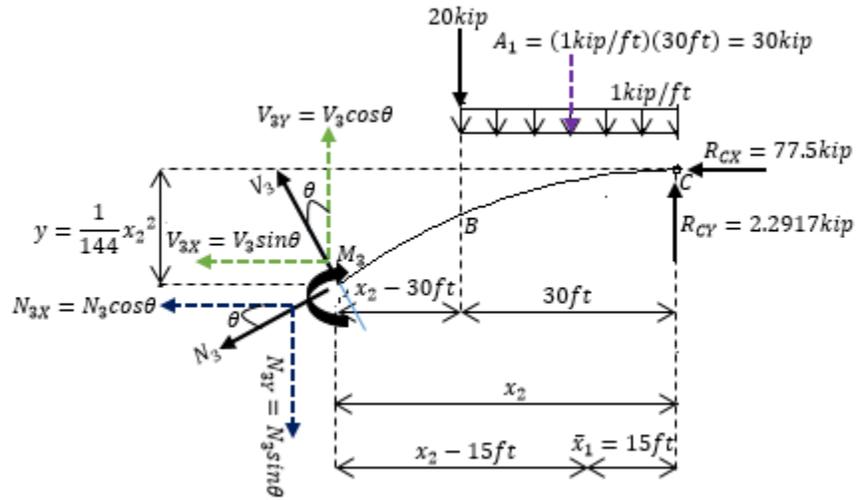
$$\curvearrowright \sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow M_3 + 20(x_2 - 30) + 30(x_2 - 15) - 2.2917(x_2) - 77.5 \left( \frac{1}{144} x_2^2 \right) = 0$$

$$M_3 = 0.538194x_2^2 - 47.7083 x_2 + 1050$$

$$\text{en } x_2 = 30 \text{ ft}, M_3 = 103.126 \text{ kip. ft}; \text{ en } x_2 = 48 \text{ ft}, M_3 = 0$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow -N_{3X} - V_{3X} - 77.5 = 0 \Rightarrow -N_3(\cos\theta) - V_3(\text{sen}\theta) = 77.5$$

$$-N_3 \left( \frac{72}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) - V_3 \left( \frac{x_2}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) = 77.5 \text{ --- (1''')}$$



(h)

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow V_{3Y} - N_{3Y} - 20 - 30 + 2.2917 = 0 \Rightarrow V_3(\cos \theta) - N_3(\sin \theta) = 47.7083$$

$$V_3 \left( \frac{72}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) - N_3 \left( \frac{x_2}{\sqrt{5184 + x_2^2}} \right) = 47.7083 \quad \text{--- (2'')}$$

Al resolver el sistema simultáneo de ecuaciones (1'') y (2'') se obtiene

$$N_3 = \frac{-47.7083(x_2 + 116.961)}{\sqrt{5184 + x_2^2}}$$

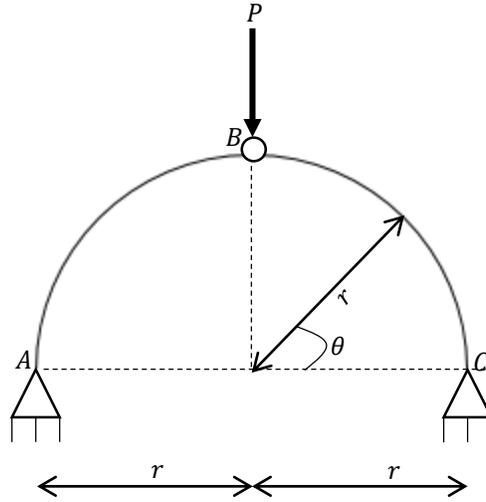
$$V_3 = \frac{4293747 - 96875x_2}{1250(\sqrt{5184 + x_2^2})}$$

en  $x_2 = 30 \text{ ft}$ ,  $N_3 = -89.8878 \text{ kip}$ ; en  $x_2 = 48 \text{ ft}$ ,  $N_3 = -90.9474 \text{ kip}$

en  $x_2 = 30 \text{ ft}$ ,  $V_3 = 14.2307 \text{ kip}$ ; en  $x_2 = 48 \text{ ft}$ ,  $V_3 = -3.29356 \text{ kip}$

**4.2 ARCOS CIRCULARES**

**Ejercicio 4.3** Calcule las reacciones en los soportes y las funciones de las acciones internas en el arco de forma circular mostrado en la figura 4-3a que soporta una carga puntual  $P$  en  $B$ .



(a)

**Figura 4-3**

**SOLUCIÓN**

**Cálculo de las reacciones en los soportes**

El arco circular triarticulado es isostático y además simétrico tanto con respecto a la carga como a la geometría. Para evitar la solución de un sistema simultáneo de ecuaciones, se aplican las ecuaciones de equilibrio en la siguiente secuencia y se van usando los resultados calculados previamente.

Arco completo:

$$\begin{aligned} \curvearrowright \sum MA = 0 &\Rightarrow P(r) - R_{CY}(2r) = 0 \Rightarrow \therefore R_{CY} = \frac{P}{2} \uparrow \\ +\uparrow \sum FY = 0 &\Rightarrow R_{AY} - P + \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow \therefore R_{AY} = \frac{P}{2} \uparrow \end{aligned}$$

Recuerde que el momento en la rótula  $B$  es nulo.

Segmento  $A - B$  del arco:

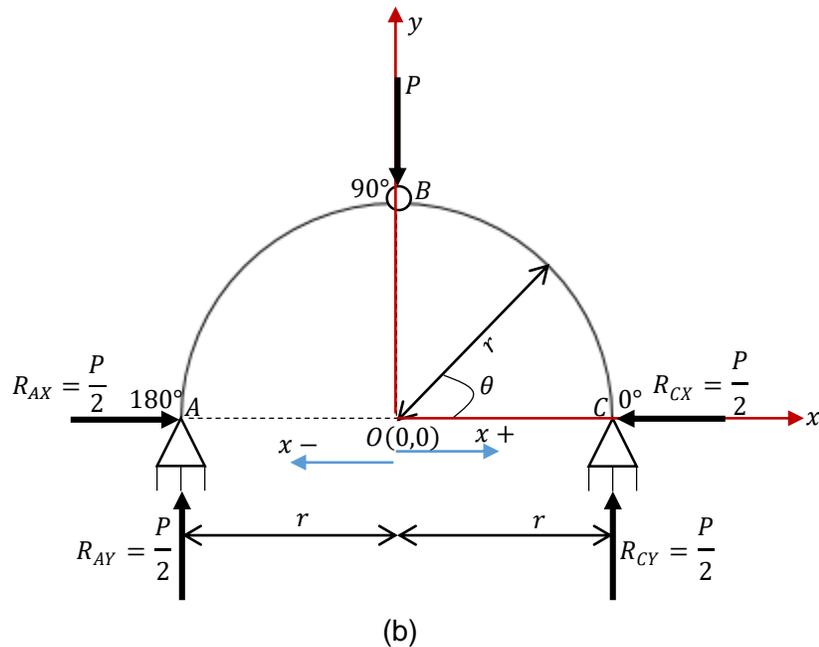
$$\curvearrowright \sum MB = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}(r) - R_{AX}(r) = 0 \Rightarrow \therefore R_{AX} = \frac{P}{2} \rightarrow$$

Arco completo:

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - R_{CX} = 0 \Rightarrow \therefore R_{CX} = \frac{P}{2} \leftarrow$$

**Funciones de la fuerza cortante, de la fuerza normal y del momento flector**

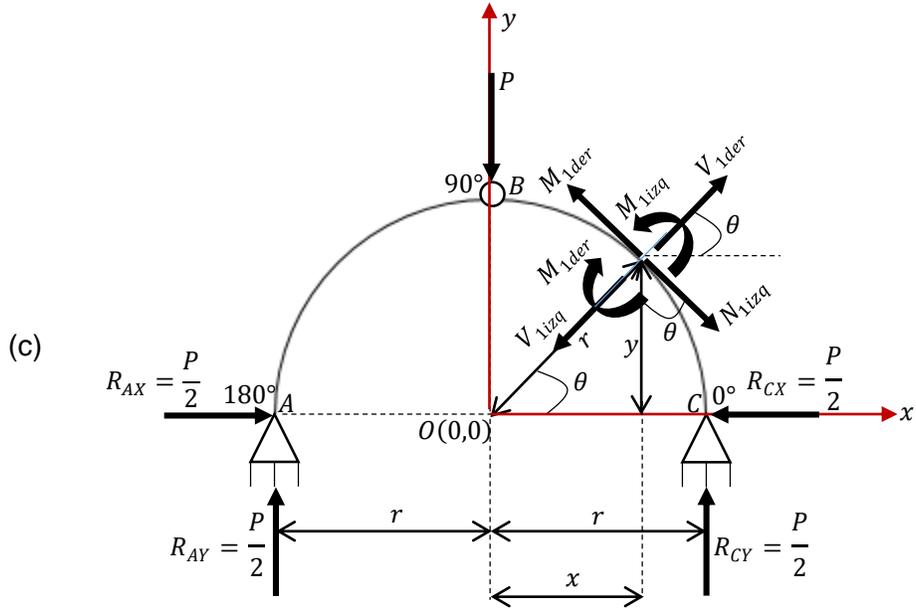
En la figura 4-3b se presentan esquemáticamente los resultados obtenidos.



El centro de la circunferencia se elige en el origen  $O$  de los ejes globales  $x, y$ , los cuales se muestran en la figura en su dirección positiva. Obsérvese como a los puntos  $A, B$  y  $C$  les corresponden, de forma respectiva, los ángulos de  $180^\circ, 90^\circ$  y  $0^\circ$ . Las funciones de las acciones internas son discontinuas en el punto  $B$  debido a que justo ahí se encuentra aplicada una carga  $P$ . Entonces, la estructura debe seccionarse en dos ocasiones, una en el tramo  $A - B$  y otra en el tramo  $B - C$ . Se utilizará una sola coordenada  $x$  cuyo origen está en  $O$  y que es positiva hacia adelante y negativa hacia atrás. Al emplear el método de las secciones se tiene

Parte  $B - C$ . Se secciona el arco en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $B - C$ ) a una distancia horizontal  $x$  del origen  $O$ , figura 4-3c.

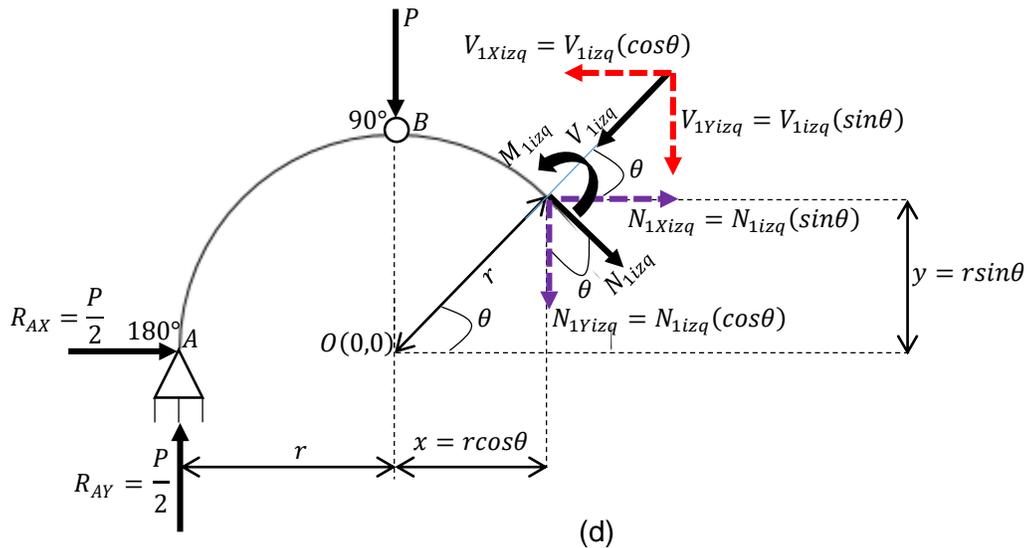
$$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$



Con base en la figura anterior, del triángulo rectángulo inscrito en el cuarto de circunferencia derecho se deduce

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta$$

Note como en el diagrama anterior aparecen las fuerzas normal y cortante internas, y el momento flector, tanto de la cara izquierda como de la cara derecha del elemento cortado.



En la figura 4-3d se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción izquierda.

Ahora veamos las implicaciones del equilibrio estático del cuerpo libre. Tomando momentos alrededor del punto del corte, se determina el momento interno  $M$ .

$$\sum M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow -\frac{P}{2}(y) + \frac{P}{2}(r+x) - P(x) - M_{1izq} = 0$$

$$-\frac{P}{2}(r\sin\theta) + \frac{P}{2}(r+r\cos\theta) - P(r\cos\theta) - M_{1izq} = 0 \Rightarrow M_{1izq} = \frac{P}{2}r(1 - \sin\theta - \cos\theta)$$

Las fuerzas normal  $N_{1izq}$  y cortante  $V_{1izq}$  internas se obtienen de resolver el sistema simultáneo de ecuaciones que se origina al establecer el equilibrio para fuerzas en las direcciones horizontal y vertical.

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P - V_{1Yizq} - N_{1Yizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} - P - V_{1izq}(\sin\theta) - N_{1izq}(\cos\theta) = 0 \Rightarrow V_{1izq}(\sin\theta) + N_{1izq}(\cos\theta) = -\frac{P}{2} \quad (1)$$

$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - V_{1Xizq} + N_{1Xizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} - V_{1izq}(\cos\theta) + N_{1izq}(\sin\theta) = 0 \Rightarrow -V_{1izq}(\cos\theta) + N_{1izq}(\sin\theta) = -\frac{P}{2} \quad (2)$$

Al despejar  $V_{1izq}$  de forma individual en las ecuaciones (1) y (2) se tiene

$$V_{1izq} = \frac{-\frac{P}{2} - N_{1izq}(\cos\theta)}{\sin\theta} \quad (3)$$

$$V_{1izq} = \frac{\frac{P}{2} + N_{1izq}(\sin\theta)}{\cos\theta} \quad (4)$$

Al igualar las ecuaciones (3) y (4) y simplificar resulta

$$\frac{-\frac{P}{2} - N_{1izq}(\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{\frac{P}{2} + N_{1izq}(\sin\theta)}{\cos\theta} \Rightarrow -\frac{P}{2} \frac{1}{\sin\theta} - \frac{N_{1izq}(\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{P}{2} \frac{1}{\cos\theta} + \frac{N_{1izq}(\sin\theta)}{\cos\theta}$$

$$N_{1izq} \left( \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right) = -\frac{P}{2} \left( \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} \right)$$

$$N_{1izq} \left( \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \right) = -\frac{P}{2} \left( \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} \right) \Rightarrow N_{1izq}(1) = -\frac{P}{2} \left( \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} \right) (\sin\theta\cos\theta)$$

$$N_{1izq} = \frac{P}{2}(-\sin\theta - \cos\theta)$$

Al reemplazar el valor obtenido de  $N_{1izq}$  en la ecuación (4) se obtiene

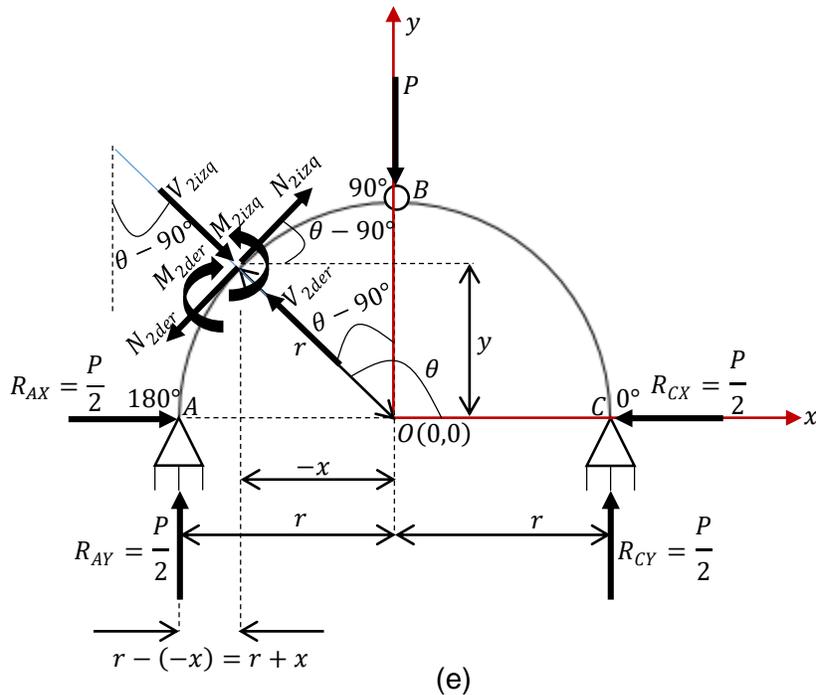
$$V_{1izq} = \frac{\frac{P}{2} + \frac{P}{2}(-\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta)}{\cos\theta} = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta} \right)$$

$$= \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\cos\theta} (1 - \sin^2\theta - \cos\theta\sin\theta) \right) = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\cos\theta} (\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta) \right) = \frac{P}{2} (\cos\theta - \sin\theta)$$

Si se quiere evitar la solución simultánea de ecuaciones, el equilibrio de fuerzas puede ser efectuado en las direcciones que coinciden con las líneas de acción de las fuerzas  $V_{1izq}$  y  $N_{1izq}$ . De ser así, reacciones  $R_{AX}$  y  $R_{AY}$  y la carga  $P$  tendrían que resolverse en sus componentes rectangulares para tales direcciones. Por otra parte, cabe mencionar que las acciones internas se pudieron haber calculado analizando la porción derecha del seccionamiento.

Parte  $A - B$ . Se secciona el arco en un punto arbitrario (intermedio en el segmento  $A - B$ ) a una distancia horizontal  $-x$  del origen  $O$ , figura 4-3e.

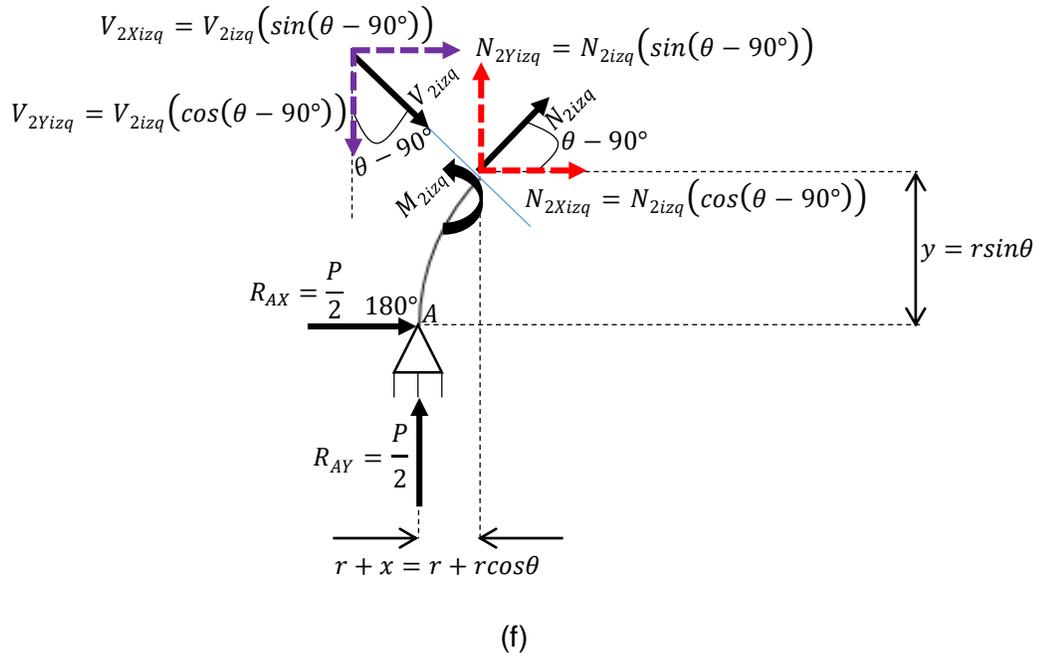
$$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$



En la figura 4-3f se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción izquierda y se aplican las ecuaciones de equilibrio en él.

$$\sum \curvearrowright M_{\text{corte}} = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}(r+x) - \frac{P}{2}(y) - M_{2izq} = 0$$

$$\frac{P}{2}(r+r\cos\theta) - \frac{P}{2}(r\sin\theta) - M_{2izq} = 0 \Rightarrow M_{2izq} = \frac{P}{2}r(\cos\theta + 1 - \sin\theta)$$



$$+\rightarrow \sum FX = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} + V_{2Xizq} + N_{2Xizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} + V_{2izq}[\sin(\theta - 90^\circ)] + N_{2izq}[\cos(\theta - 90^\circ)] = 0$$

Si se tienen las siguientes identidades trigonométricas

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Entonces,

$$\sin(\theta - 90^\circ) = \sin \theta \cos 90^\circ - \cos \theta \sin 90^\circ$$

$$\cos(\theta - 90^\circ) = \cos \theta \cos 90^\circ + \sin \theta \sin 90^\circ$$

Puesto que

$$\sin 90^\circ = 1 \quad \cos 90^\circ = 0$$

Se llega a

$$\sin(\theta - 90^\circ) = (\sin \theta)(0) - (\cos \theta)(1) = -\cos \theta$$

$$\cos(\theta - 90^\circ) = (\cos \theta)(0) + (\sin \theta)(1) = \sin \theta$$

En consecuencia,

$$\frac{P}{2} - V_{2izq}(\cos \theta) + N_{2izq}(\sin \theta) = 0 \quad \text{--- (1')}$$

$$+\uparrow \sum FY = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - V_{2Yizq} + N_{2Yizq} = 0$$

$$\frac{P}{2} - V_{2izq}[\cos(\theta - 90^\circ)] + N_{2izq}[\sin(\theta - 90^\circ)] = 0$$

$$\frac{P}{2} - V_{2izq}(\sin \theta) - N_{2izq}(\cos \theta) = 0 \quad \text{--- (2')}$$

Se resuelve el sistema simultáneo de ecuaciones (1') y (2'). El despeje de  $V_{2izq}$  en las ecuaciones mencionadas conlleva a

$$V_{2izq} = \frac{-\frac{P}{2} - N_{2izq}(\sin \theta)}{-\cos \theta} \quad \text{--- (3')}$$

$$V_{2izq} = \frac{\frac{P}{2} - N_{2izq}(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad \text{--- (4')}$$

Al igualar las ecuaciones (3') y (4') y simplificar resulta

$$\frac{-\frac{P}{2} - N_{2izq}(\sin \theta)}{-\cos \theta} = \frac{\frac{P}{2} - N_{2izq}(\cos \theta)}{\sin \theta} \Rightarrow \frac{P}{2 \cos \theta} + \frac{N_{2izq}(\sin \theta)}{\cos \theta} = \frac{P}{2 \sin \theta} - \frac{N_{2izq}(\cos \theta)}{\sin \theta}$$

$$N_{2izq} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} \right)$$

$$N_{2izq} \left( \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right) = \frac{P}{2} \left( \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right) \Rightarrow N_{2izq}(1) = -\frac{P}{2} \left( \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right) (\sin \theta \cos \theta)$$

$$N_{2izq} = \frac{P}{2} (-\sin \theta + \cos \theta)$$

Al reemplazar el valor obtenido de  $N_{2izq}$  en la ecuación (4') se obtiene

$$V_{2izq} = \frac{\frac{P}{2} - \frac{P}{2}(-\sin\theta + \cos\theta)(\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta} \right)$$

$$= \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\sin\theta} (1 - \cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta) \right) = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\sin\theta} (\sin^2\theta + \cos\theta\sin\theta) \right) = \frac{P}{2} (\cos\theta + \sin\theta)$$

A continuación, en la tabla 4-1 se muestran los resultados que se obtienen al evaluar en ciertos ángulos las funciones de las acciones internas. Luego, el lector puede graficar los resultados obtenidos y así obtener fácilmente los diagramas de fuerza cortante, fuerza normal y momento flector del arco.

| $\theta$      | $M$          | $V$        | $N$        |
|---------------|--------------|------------|------------|
| <i>grados</i> | <i>ton.m</i> | <i>ton</i> | <i>ton</i> |
| 0             | 0            | 0.5P       | -0.5P      |
| 30            | -0.18Pr      | 0.18P      | -0.69P     |
| 45            | -0.20Pr      | 0          | -0.70P     |
| 60            | -0.18Pr      | -0.18P     | -0.69P     |
| 90            | 0            | -0.5P      | -0.5P      |
| 120           | -0.18Pr      | 0.18P      | -0.69P     |
| 135           | -0.20Pr      | 0          | -0.70P     |
| 150           | -0.18Pr      | -0.18P     | -0.69P     |
| 180           | 0            | -0.5P      | -0.5P      |

**Tabla 4-1**

## BIBLIOGRAFÍA

- González, O. (2011). *Análisis estructural*. México: LIMUSA.
- Ortiz, D. (2013). Tesis: *Problemario de Análisis de Estructuras Isostáticas e Hiperestáticas para Vigas, Marcos y Armaduras*. México: UNAM.
- Hibbeler, R. (2012). *Análisis estructural*. México: PEARSON.
- Beaufait, W. F.(1977). *Análisis Estructural*. Colombia. PRENTICE/HALL.
- Villarreal, G. (2009). *Análisis Estructural*. Perú: INDEPENDIENTE.
- Magdaleno, C. (1978). *Análisis Matricial de Estructuras Reticulares*. México: INDEPENDIENTE.
- Tena, A. (2007). *Análisis de Estructuras con Métodos Matriciales*. México: LIMUSA.
- Colindres, R. (1978). *Dinámica de Suelos y Estructuras Aplicadas a la Ingeniería Sísmica*. México: LIMUSA.
- Beer, F., Johnston, E. & Elliot, R.(2007). *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Estática*. México: MCGRAWHILL.
- Villarreal, G. (2011). *Estática: Problemas Resueltos*. Perú: INDEPENDIENTE.
- Stewart, J. (2010). *Cálculo de Una Variable: Conceptos y Contextos*. México: CENGAGE LEARNING.
- Fitzgerald, R. (2011). *Resistencia de Materiales*. México: ALFAOMEGA.
- Molina, M. (2011). Tesis: *Temas Selectos de Mecánica de Materiales*. México: UNAM.

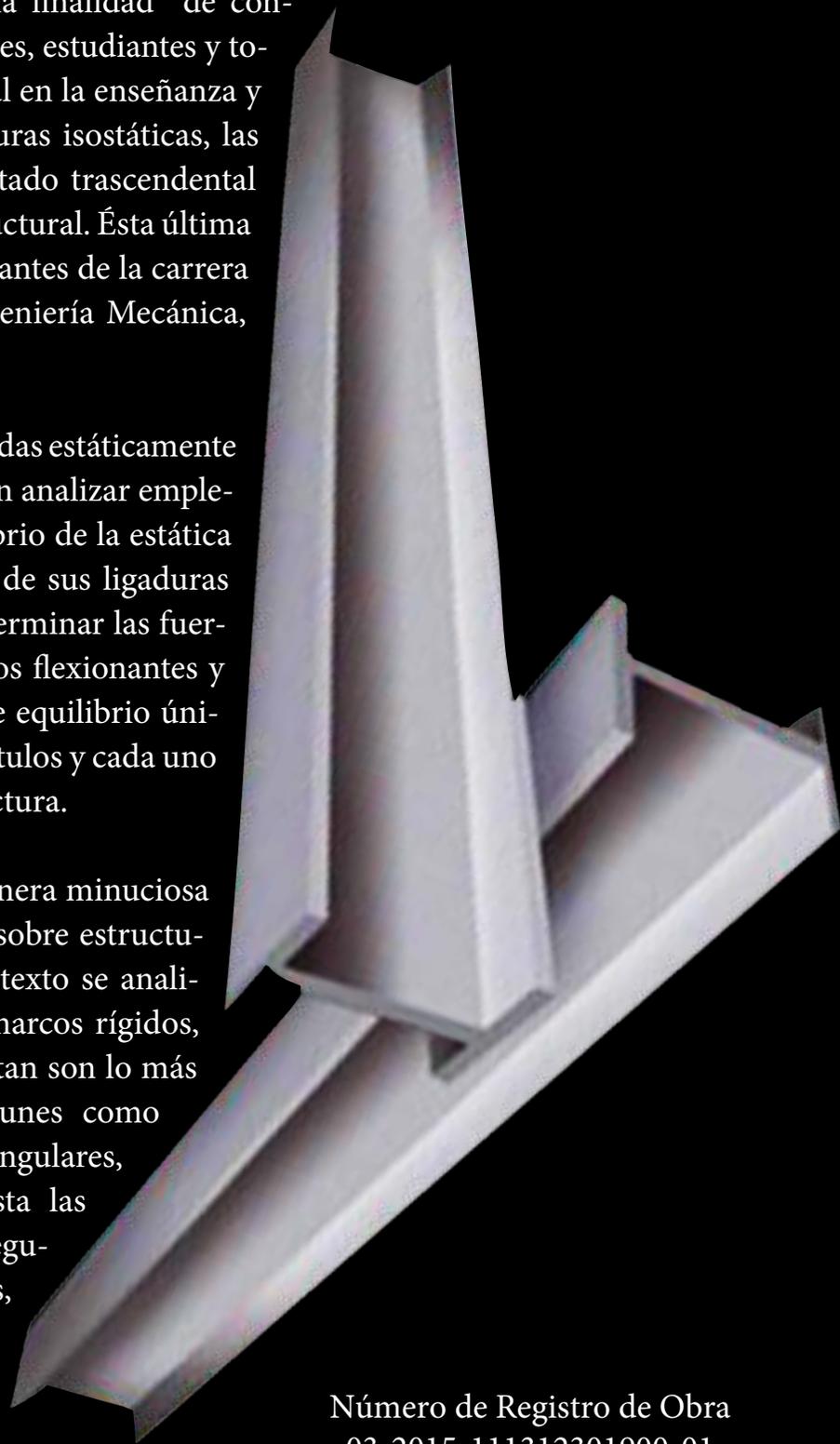
Nota: De suma importancia han sido los cursos adquiridos por algunos de los autores de Análisis Estructural impartido por el Dr. Ernesto Pineda León en el propedéutico y de Análisis Estructural impartido por el Dr. Esteban Flores Méndez en el primer semestre de la maestría, en la SEPI ESIA UZ.



**E**ste libro se ha escrito con la finalidad de contribuir en el apoyo a profesores, estudiantes y todos los interesados en general en la enseñanza y el aprendizaje de las estructuras isostáticas, las cuales en conjunto representan un apartado trascendental en la disciplina denominada análisis estructural. Ésta última constituye uno de los pilares más importantes de la carrera de Ingeniería Civil y de otras como Ingeniería Mecánica, Ingeniería Aeronáutica y Arquitectura.

Las estructuras isostáticas, también llamadas estáticamente determinadas, son aquellas que se pueden analizar empleando solamente las ecuaciones de equilibrio de la estática y en las que la supresión de cualquiera de sus ligaduras conduce al colapso, o sea, se pueden determinar las fuerzas cortantes y normales, y los momentos flexionantes y torsionantes, con base en condiciones de equilibrio únicamente. La obra se divide en cuatro capítulos y cada uno de ellos se enfoca a un solo tipo de estructura.

El énfasis de este libro es resolver, de manera minuciosa y clara, una gran variedad de ejercicios sobre estructuras isostáticas. Específicamente, en este texto se analizan cuatro tipos de estructuras: vigas, marcos rígidos, armaduras y arcos. Las cargas que se tratan son lo más variadas posibles, desde las más comunes como puntuales, uniformes distribuidas, triangulares, trapezoidales y momentos de par, hasta las más atípicas como las distribuidas irregularmente, parabólicas, trigonométricas, enjutas elípticas, polinómicas, radicales, exponenciales, entre otras.



Número de Registro de Obra  
03-2015-111312301900-01

**ESTRUCTURAS**

**ISOSTÁTICAS**

**2D**

**Problemas resueltos**

**Ortiz, D.,  
Molina, M.,  
Martínez, H.,  
et al.**