

PRÁCTICAS Y EXÁMENES RESUELTOS DE

ESTÁTICA

Ph.D. Genner Villarreal Castro

PREMIO NACIONAL ANR 2006, 2007, 2008

Lima – Perú

2016

1

Prácticas y Exámenes Resueltos de ESTÁTICA

Primera Edición Abril 2016

Tiraje: 1000 ejemplares

Diagramación: Víctor Dionicio Torres

Carátula: GOLDEN GATE – San Francisco EE.UU.

Estilo: Brenda de Jesús Crisanto Panta

Autor – Editor:

© Ph.D. Genner Villarreal Castro

www.gennervillarrealcastro.blogspot.com

Pablo Picasso 567 Urb. El Bosque

Telf: 202946 / 950907260

Trujillo – Perú

Impresión:

Editora & Imprenta Gráfica Norte S.R.L.

graficanorte@hotmail.com

Oswaldo Herculles 401 Urb. Los Granados

Telf: 402705 / 969960030

Trujillo – Perú

Abril, 2016

©Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2016-03225

ISBN: 978-612-00-2217-7

Prohibida la reproducción total o parcial sin autorización del Autor.

La Estática, ciencia de la Mecánica Teórica, estudia el equilibrio de diversos elementos o sistemas estructurales sometidos a la acción externa de cargas puntuales y distribuidas, así como de momentos.

Por lo general, el dictado del curso de Estática, se centra en la descripción teórica y en la resolución de un escaso número de problemas, lo cual dificulta el proceso de aprendizaje, más aún, tratándose de un curso eminentemente práctico, con una diversidad de cargas y estructuras.

El presente libro nació, después de comprobar las grandes dificultades mostradas por los alumnos en la resolución de problemas aplicados, en prácticas calificadas y exámenes.

Es por ello, que tomé el reto de escribir un libro que haga más didáctico el proceso de estudio individual, resolviendo en forma seria y con el rigor científico todas las prácticas calificadas y exámenes aplicados por el autor en la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de San Martín de Porres, propiciando, de esta manera, una forma más amena de convivencia con la Estática.

En el presente libro, se tratan temas que en la mayoría de programas de las universidades se analizan y que son muy importantes en la formación profesional de los ingenieros civiles.

Como base se tomó la experiencia adquirida en el dictado del curso de Estática en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego.

En mi modesta opinión, el presente libro es único en su género, tanto en la forma de resolución de problemas como en su contenido, que no es una repetición de otros textos, editados anteriormente.

El presente libro consta de 2 Prácticas Calificadas, Examen Parcial y Examen Final por cada ciclo, siendo un total de 3 ciclos.

En la Práctica Calificada N° 1 se evalúa el capítulo fuerzas y momentos.

En el Examen Parcial se evalúan los capítulos equilibrio y centroides.

En la Práctica Calificada N° 2 se evalúa el capítulo armaduras.

En el Examen Final se evalúa el capítulo diagramas de fuerzas internas.

El presente texto está dirigido a estudiantes de ingeniería civil y docentes que imparten el curso de Estática; así como, a ingenieros civiles, posgraduandos e investigadores en el área de estructuras.

Este libro se lo dedico a mis alumnos de Estática de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego; quienes con sus consultas me motivaron a escribir el presente libro y con su energía renovada me permitieron culminar con éxito este trabajo.

De manera muy especial, dedico el presente libro a mi esposa Brenda de Jesús Crisanto Panta, por su inmenso amor y apoyo constante en todos mis proyectos personales e intelectuales. Mi gratitud y amor eterno para ella, quien es mi vida entera.

Ph.D. Genner Villarreal Castro

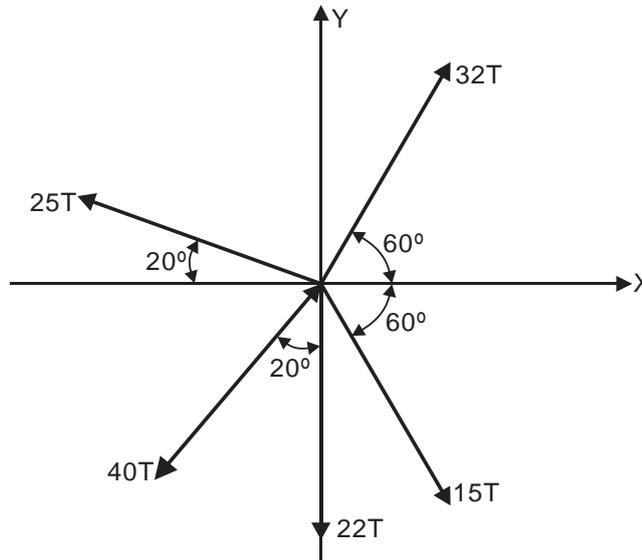
genner_vc@rambler.ru

Lima, Abril de 2016

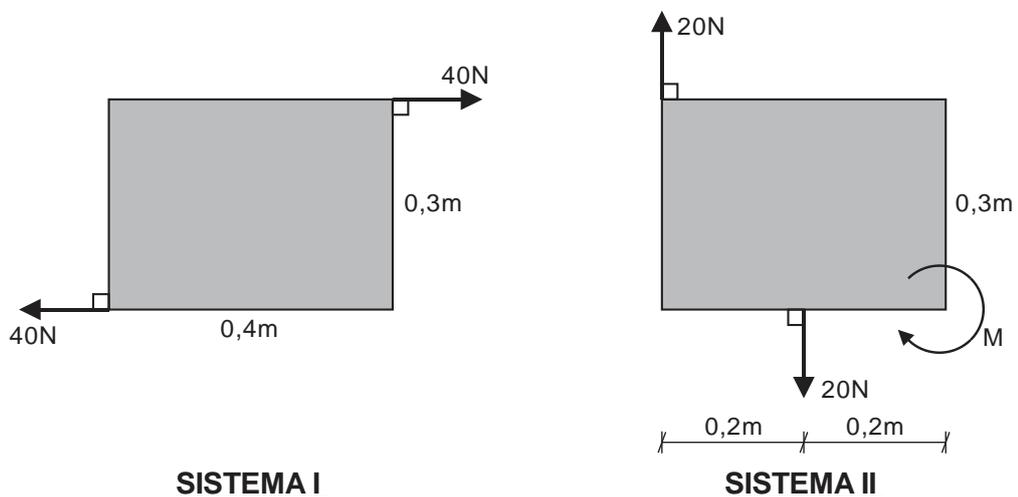


EVALUACIÓN	PRÁCTICA CALIFICADA N° 1	SEM. ACADÉMICO	2006 – I
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	100m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

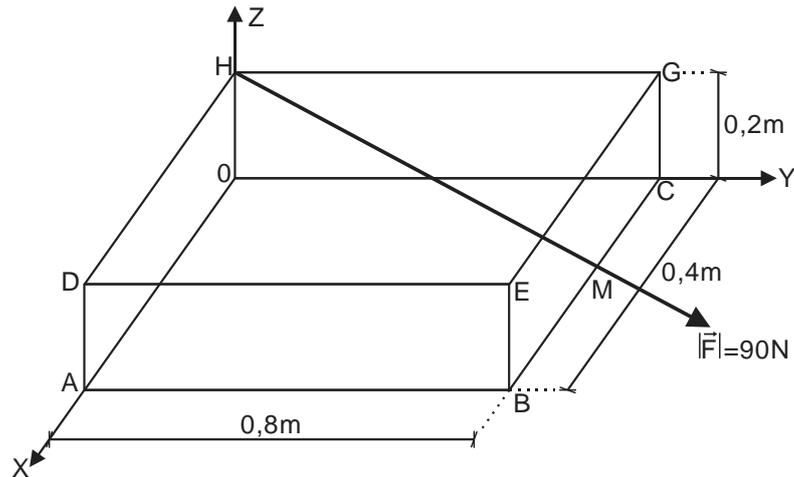
1. a) Dados los vectores $\vec{A} = -2\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = 5\vec{i} - \vec{k}$ y $\vec{C} = -3\vec{j} + 5\vec{k}$, determine:
- El ángulo formado por los vectores \vec{A} y \vec{C} (1 punto)
 - Un vector unitario en la dirección del vector BC (1 punto)
 - El módulo del vector $(2\vec{A} - 3\vec{B})$ (1 punto)
- b) Determine el valor de la resultante del sistema de fuerzas concurrentes, así como su dirección y sentido. (1 punto)



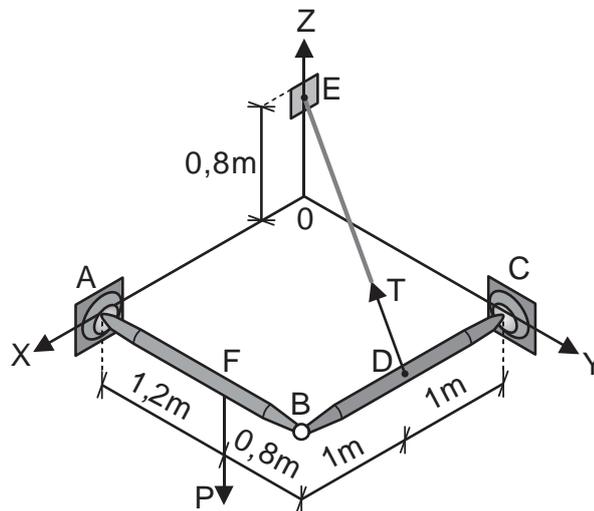
- c) Determine el módulo del momento M para que los dos sistemas mostrados sean equivalentes. (1 punto)



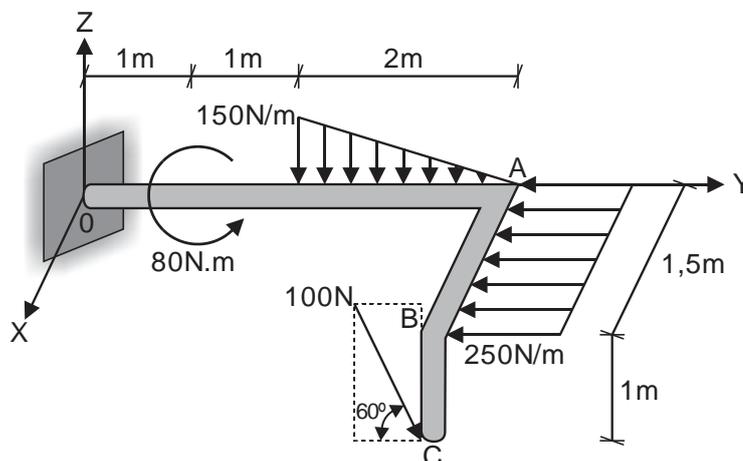
2. En la figura mostrada M es punto medio de BC, determinar \vec{F} sabiendo que OABC–DEGH es un paralelepípedo recto rectangular. (3 puntos)



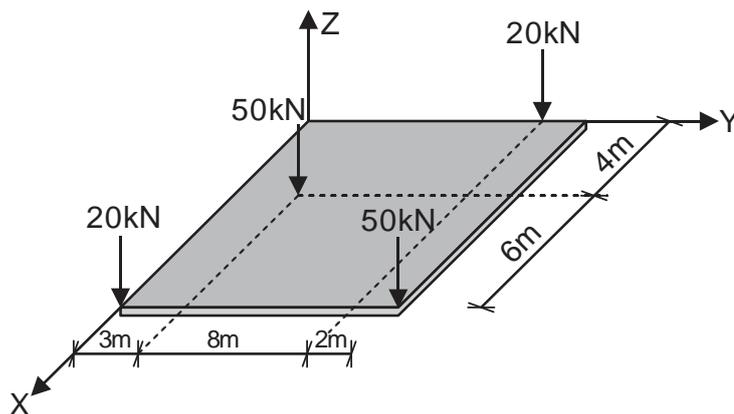
3. Si $P = 200\text{N}$ y $T = 300\text{N}$, calcular el momento combinado de \vec{P} y \vec{T} respecto al punto C. Expresar la respuesta en forma vectorial. (4 puntos)



4. Para el conjunto de fuerzas mostrado en la figura, determinar la fuerza resultante y el momento resultante respecto a los ejes coordenados X, Y, Z, sabiendo que la fuerza de 100N está en un plano paralelo al YZ, la carga distribuida triangular está contenida en el plano YZ y la carga distribuida uniforme está contenida en el plano XY (4 puntos)



5. En la figura se muestra una placa de cimentación, donde actúa el sistema de fuerzas indicado. Determine el valor de la resultante e indique su ubicación y sentido. (4 puntos)



FECHA	La Molina, 27 de Marzo del 2006
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

CICLO 2006 – I

1. a) i) Determinamos el ángulo formado entre \vec{A} y \vec{C}

$$\cos \alpha = \vec{\lambda}_A \cdot \vec{\lambda}_C = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{A \cdot C} = \frac{-2\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-7)^2 + 1^2}} \cdot \frac{-3\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2}} = \frac{21 + 5}{\sqrt{54}\sqrt{34}} = 0,6068$$

$$\alpha = \arccos 0,6068 = 52,6^\circ$$

ii) Determinamos el vector unitario en la dirección del vector BC

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \frac{(X_C - X_B)\vec{i} + (Y_C - Y_B)\vec{j} + (Z_C - Z_B)\vec{k}}{\sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2 + (Z_C - Z_B)^2}} = \frac{-5\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + 6^2}}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{-5\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{70}} = -0,598\vec{i} - 0,358\vec{j} + 0,717\vec{k}$$

iii) Calculamos el vector $(2\vec{A} - 3\vec{B})$

$$2\vec{A} - 3\vec{B} = 2\vec{A} + (-3\vec{B}) = (-4\vec{i} - 14\vec{j} + 2\vec{k}) + (-15\vec{i} + 3\vec{k}) = -19\vec{i} - 14\vec{j} + 5\vec{k}$$

Ahora, determinamos su módulo.

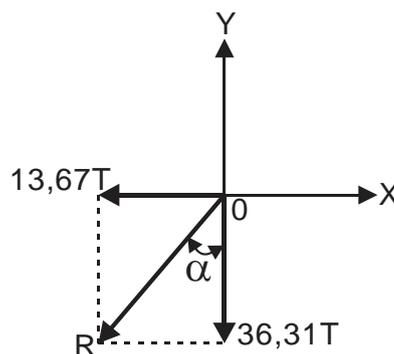
$$|2\vec{A} - 3\vec{B}| = \sqrt{(-19)^2 + (-14)^2 + 5^2} = \sqrt{582} = 24,12$$

b) Aplicamos el método escalar para su cálculo.

$$R_x = \sum_{i=1}^5 F_x = 32 \cos 60^\circ + 15 \cos 60^\circ - 25 \cos 20^\circ - 40 \sin 20^\circ = -13,67T$$

$$R_y = \sum_{i=1}^5 F_y = 32 \sin 60^\circ + 25 \sin 20^\circ - 15 \sin 60^\circ - 40 \cos 20^\circ - 22 = -36,31T$$

Los signos negativos, indica que las direcciones de las resultantes en dichos ejes van en sentido negativo, tal como se muestra en la figura.



Determinamos la resultante total y el ángulo α

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{13,67^2 + 36,31^2} = \sqrt{1505,28} = 38,8T$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{13,67}{36,31} = 0,3765 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,3765 = 20,63^\circ$$

- c) Para que un sistema sea equivalente a otro, sus fuerzas y momentos resultantes deben de ser iguales.

SISTEMA I:

$$\vec{F}_{R(1)} = 40\vec{i} - 40\vec{i} = 0$$

$$\vec{M}_{R(1)} = -40(0,3)\vec{k}$$

SISTEMA II:

$$\vec{F}_{R(2)} = 20\vec{j} - 20\vec{j} = 0$$

$$\vec{M}_{R(2)} = -20(0,2)\vec{k} - M\vec{k}$$

Como se podrá apreciar, las fuerzas resultantes son iguales, quedando pendiente la igualdad de momentos para que sean sistemas equivalentes.

Luego:

$$-40(0,3) = -20(0,2) - M \Rightarrow M = 8\text{N.m}$$

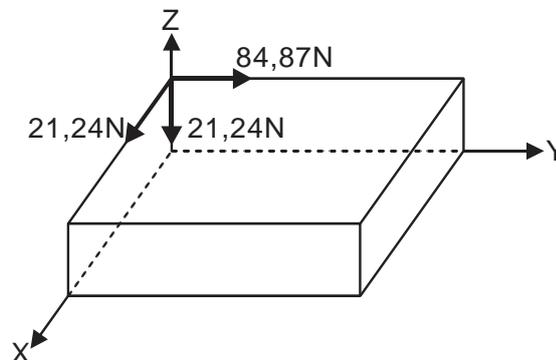
2. Calculamos el vector unitario de H a M

$$\vec{\lambda}_{HM} = \frac{HM}{|HM|} = \frac{0,2\vec{i} + 0,8\vec{j} - 0,2\vec{k}}{\sqrt{0,2^2 + 0,8^2 + (-0,2)^2}} = \frac{0,2\vec{i} + 0,8\vec{j} - 0,2\vec{k}}{\sqrt{0,72}} = 0,236\vec{i} + 0,943\vec{j} - 0,236\vec{k}$$

Luego:

$$\vec{F} = 90(0,236\vec{i} + 0,943\vec{j} - 0,236\vec{k}) = 21,24\vec{i} + 84,87\vec{j} - 21,24\vec{k}$$

Las componentes rectangulares se muestran en la siguiente figura.



3. Determinamos el momento de la fuerza \vec{P} respecto al punto C

$$\vec{P} = -200\vec{k}$$

$$\vec{r}_{CF} = 2\vec{i} - 0,8\vec{j}$$

$$\vec{M}_C^P = \vec{r}_{CF} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & -200 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -0,8 & 0 \\ 0 & -200 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -200 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -0,8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 160\vec{i} + 400\vec{j}$$

En forma análoga determinamos el momento de la tensión \vec{T} respecto al punto C

$$\vec{T} = 300 \cdot \frac{DE}{|DE|} = 300 \cdot \frac{-\vec{i} - 2\vec{j} + 0,8\vec{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0,8^2}} = 300 \cdot \frac{-\vec{i} - 2\vec{j} + 0,8\vec{k}}{\sqrt{5,64}} = -126,32\vec{i} - 252,64\vec{j} + 101,06\vec{k}$$

$$\vec{r}_{CD} = \vec{i}$$

$$\vec{M}_C^T = \vec{r}_{CD} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -126,32 & -252,64 & 101,06 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -252,64 & 101,06 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -126,32 & 101,06 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -126,32 & -252,64 \end{vmatrix} = -101,06\vec{j} - 252,64\vec{k}$$

De esta manera, el momento combinado (resultante) será:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_C^P + \vec{M}_C^T = (160\vec{i} + 298,94\vec{j} - 252,64\vec{k}) \text{ N.m}$$

4. Determinamos el valor de la fuerza resultante.

$$R_x = 0$$

$$R_y = -250(1,5) + 100 \cos 60^\circ = -325 \text{ N}$$

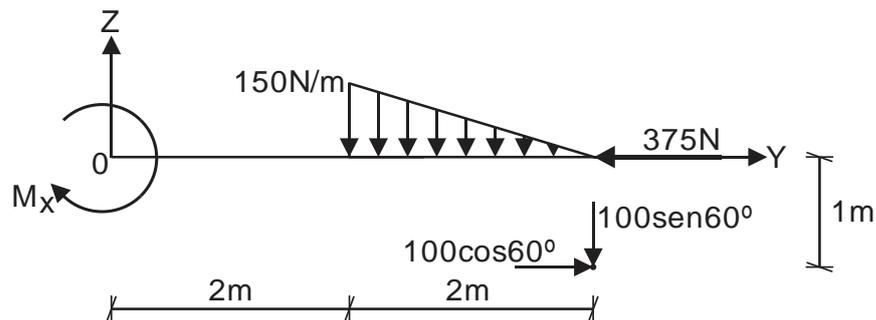
$$R_z = -\frac{1}{2}(2)(150) - 100 \sin 60^\circ = -236,6 \text{ N}$$

Luego:

$$\vec{R} = (-325\vec{j} - 236,6\vec{k}) \text{ N}$$

Para determinar los momentos respecto a los ejes coordenados lo efectuamos por la forma escalar, proyectando, para ello, las fuerzas en cada plano.

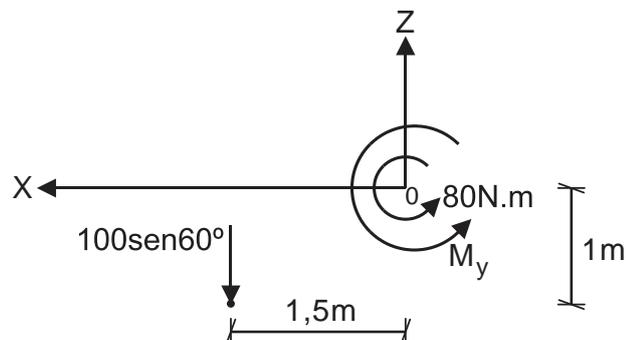
EJE X (PLANO YZ)



$$M_x = -\frac{1}{2}(2)(150) \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - 100 \sin 60^\circ (4) + 100 \cos 60^\circ (1) = -696,41 \text{ N.m}$$

El momento respecto al eje OX va en sentido horario.

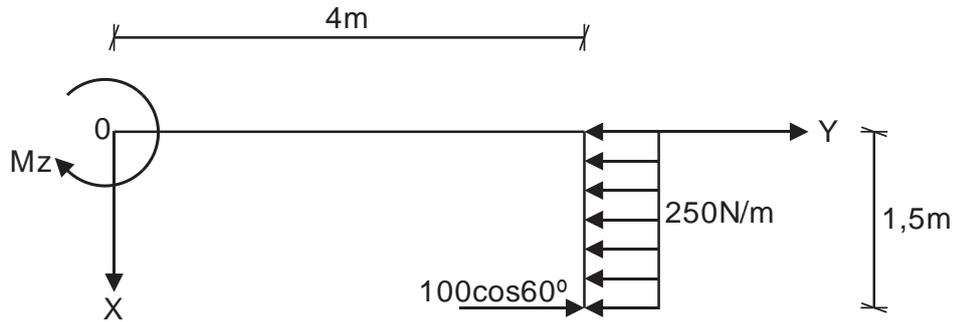
EJE Y (PLANO XZ)



$$M_Y = 100 \sin 60^\circ (1,5) + 80 = 209,90 \text{ N.m}$$

El momento respecto al eje OY va en sentido antihorario.

EJE Z (PLANO XY)



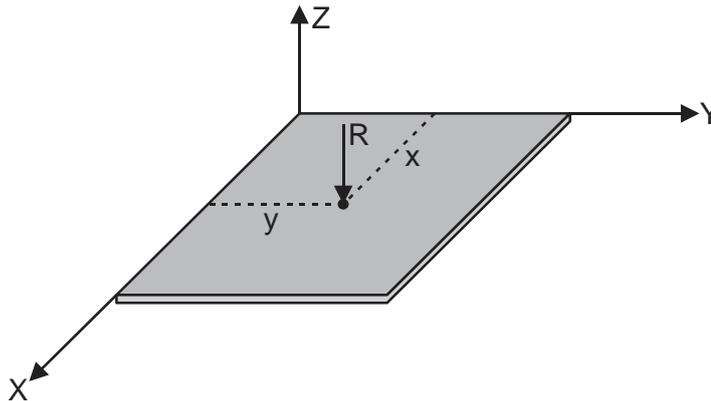
$$M_Z = 100 \cos 60^\circ (1,5) - 250(1,5)(0,75) = -206,25 \text{ N.m}$$

El momento respecto al eje OZ va en sentido horario.

5. Determinamos la resultante de la acción de todas las fuerzas.

$$R = \sum_{i=1}^4 F_Z = 20(2) + 50(2) = 140 \text{ kN} \downarrow$$

Ubicamos en forma arbitraria la resultante, tal como se muestra en la figura.



Aplicamos el Teorema de Varignon.

$$M_X^R = \sum M_X^{F_i} \Rightarrow -140y = -50(3) - 20(11) - 50(13) \quad \therefore y = 7,286 \text{ m}$$

$$M_Y^R = \sum M_Y^{F_i} \Rightarrow 140x = 50(4) + 20(10) + 50(10) \quad \therefore x = 6,428 \text{ m}$$

De esta manera, la ubicación de la resultante en coordenadas es (6,428; 7,286; 0) y su sentido vertical hacia abajo.

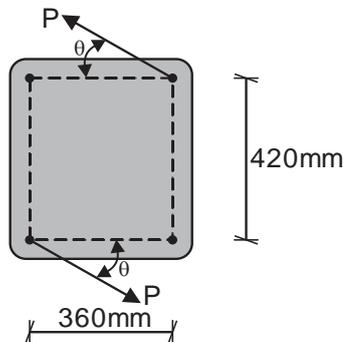
EVALUACIÓN	PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1	SEM. ACADÉMICO	2006 – II
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	100m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

1. a) Siendo $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{C} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, determine:

i) El módulo del vector $(2\vec{A} \times \vec{B})$ (1 punto)

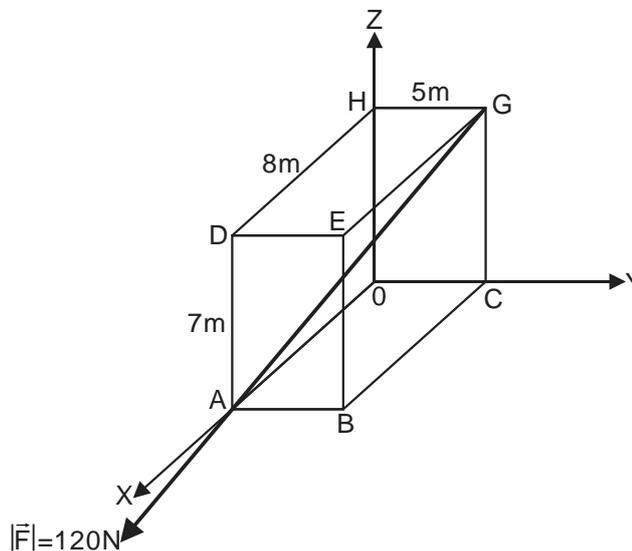
ii) El ángulo que forman los vectores \vec{B} y $(\vec{A} - \vec{C})$ (1 punto)

b) Las dos fuerzas de magnitud P son equivalentes a un par antihorario de 10N.m. Determine el valor de P, si $\sin\theta = 0,342$ (2 puntos)

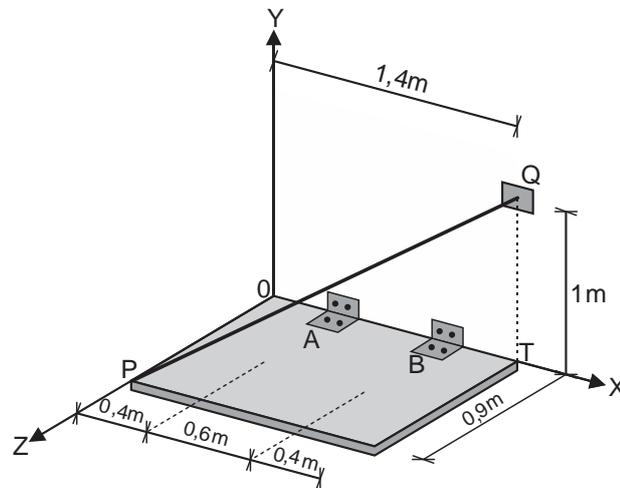


c) Si la línea acción de una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido es paralela al eje coordenado X y no interseca a los ejes Y, Z, entonces ¿será correcto afirmar que el momento de dicha fuerza respecto a los ejes Y, Z son respectivamente nulos? (1 punto)

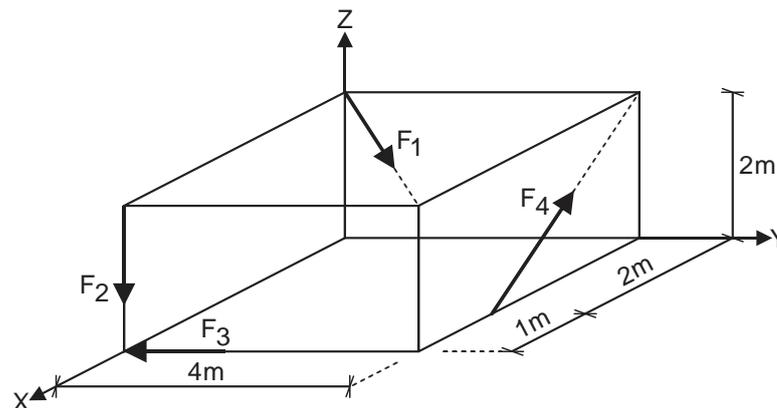
2. En la figura mostrada, determinar la representación rectangular de \vec{F} , sabiendo que OABC–DEGH es un paralelepípedo recto rectangular. (3 puntos)



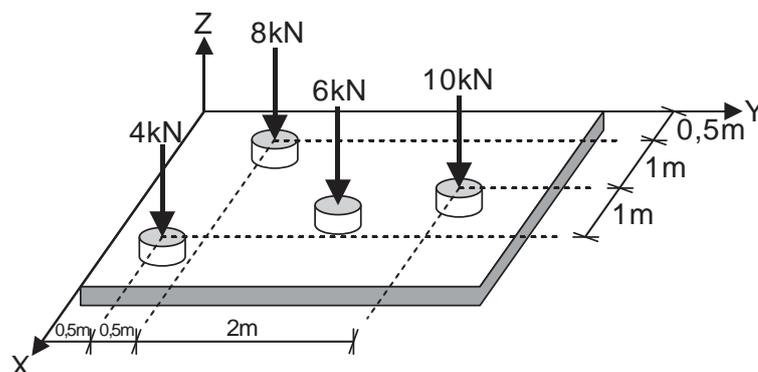
3. Una placa rectangular delgada está sostenida por el cable PQ y por los soportes de visagra en A y B. Sabiendo que el momento de la fuerza tensional del cable respecto al punto central de la visagra en B es igual a $-231,76\vec{i} + M_Y\vec{j} + M_Z\vec{k}$ (N.m). Determinar el módulo de la tensión del cable en Newton y los valores de M_Y y M_Z (4 puntos)



4. En la figura mostrada, la fuerza F_1 es paralela al plano XY y la fuerza F_4 es paralela al plano XZ. Determine los momentos resultantes respecto a cada uno de los ejes coordenados, si $F_1 = 500\text{N}$, $F_2 = 600\text{N}$, $F_3 = 300\text{N}$ y $F_4 = 200\text{N}$ (4 puntos)



5. Determinar las coordenadas de posición (x; y) que debe tener la fuerza de 6kN del sistema de fuerzas paralelas que está aplicada sobre la platea mostrada, para que la resultante de dicho sistema tenga su punto de aplicación a 2m del eje de las X, y a 1,5m del eje de las Y (4 puntos)



FECHA	La Molina, 28 de Agosto del 2006
-------	----------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

CICLO 2006 – II

1. a) i) Se sabe que:

$$2\vec{A} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$\vec{B} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

Luego, calculamos el vector $(2\vec{A} \times \vec{B})$

$$2\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 4 & -8 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 28\vec{i} + 2\vec{j} + 22\vec{k}$$

Ahora, determinamos su módulo.

$$|2\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{28^2 + 2^2 + 22^2} = \sqrt{1272} = 35,66$$

ii) Tenemos que:

$$\vec{B} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{A} - \vec{C} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

Luego, determinamos el ángulo que forman los vectores \vec{B} y $(\vec{A} - \vec{C})$

$$\cos \theta = \frac{\vec{B} \cdot (\vec{A} - \vec{C})}{|\vec{B}| \cdot |\vec{A} - \vec{C}|} = \frac{(-\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{-1 + 3 - 1}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{33}} = 0,1741$$

$$\theta = \arctg 0,1741 = 79,97^\circ$$

b) Como:

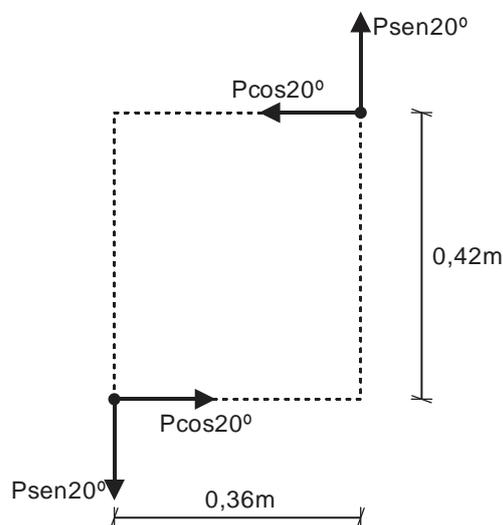
$$\text{sen} \theta = 0,342 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arcsen 0,342 = 20^\circ$$

Luego:

$$\cos \theta = \cos 20^\circ = 0,9397$$

En consecuencia, descomponemos las fuerzas, luego aplicamos cuplas o pares de fuerzas y determinamos el valor de la carga P

$$(P \text{sen} 20^\circ)(0,36) + (P \cos 20^\circ)(0,42) = 10 \quad \therefore \quad P = 19,31 \text{N}$$



c) FALSO. El momento será nulo, solo respecto al eje X, mas no respecto a los ejes Y, Z

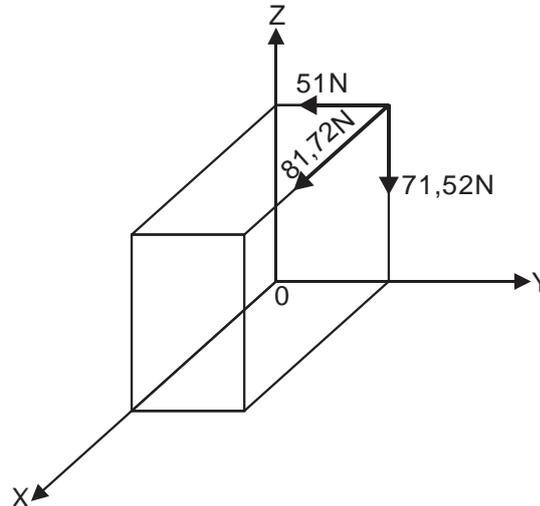
2. Calculamos el vector unitario de G hacia A

$$\vec{\lambda}_{GA} = \frac{GA}{|GA|} = \frac{8\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}}{\sqrt{8^2 + (-5)^2 + (-7)^2}} = \frac{8\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}}{\sqrt{138}} = 0,681\vec{i} - 0,425\vec{j} - 0,596\vec{k}$$

Luego:

$$\vec{F} = 120(0,681\vec{i} - 0,425\vec{j} - 0,596\vec{k}) = 81,72\vec{i} - 51\vec{j} - 71,52\vec{k}$$

Las componentes rectangulares se muestran en la siguiente figura.



3. Asumimos la tensión del cable PQ como P y lo expresamos en forma vectorial.

$$\vec{P} = P \cdot \frac{PQ}{|PQ|} = P \cdot \frac{1,4\vec{i} + \vec{j} - 0,9\vec{k}}{\sqrt{1,4^2 + 1^2 + (-0,9)^2}} = P \cdot \frac{1,4\vec{i} + \vec{j} - 0,9\vec{k}}{\sqrt{3,77}} = (0,721\vec{i} + 0,515\vec{j} - 0,463\vec{k})P$$

Para el momento respecto a B, elegimos un vector \vec{r}_{BP} que va desde B hasta P

$$\vec{r}_{BP} = -\vec{i} + 0,9\vec{k}$$

Luego:

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BP} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0,9 \\ 0,721P & 0,515P & -0,463P \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_B = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 0,9 \\ 0,515P & -0,463P \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 0,9 \\ 0,721P & -0,463P \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0,721P & 0,515P \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_B = -0,4635P\vec{i} + 0,1859P\vec{j} - 0,515P\vec{k}$$

Por dato del problema:

$$\vec{M}_B = -231,76\vec{i} + M_Y\vec{j} + M_Z\vec{k}$$

Igualemos y obtenemos:

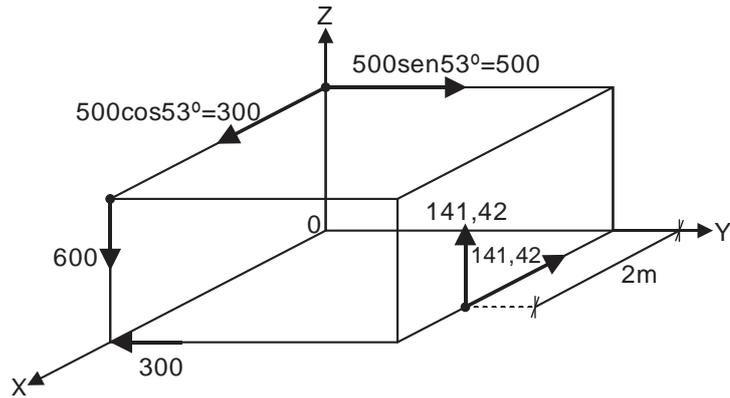
$$-0,4635P = -231,76 \quad \Rightarrow \quad P = 500N$$

De esta manera, se tendrá que:

$$M_Y = 0,1859P = 0,1859 \cdot 500 = 92,95N.m$$

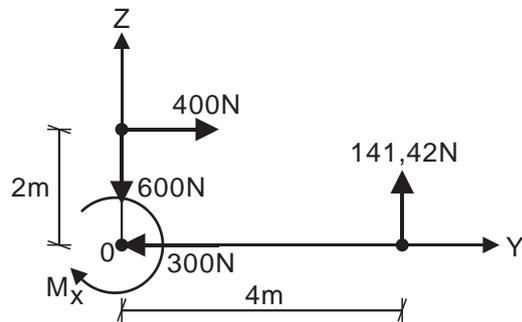
$$M_Z = -0,515P = -0,515 \cdot 500 = -257,5N.m$$

4. Descomponemos las fuerzas F_1 y F_4 , tal como se muestra en la figura.



Para determinar los momentos respecto a los ejes coordenados lo efectuamos por la forma escalar, proyectando, para ello, las fuerzas en cada plano.

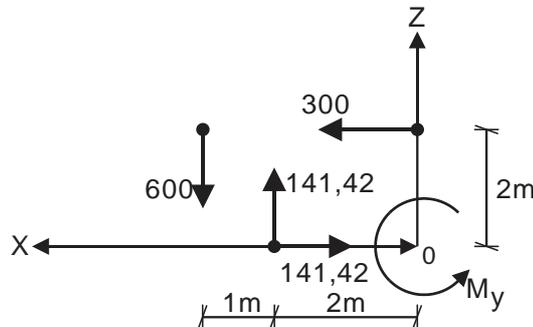
EJE X (PLANO YZ)



$$M_x = -400(2) + 141,42(4) = -234,32\text{N.m}$$

El momento respecto al eje OX va en sentido horario.

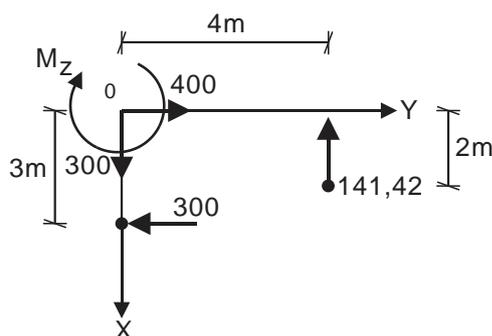
EJE Y (PLANO XZ)



$$M_y = 300(2) + 600(3) - 141,42(2) = 2117,16\text{N.m}$$

El momento respecto al eje OY va en sentido antihorario.

EJE Z (PLANO XY)



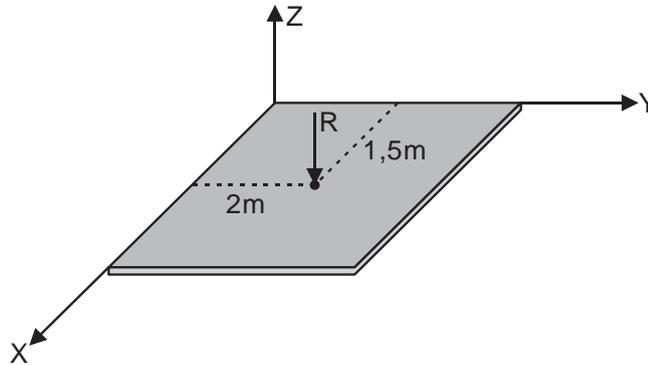
$$M_Z = -300(3) + 141,42(4) = -334,32\text{N.m}$$

El momento respecto al eje OZ va en sentido horario.

5. Determinamos la resultante de la acción de todas las fuerzas.

$$R = \sum_{i=1}^4 F_Z = 4 + 6 + 8 + 10 = 28\text{kN} \downarrow$$

Por dato del problema, la ubicación de la resultante es la mostrada en la figura.



Aplicamos el Teorema de Varignon.

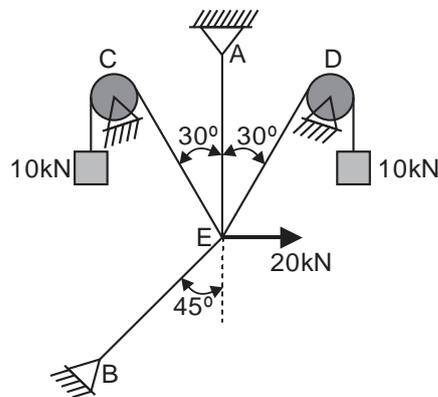
$$M_X^R = \sum M_X^{F_i} \Rightarrow -28(2) = -4(0,5) - 8(1) - 6y - 10(3) \quad \therefore y = 2,667\text{m}$$

$$M_Y^R = \sum M_Y^{F_i} \Rightarrow 28(1,5) = 8(0,5) + 10(1,5) + 4(2,5) + 6x \quad \therefore x = 2,167\text{m}$$

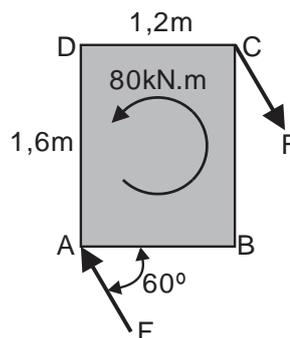
De esta manera, las coordenadas de posición de la fuerza de 6kN son (2,167; 2,667; 0) m.

EVALUACIÓN	PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1	SEM. ACADÉMICO	2007 – I
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	100m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

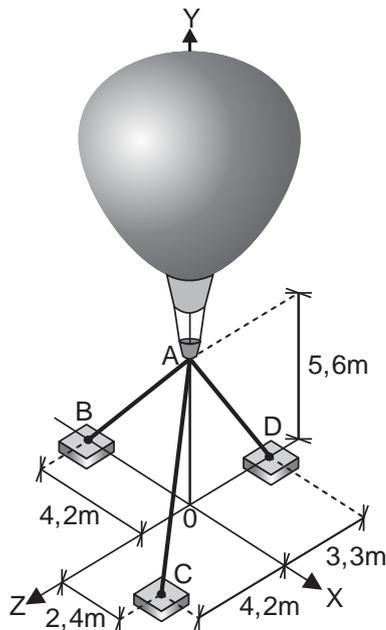
1. a) Siendo $\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = 4\vec{i} + n\vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{C} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, determine:
- El ángulo formado por los vectores \vec{A} y \vec{C} (1 punto)
 - El valor de "n", tal que $\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = 0$ (1 punto)
- b) Determinar las fuerzas internas en los cables AE y BE, si el sistema estructural se encuentra en equilibrio. (1 punto)



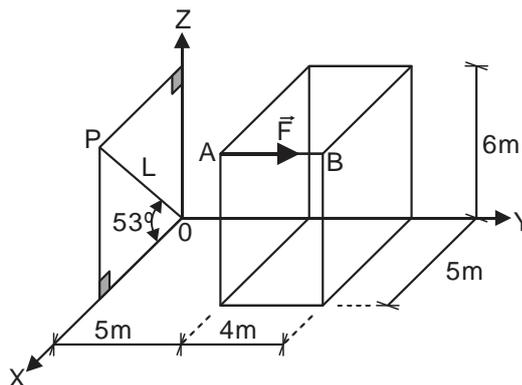
- c) Sobre la lámina delgada actúa un momento antihorario de 80 kN.m ¿Qué fuerza "F" será necesario aplicar sobre la lámina delgada para contrarrestar dicho momento de 80 kN.m, si la fuerza "F" (que genera la cupla) tiene la línea de acción y orientación indicada? (1 punto)



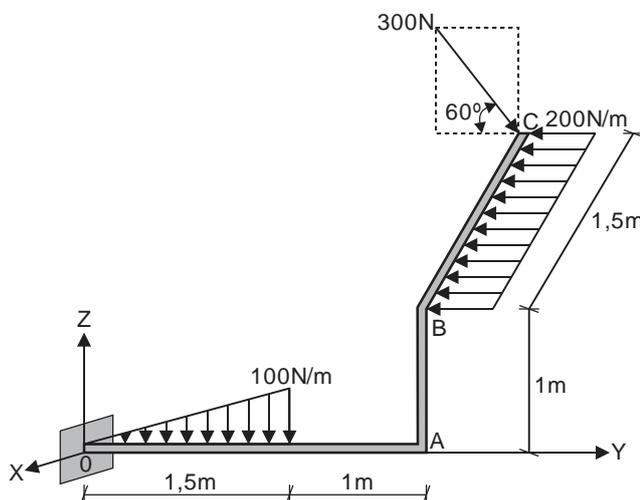
2. En la figura se muestra un globo aerostático amarrado a los cables AB, AC y AD
- Usando vectores, determine el ángulo que forman los cables AC y AD (1 punto)
 - Si la tensión en el cable AB es 259 N, determine la fuerza vertical "P" que ejerce el globo en A (3 puntos)



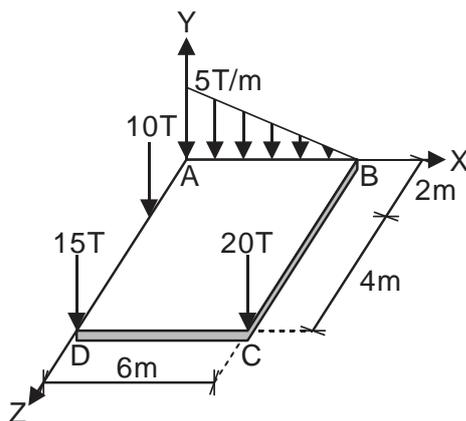
3. En la figura mostrada, se sabe que el módulo del momento que produce la fuerza \vec{F} respecto al punto P es $25\sqrt{5}\text{N}\cdot\text{m}$, donde la fuerza \vec{F} comienza en A y su módulo es $|\vec{F}| = 25\text{N}$, determine los valores de "L" (distancia OP) (4 puntos)



4. Para el conjunto de fuerzas mostrado en la figura, donde la carga distribuida triangular está contenida en el plano YZ, la carga distribuida uniforme es paralela al plano XY y la fuerza puntual de 300N es paralela al plano YZ, determine:
- La fuerza resultante. (1 punto)
 - El momento resultante respecto a cada uno de los ejes coordenados. (3 puntos)



5. En la figura se muestra una platea de cimentación de 6m x 6m, donde actúa el sistema de fuerzas indicado. Determine el valor de la resultante e indique su ubicación y sentido. (4 puntos)



FECHA	La Molina, 26 de Marzo del 2007
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1

CICLO 2007 – I

1. a) i) Determinamos el ángulo formado entre \vec{A} y \vec{C}

$$\cos \alpha = \vec{\lambda}_A \cdot \vec{\lambda}_C = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{A \cdot C} = \frac{3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \cdot 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{6 + 2 + 2}{\sqrt{11}\sqrt{12}} = 0,87$$

$$\alpha = \arccos 0,87 = 29,5^\circ$$

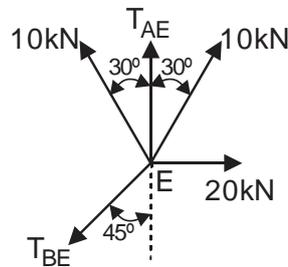
- ii) Aplicamos la fórmula del triple producto escalar.

$$\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & n & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4n - 8$$

Luego, por condición del problema:

$$4n - 8 = 0 \Rightarrow n = 2$$

- b) Efectuamos un corte en los cables, obteniendo el sistema mostrado en la figura.



Este sistema es de fuerzas concurrentes en el plano, cuyas ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 10 \sin 30^\circ + 20 - 10 \sin 30^\circ - T_{BE} \sin 45^\circ = 0$$

$$T_{BE} = 28,284 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (10 \cos 30^\circ)(2) + T_{AE} - 28,284 \cos 45^\circ = 0$$

$$T_{AE} = 2,679 \text{ kN}$$

- c) Descomponemos la fuerza "F" en sus proyecciones y por dato del problema, la sumatoria de momentos será cero, es decir:

$$80 - F \cos 60^\circ (1,6) - F \sin 60^\circ (1,2) = 0$$

$$F = 43,5 \text{ kN}$$

2. a) Calculamos los vectores unitarios.

$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{2,4\vec{i} - 5,6\vec{j} + 4,2\vec{k}}{\sqrt{2,4^2 + (-5,6)^2 + 4,2^2}} = \frac{2,4\vec{i} - 5,6\vec{j} + 4,2\vec{k}}{\sqrt{54,76}} = 0,324\vec{i} - 0,757\vec{j} + 0,567\vec{k}$$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|} = \frac{-5,6\vec{j} - 3,3\vec{k}}{\sqrt{(-5,6)^2 + (-3,3)^2}} = \frac{-5,6\vec{j} - 3,3\vec{k}}{\sqrt{42,25}} = -0,861\vec{j} - 0,508\vec{k}$$

Determinamos el ángulo formado por los cables AC y AD

$$\cos \theta = \vec{\lambda}_{AC} \cdot \vec{\lambda}_{AD} = 0,3637 \Rightarrow \theta = \arccos 0,3637 = 68,67^\circ$$

b) Determinamos las fuerzas en cada uno de los cables.

$$\vec{F}_{AB} = |\vec{F}_{AB}| \cdot \vec{\lambda}_{AB} = 259 \cdot \frac{-4,2\vec{i} - 5,6\vec{j}}{\sqrt{(-4,2)^2 + (-5,6)^2}} = -155,4\vec{i} - 207,2\vec{j}$$

$$\vec{F}_{AC} = |\vec{F}_{AC}| \cdot \vec{\lambda}_{AC} = |\vec{F}_{AC}| \cdot (0,324\vec{i} - 0,757\vec{j} + 0,567\vec{k})$$

$$\vec{F}_{AD} = |\vec{F}_{AD}| \cdot \vec{\lambda}_{AD} = |\vec{F}_{AD}| \cdot (-0,861\vec{j} - 0,508\vec{k})$$

Planteamos las ecuaciones de equilibrio del sistema de fuerzas concurrentes en el espacio.

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -155,4 + 0,324 \cdot |\vec{F}_{AC}| = 0$$

$$|\vec{F}_{AC}| = 479,63\text{N}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad 479,63 \cdot 0,567 - 0,508 \cdot |\vec{F}_{AD}| = 0$$

$$|\vec{F}_{AD}| = 535,33\text{N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P - 207,2 - 479,63 \cdot 0,757 - 535,33 \cdot 0,861 = 0$$

$$P = 1031,2\text{N}$$

3. Se sabe que:

$$\vec{M}_p = \vec{r}_{pA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (5 - L \cos 53^\circ) & 5 & (6 - L \sin 53^\circ) \\ 0 & 25 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (5 - 0,6L) & 5 & (6 - 0,8L) \\ 0 & 25 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_p = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & (6 - 0,8L) \\ 25 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} (5 - 0,6L) & (6 - 0,8L) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} (5 - 0,6L) & 5 \\ 0 & 25 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_p = -25(6 - 0,8L)\vec{i} + 25(5 - 0,6L)\vec{k}$$

Por dato del problema:

$$|\vec{M}_p| = 25\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{[-25(6 - 0,8L)]^2 + [25(5 - 0,6L)]^2} = 25\sqrt{5}$$

$$L^2 - 15,6L + 56 = 0$$

De donde:

$$L_1 = 5,6\text{m}$$

$$L_2 = 10\text{m}$$

4. a) Proyectamos las fuerzas en cada uno de los ejes coordenados, obteniendo las resultantes en dichos ejes.

$$R_x = 0$$

$$R_y = 300 \cos 60^\circ - 200 \cdot 1,5 = -150\text{N}$$

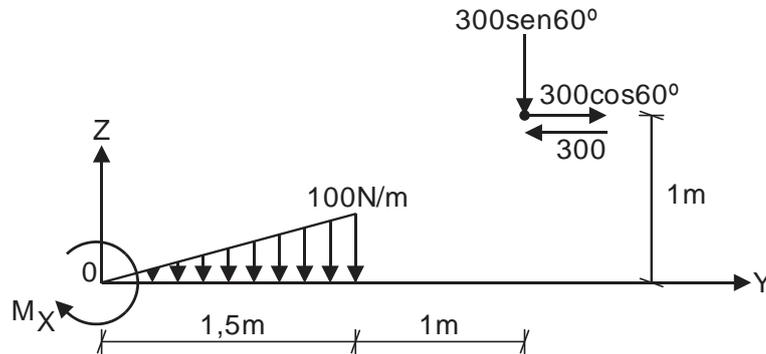
$$R_z = -\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 100 - 300 \sin 60^\circ = -334,81\text{N}$$

De esta manera, la resultante en forma vectorial es:

$$\vec{R} = -150\vec{j} - 334,81\vec{k}$$

- b) Para determinar los momentos respecto a los ejes coordenados, en este caso, es mucho más práctico usar la forma escalar, proyectando, para ello, las fuerzas en cada plano.

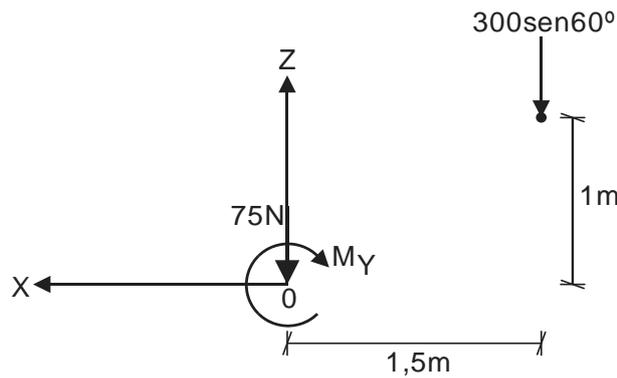
EJE X (Plano YZ)



$$M_x = -\frac{1}{2}(1,5)(100)(1) - 300\text{sen}60^\circ(2,5) - 300\cos 60^\circ(1) + 300(1) = -574,52\text{N.m}$$

El momento respecto al eje OX va en sentido horario.

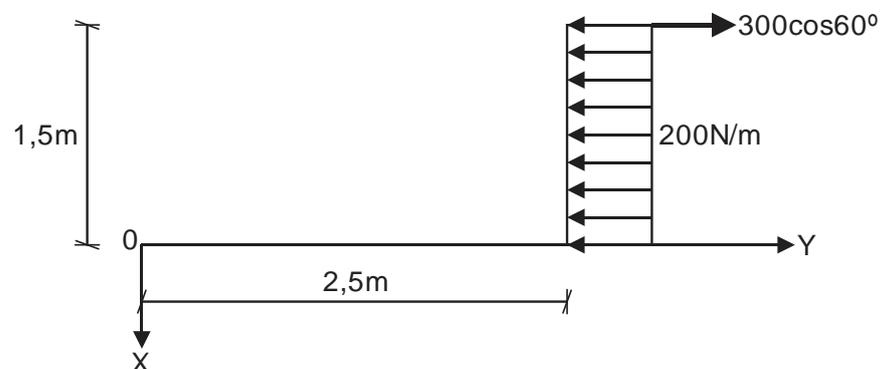
EJE Y (Plano XZ)



$$M_y = -300\text{sen}60^\circ(1,5) = -389,71\text{N.m}$$

El momento respecto al eje OY también va en sentido horario.

EJE Z (Plano XY)

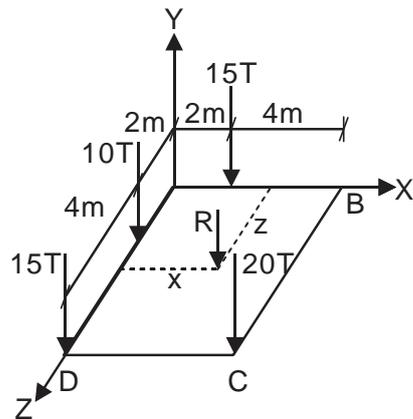


$$M_z = -300\cos 60^\circ(1,5) + 200(1,5)(0,75) = 0$$

5. Calculamos la resultante.

$$R = 15 + 10 + 20 + \frac{1}{2}(6)(5) = 60T \downarrow$$

Aplicamos el Teorema de Varignon.



$$M_Z^R = \sum M_Z^{F_i} \Rightarrow -60x = -15(2) - 20(6) \quad \therefore x = 2,5m$$

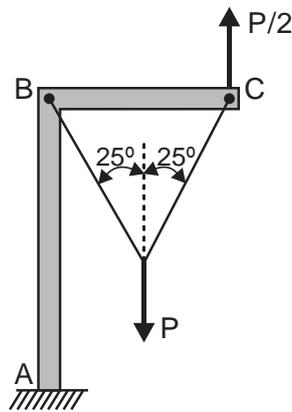
$$M_X^R = \sum M_X^{F_i} \Rightarrow 60z = 10(2) + 15(6) + 20(6) \quad \therefore z = 3,83m$$

De esta manera, la ubicación de la resultante en coordenadas es (2,5; 0; 3,83) y su sentido vertical hacia abajo.

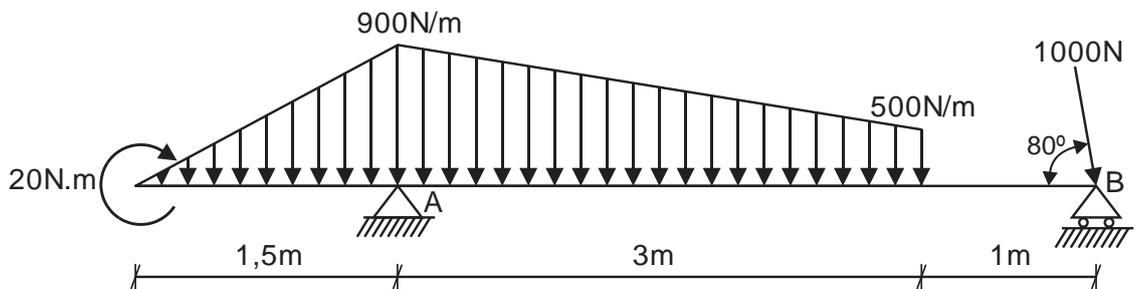
EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2006 – I
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	120m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

1. Responder las siguientes preguntas justificando su respuesta:

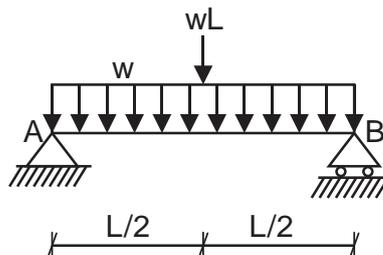
- Desde el punto de vista ingenieril, ¿qué entiende por cuerpo rígido? (0.5 puntos)
- En la estructura mostrada, ABC es una barra doblada en forma de L, cuyo peso es despreciable, ¿será correcto afirmar que el momento en el apoyo A es nulo? (0.5 puntos)



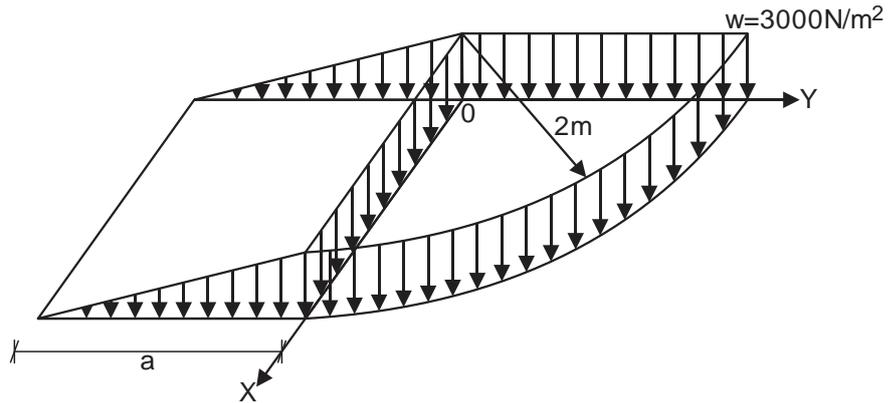
c) Dibuje el diagrama de cuerpo libre (DCL) debidamente acotado para la siguiente viga. (0.5 puntos)



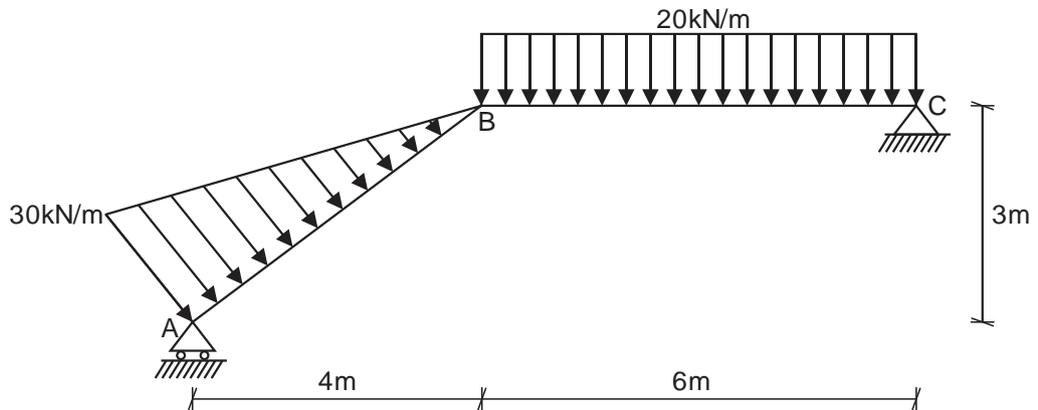
d) Para la viga simplemente apoyada, determine el valor "w" de la carga uniformemente distribuida, si la longitud de la viga es 5m y las componentes verticales de reacción en los apoyos son de 3T (0.5 puntos)



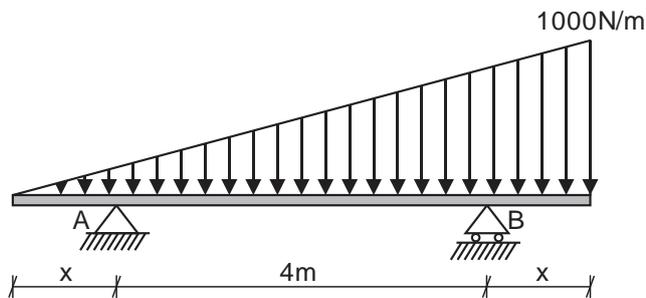
2. Determinar la dimensión "a", sabiendo que las coordenadas del centro de presión de las fuerzas distribuidas $w = 3000\text{N/m}^2$ sobre el plano XY es $(x; 0,4129)$ m. (3 puntos)



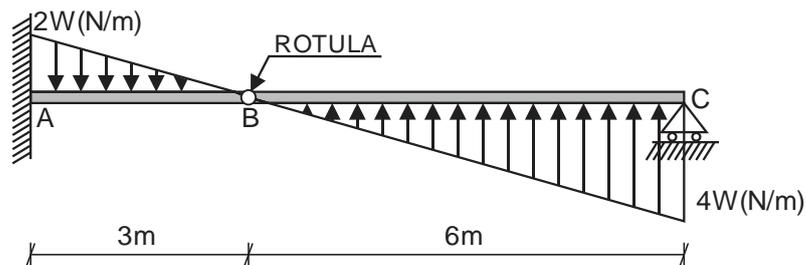
3. a) Determine las reacciones en los apoyos A y C de la siguiente estructura. (1.5 puntos)



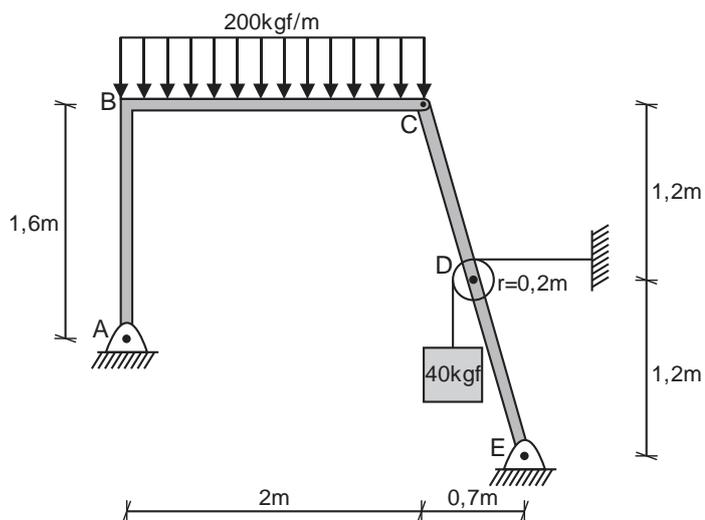
- b) En el siguiente sistema en equilibrio, la componente de reacción en el apoyo B es el triple de la componente de reacción en el apoyo A, determine la distancia "X" y las componentes de reacción en los apoyos. (1.5 puntos)



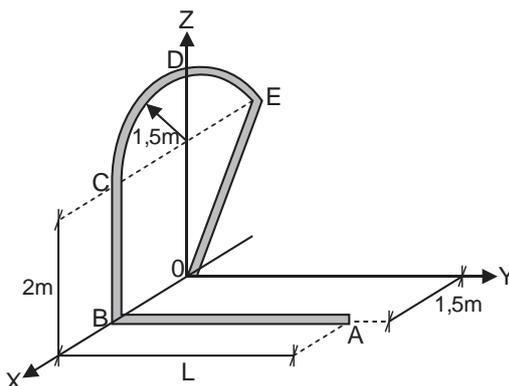
4. En la figura mostrada el momento que se produce en el apoyo A es de $900\text{N}\cdot\text{m}$ en sentido horario. Determine las reacciones en los apoyos A y C (4 puntos)



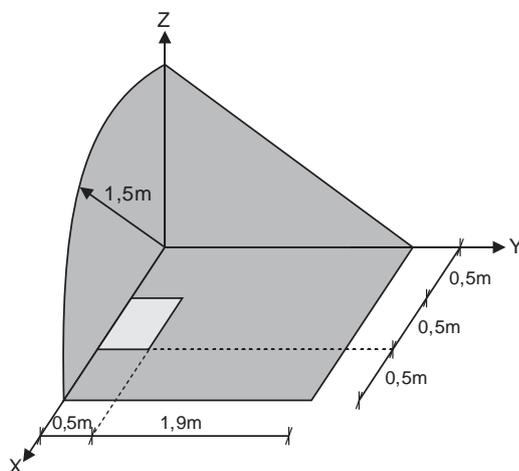
5. En el sistema mostrado en equilibrio, se tienen dos barras ABC y CE articuladas en C, cuyos pesos son de 72kgf y 50kgf respectivamente. Considerando que la polea pesa 20kgf, determine las componentes de reacción en los apoyos A y E, así como las componentes de reacción en D (4 puntos)



6. a) Determine la dimensión L, sabiendo que el alambre compuesto homogéneo delgado formado por los tramos rectos AB (paralelo al eje Y), BC (paralelo al eje Z), EO (contenido en el plano XZ) y por el tramo CDE de una semicircunferencia (contenido en el plano XZ) tiene por coordenadas del centro de gravedad (\bar{X} ; 0,368; \bar{Z}) m. (2 puntos)



- b) Determine las coordenadas del centro de gravedad de la lámina compuesta delgada, la cual está formada por una región de cuarto de círculo en el plano XZ, una región triangular en el plano YZ y otra región rectangular hueca en el plano XY (2 puntos)



FECHA	La Molina, 24 de Abril del 2006
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2006 – I

1. a) CUERPO RIGIDO. Está formado por un conjunto de partículas unidas entre sí, tales que luego de aplicarle fuerzas externas, la distancia entre dos puntos permanece constante. Tiene la posibilidad de trasladarse y rotar.
- b) Determinamos el momento en el apoyo A, asumiendo "d" como distancia entre B y C

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - P\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{P}{2}(d) = 0 \quad \therefore M_A = 0 \text{ (VERDADERO)}$$

- c) Determinamos las resultantes de las acciones de las cargas distribuidas.

CARGA TRIANGULAR:

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 900 = 675 \text{ N} \downarrow \text{ (se ubica a la distancia 0,5m del apoyo A)}$$

CARGA TRAPEZOIDAL:

$$R_2 = 500 \cdot 3 = 1500 \text{ N} \downarrow \text{ (se ubica a la distancia 1,5m del apoyo A)}$$

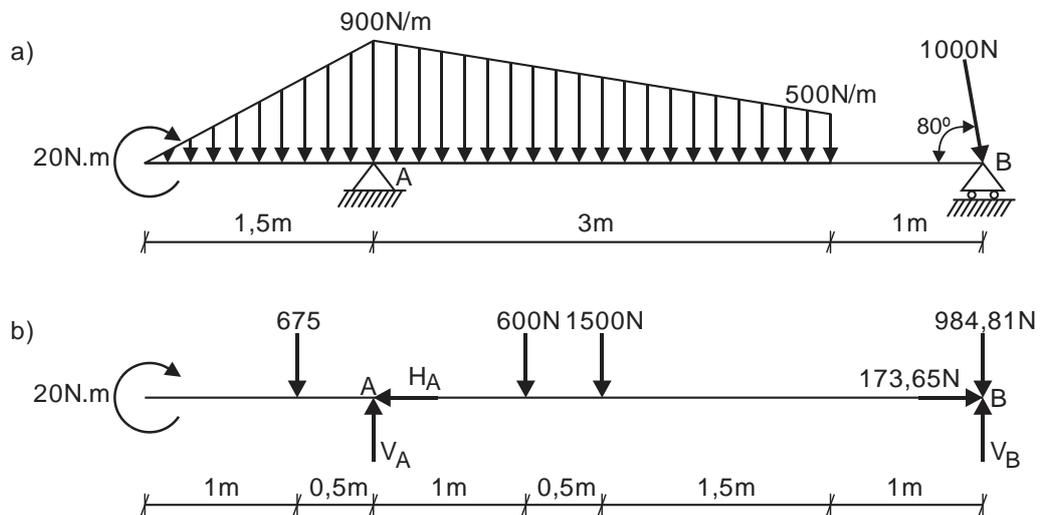
$$R_3 = \frac{1}{2} (3)(400) = 600 \text{ N} \downarrow \text{ (se ubica a la distancia 1m del apoyo A)}$$

Descomponemos la fuerza de 1000N en sus componentes horizontal y vertical.

$$F_{1X} = 1000 \cos 80^\circ = 173,65 \text{ N} \rightarrow$$

$$F_{1Y} = 1000 \sin 80^\circ = 984,81 \text{ N} \downarrow$$

Esquemizamos el DCL, mostrado en la figura b)



- d) Analizamos el equilibrio, considerando $L=5\text{m}$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 3 + 3 - w(5) - w(5) = 0 \quad \therefore w = 0,6 \text{ T/m}$$

2. Calculamos las resultantes de la acción de las cargas sobre superficie y la resultante total.

CARGA TRIANGULAR:

$$P_1 = \frac{(a)(3000)(2)}{2} = 3000a \downarrow$$

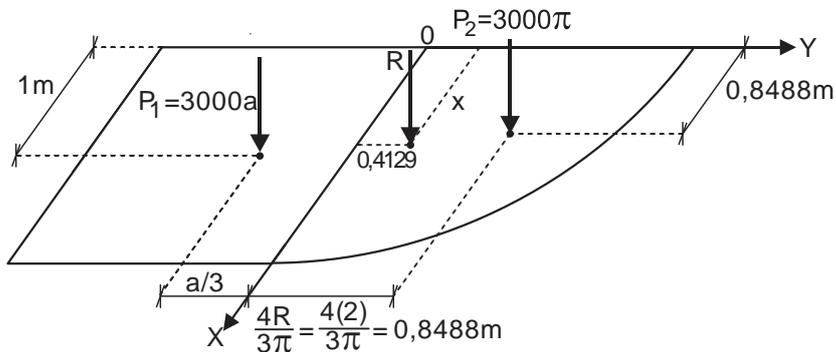
CARGA DE UN CUARTO DE CIRCUNFERENCIA:

$$P_2 = \frac{3000\pi(2)^2}{4} = 3000\pi \downarrow$$

RESULTANTE:

$$R = 3000a + 3000\pi = 3000(a + \pi) \downarrow$$

Esquematisamos las cargas sobre la platea, tal como se muestra en la figura.



Luego:

$$M_X^R = \sum M_X^{F_i} \Rightarrow -3000(a + \pi)(0,4129) = 3000a\left(\frac{a}{3}\right) - 3000\pi(0,8488)$$

$$a^2 + 1,2387a - 4,1082 = 0$$

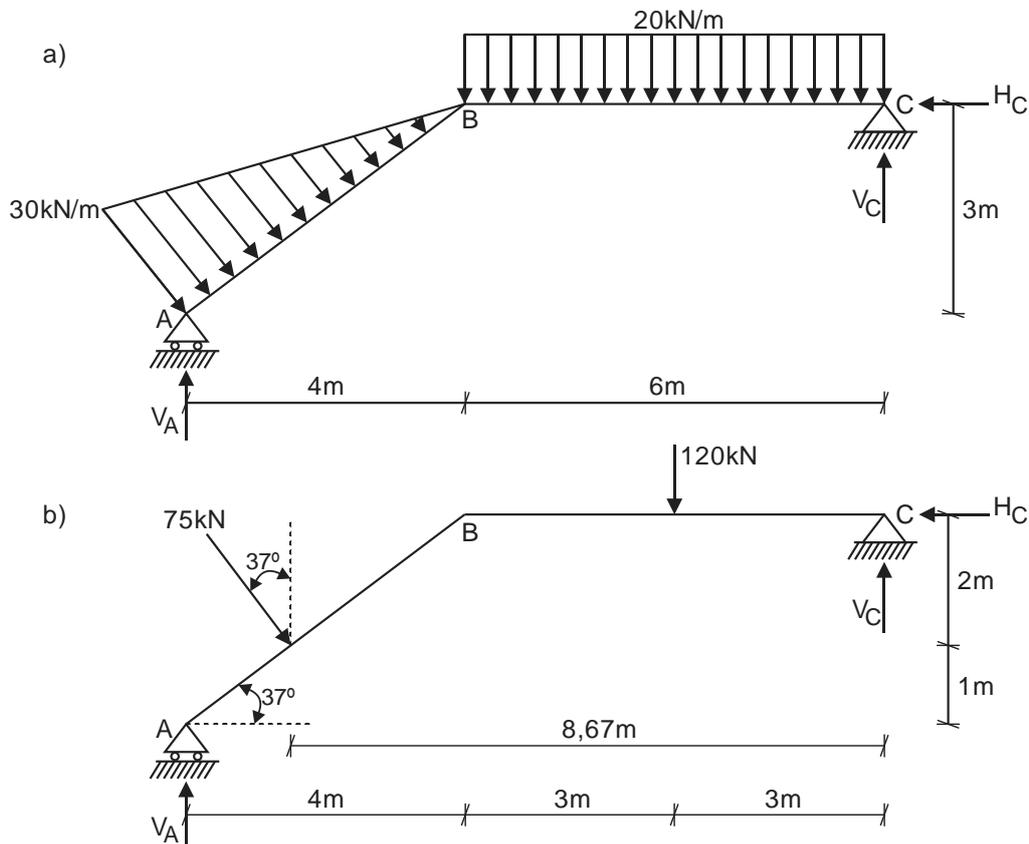
$$a = 1,5m$$

Determinamos el valor de "x":

$$M_Y^R = \sum M_Y^{F_i} \Rightarrow 3000(1,5 + \pi)(x) = 3000\pi(0,8488) + 3000(1,5)(1)$$

$$x = 0,9m$$

3. a) Esquematisamos la estructura con sus reacciones (figura a) y la misma estructura con las resultantes de la acción de las cargas distribuidas (figura b)



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -V_A(10) + 120(3) + 75 \cos 37^\circ (8,67) + 75 \sin 37^\circ (2) = 0$$

$$V_A = 97 \text{ kN } \uparrow$$

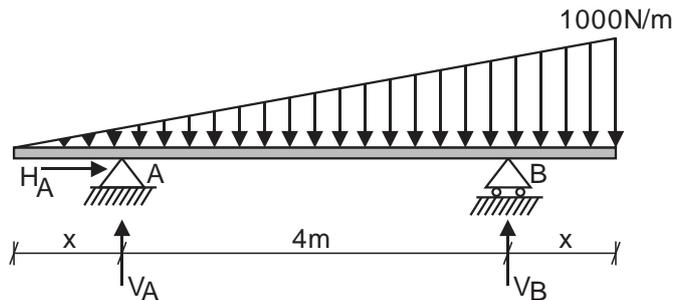
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 97 + V_C - 120 - 75 \cos 37^\circ = 0$$

$$V_C = 83 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 75 \sin 37^\circ - H_C = 0$$

$$H_C = 45 \text{ kN } \leftarrow$$

b) Esquematizamos la viga con sus reacciones y analizamos su equilibrio.



$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - \frac{1}{2}(4 + 2X)(1000) = 0$$

$$V_A + 3V_A = 2000 + 1000X$$

$$V_A = 500 + 250X$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(4 + 2X)(1000) \left(\frac{4 + 2X}{3} - X \right) - (500 + 250X)(4) = 0$$

$$X^2 + X - 2 = 0$$

Al resolver, se tienen 2 soluciones, siendo una positiva (correcta) y la otra negativa (incorrecta).

Luego:

$$X = 1 \text{ m}$$

En consecuencia:

$$V_A = 500 + 250(1) = 750 \text{ N } \uparrow$$

$$V_B = 3V_A = 3(750) = 2250 \text{ N } \uparrow$$

4. Analizamos el equilibrio en el tramo BC

$$\sum M_B^{\text{der}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(6)(4W)(4) - V_C(6) = 0 \quad \therefore \quad V_C = 8W \downarrow$$

Ahora, analizamos toda la viga.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -900 - \frac{1}{2}(3)(2W)(1) + \frac{1}{2}(6)(4W)(7) - 8W(9) = 0$$

$$W = 100 \text{ N/m}$$

Luego:

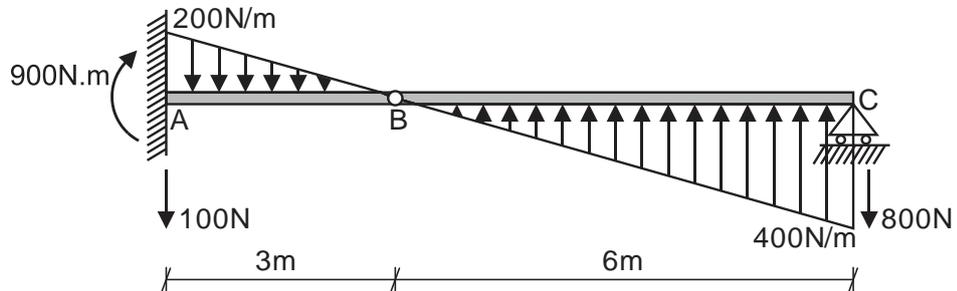
$$V_C = 800 \text{ N } \downarrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_A - 800 - \frac{1}{2}(3)(200) + \frac{1}{2}(6)(400) = 0$$

$$V_A = 100N \downarrow$$

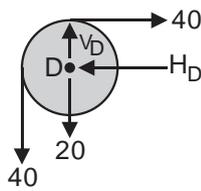
Esquemizamos las reacciones de la viga, tal como se muestra en la figura.



5. Calculamos las reacciones en el centro D de la polea.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_D + 40 = 0 \quad \therefore H_D = 40\text{kgf} \leftarrow$$

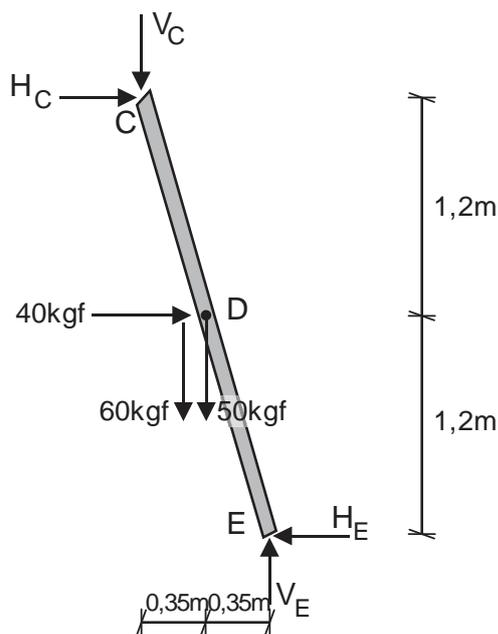
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_D - 20 - 40 = 0 \quad \therefore V_D = 60\text{kgf} \uparrow$$



Efectuamos un corte en la rótula C, analizando el equilibrio de la barra CE, utilizando el DCL de dicha barra.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 40(1,2) - 60(0,35) - 50(0,35) + V_E(0,7) - H_E(2,4) = 0$$

$$2,4H_E - 0,7V_E = 9,5 \dots\dots\dots (a)$$



Luego, analizamos el equilibrio de toda la estructura, esquematizando el DCL de la misma, calculando la resultante de la carga uniformemente distribuida, siendo la misma de 400kgf, tal como se muestra en la figura.

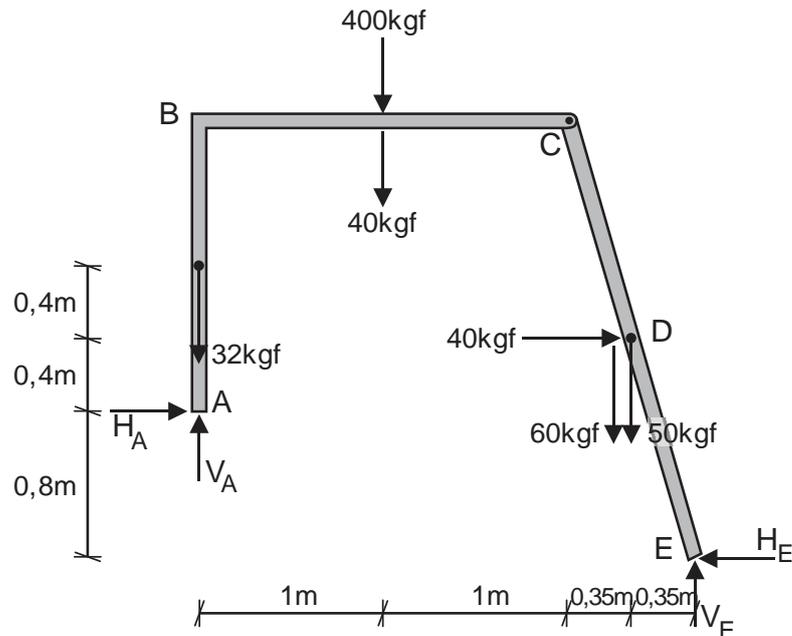
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -40(1) - 400(1) - 40(0,4) - 60(2,35) - 50(2,35) + V_E(2,7) - H_E(0,8) = 0$$

$$-0,8H_E + 2,7V_E = 714,5 \dots\dots\dots (b)$$

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$H_E = 88,82\text{kgf} \leftarrow$$

$$V_E = 290,95\text{kgf} \uparrow$$



Ahora, determinamos las reacciones en el apoyo A, efectuando un equilibrio simple de toda la estructura.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + 40 - 88,82 = 0 \quad \therefore H_A = 48,82\text{kgf} \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 32 - 400 - 40 - 60 - 50 + 290,95 = 0 \quad \therefore V_A = 291,05\text{kgf} \uparrow$$

6. a) En la siguiente tabla, se muestran las coordenadas del centro de gravedad de cada tramo.

TRAMO	L_i (m)	X_i	Y_i	Z_i
AB	L	1,5	L/2	0
BC	2	1,5	0	1
CDE	$1,5\pi$	0	0	$2+3/\pi$
EO	2,5	-0,75	0	1

Luego, determinamos el valor de L

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i Y_i}{\sum_{i=1}^4 L_i} = \frac{L\left(\frac{L}{2}\right) + 0 + 0 + 0}{L + 2 + 1,5\pi + 2,5} = \frac{0,5L^2}{L + 9,2124}$$

Por dato del problema:

$$\frac{0,5L^2}{L + 9,2124} = 0,368 \Rightarrow L^2 - 0,736L - 6,780 = 0 \quad \therefore L = 3\text{m}$$

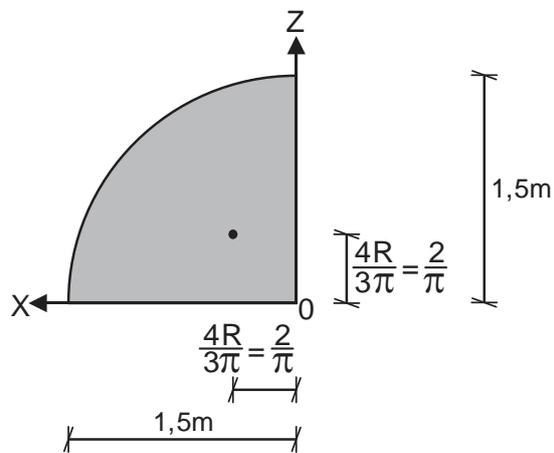
Ahora, determinamos las otras coordenadas del centro de gravedad.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i X_i}{\sum_{i=1}^4 L_i} = \frac{3(1,5) + 2(1,5) + 0 + 2,5(-0,75)}{3 + 2 + 1,5\pi + 2,5} = 0,460\text{m}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i Z_i}{\sum_{i=1}^4 L_i} = \frac{3(0) + 2(1) + 1,5\pi\left(2 + \frac{3}{\pi}\right) + 2,5(1)}{3 + 2 + 1,5\pi + 2,5} = 1,509\text{m}$$

b) Determinamos las características geométricas de las 4 figuras, incluido la parte hueca

Figura 1: Cuarto de circunferencia



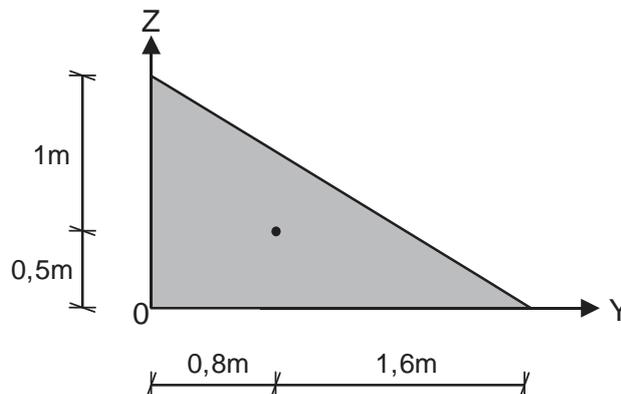
$$A_1 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi(1,5)^2}{4} = 0,5625\pi$$

$$X_1 = \frac{2}{3\pi}$$

$$Y_1 = 0$$

$$Z_1 = \frac{2}{\pi}$$

Figura 2: Triángulo



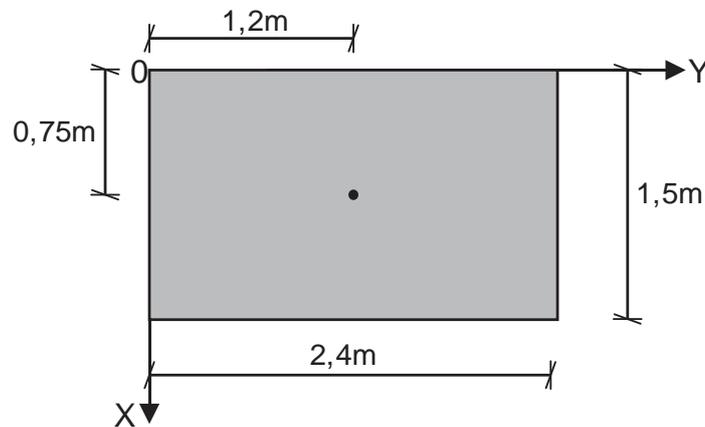
$$A_2 = \frac{1}{2}(2,4)(1,5) = 1,8$$

$$X_2 = 0$$

$$Y_2 = 0,8$$

$$Z_2 = 0,5$$

Figura 3: Rectángulo



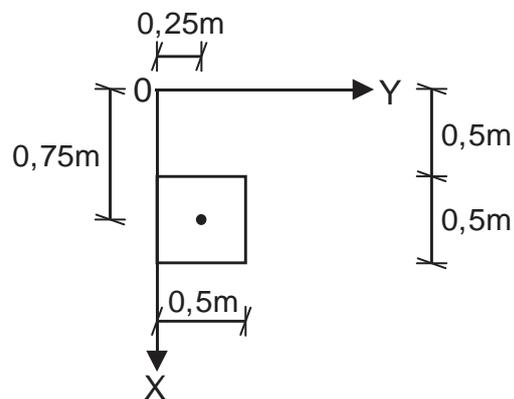
$$A_3 = 2,4 \cdot 1,5 = 3,6$$

$$X_3 = 0,75$$

$$Y_3 = 1,2$$

$$Z_3 = 0$$

Figura 4: Sección hueca



$$A_4 = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

$$X_4 = 0,75$$

$$Y_4 = 0,25$$

$$Z_4 = 0$$

En la siguiente tabla, se muestran todas las características de cada figura.

FIGURA	A_i (m ²)	\bar{X}_i	\bar{Y}_i	\bar{Z}_i	$A_i \bar{X}_i$	$A_i \bar{Y}_i$	$A_i \bar{Z}_i$
1	0,5625π	2/π	0	2/π	1,125	0	1,125
2	1,8	0	0,8	0,5	0	1,44	0,9
3	3,6	0,75	1,2	0	2,7	4,32	0
4	-0,25	0,75	0,25	0	-0,1875	-0,0625	0
Σ	6,9171	-	-	-	3,6375	5,6975	2,025

De esta manera, determinamos las coordenadas del centro de gravedad de toda la figura.

$$\bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{X}_i}{\sum A_i} = \frac{3,6375}{6,9171} = 0,5259\text{m}$$

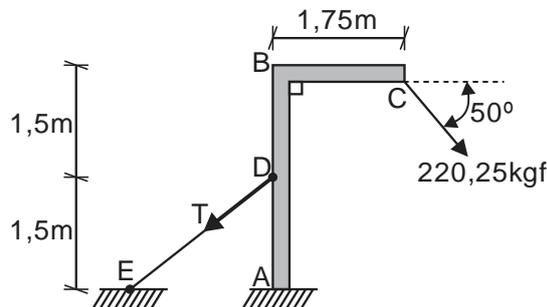
$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{Y}_i}{\sum A_i} = \frac{5,6975}{6,9171} = 0,8237\text{m}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum A_i \bar{Z}_i}{\sum A_i} = \frac{2,025}{6,9171} = 0,2927\text{m}$$

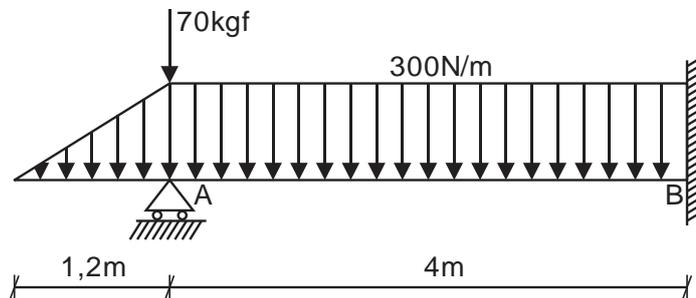
EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2006 – II
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	120m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

1. Responder las siguientes preguntas justificando su respuesta:

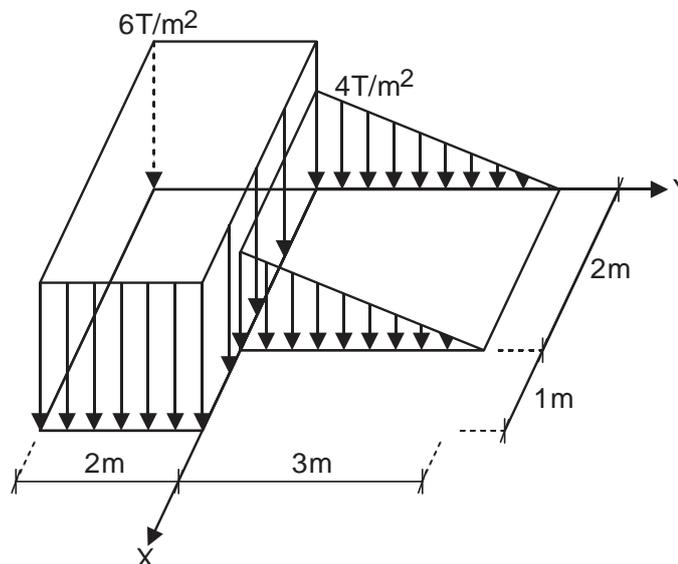
- Desde el punto de vista ingenieril, ¿qué entiende por partícula? (0.5 puntos)
- Determine el módulo de la tensión T que se ejerce en el cable DE , sabiendo que la barra doblada ABC no gira respecto al apoyo A (1 punto)



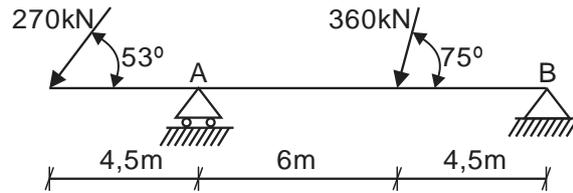
c) Dibuje el diagrama de cuerpo libre (DCL) debidamente acotado para la siguiente viga. (0.5 puntos)



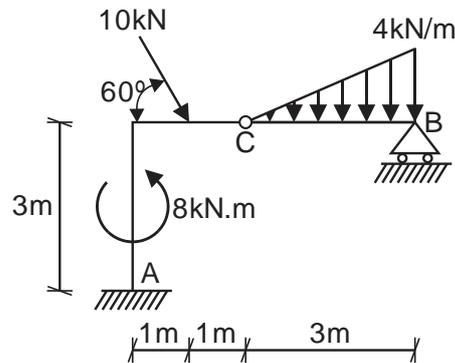
2. Determinar las coordenadas del centro de presión de las fuerzas distribuidas mostradas en la siguiente figura. (3 puntos)



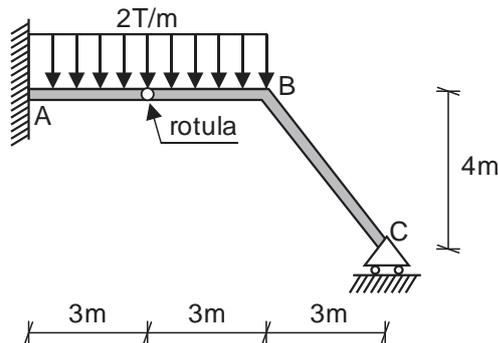
3. a) Para la viga mostrada en la figura, determine las reacciones en los apoyos A y B (1.5 puntos)



- b) Para el pórtico mostrado en la figura, determine las reacciones en los apoyos A y B, así como las fuerzas internas en la rótula C (2.5 puntos)

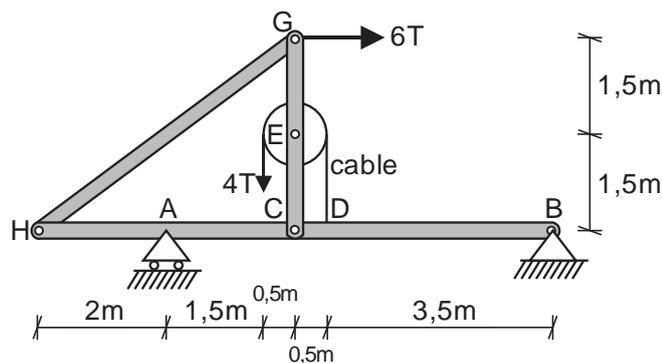


4. En la siguiente estructura, el peso de la barra ABC es $3,3T$. Determine las componentes de reacción en el empotramiento A y en el apoyo C (3 puntos)

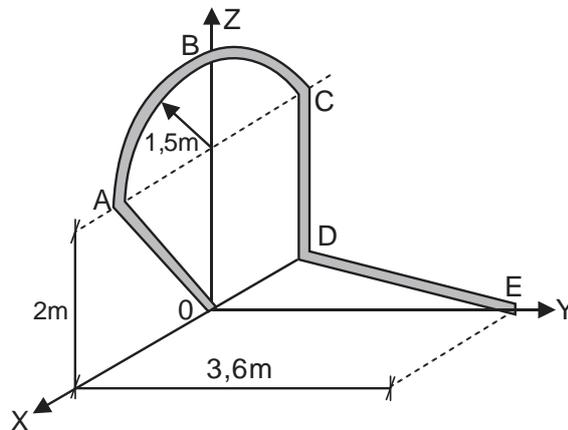


5. Para la estructura mostrada en equilibrio, donde GC es perpendicular a HB, el peso de la polea y de las barras son despreciables, se pide:

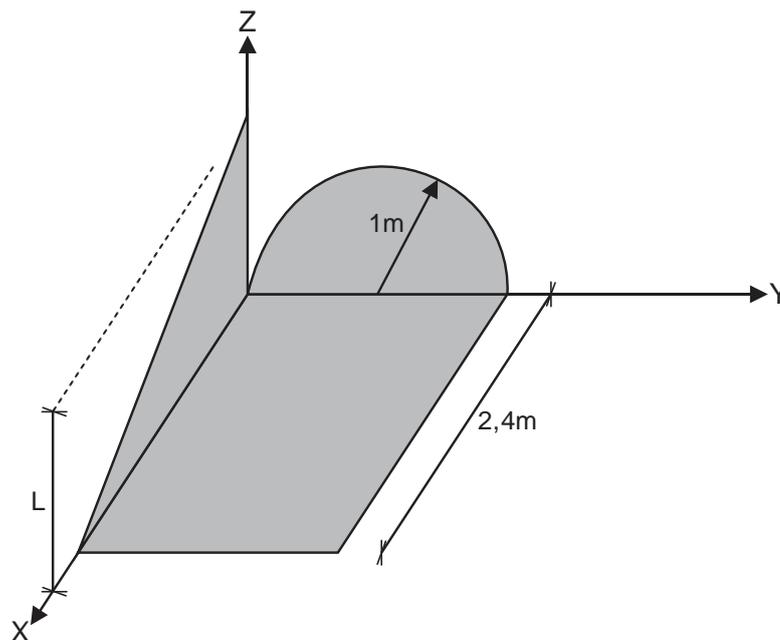
- a) Determinar las reacciones en el centro E de la polea y en los apoyos A y B (2 puntos)
 b) Dibujar el diagrama de cuerpo libre del perno G, indicando los valores de las fuerzas que actúan sobre él. (2 puntos)



6. a) Determine las coordenadas del centro de gravedad del siguiente alambre compuesto homogéneo delgado, formado por el tramo recto OA (contenido en el plano XZ), el tramo ABC de semicircunferencia (contenido en el plano XZ), el tramo recto CD (paralelo al eje Z) y DE (contenido en el plano XY) (2 puntos)



- b) Determine la longitud L, si el centro de gravedad de la lámina compuesta delgada es $(\bar{X}; \bar{Y}; 0,23)\text{m}$ y está formada por una región rectangular contenida en el plano XY, una región triangular contenida en el plano XZ y una región semicircular contenida en el plano YZ (2 puntos)

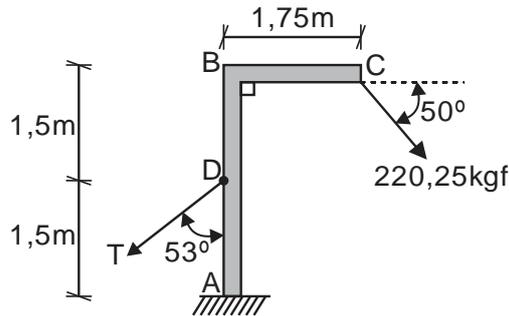


FECHA	La Molina, 25 de Setiembre del 2006
-------	-------------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2006 – II

1. a) PARTICULA. Es un punto material sin peso que tiene la posibilidad de trasladarse.
 b) Efectuamos un corte en el cable y analizamos el equilibrio de la barra doblada ABC



Por condición del problema, el apoyo A no gira, consecuentemente su momento es cero.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -220,25 \text{sen}50^\circ (1,75) - 220,25 \text{cos} 50^\circ (3) + T \text{sen}53^\circ (1,5) = 0$$

De donde:

$$T = 600 \text{kgf}$$

- c) Se sabe que 1kgf=10N, quedando el esquema original (figura a) convertido en su acción equivalente (figura b)

Luego, determinamos las resultantes de las acciones de las cargas distribuidas.

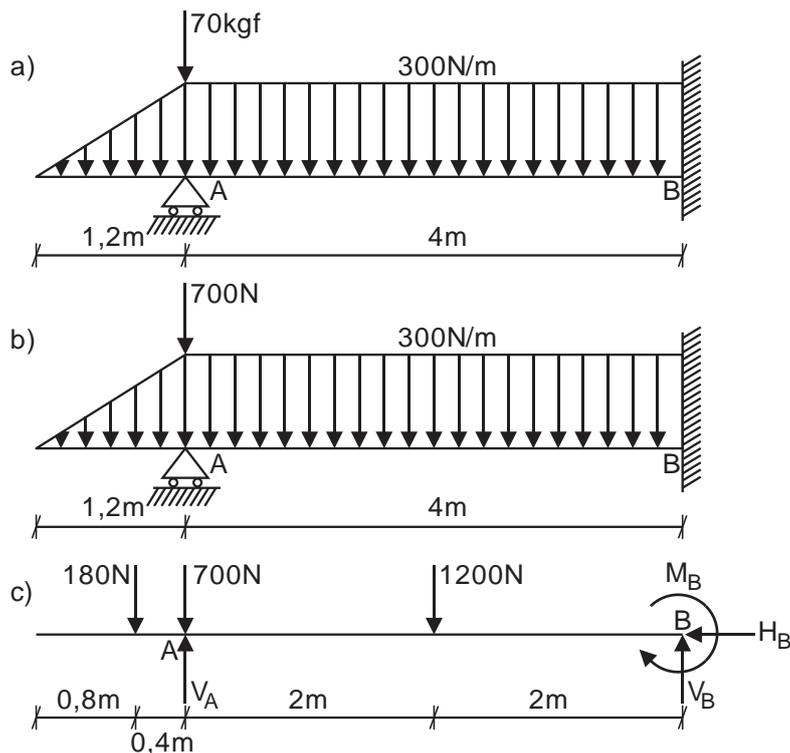
CARGA TRIANGULAR:

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 300 = 180 \text{N} \downarrow \text{ (se ubica a la distancia } 0,4\text{m del apoyo A)}$$

CARGA UNIFORME:

$$R_2 = 300 \cdot 4 = 1200 \text{N} \downarrow \text{ (se ubica a la distancia } 2\text{m del apoyo A)}$$

Esquematizamos el DCL, mostrado en la figura c)



2. Calculamos las resultantes de la acción de las cargas sobre superficie y la resultante total.

CARGA TRIANGULAR:

$$P_1 = \frac{4(3)(2)}{2} = 12T \downarrow$$

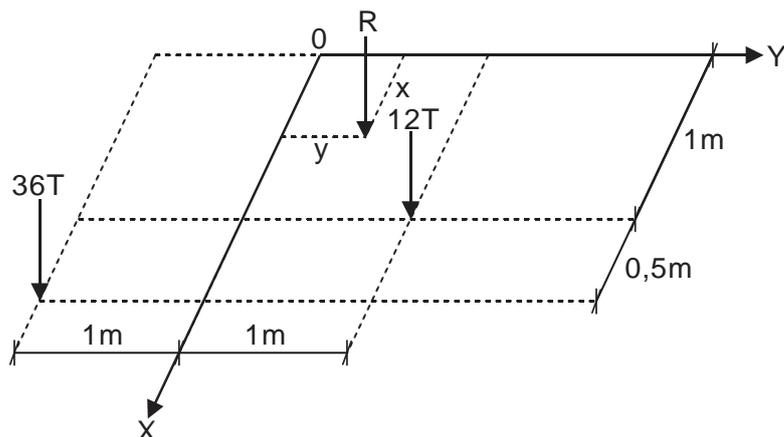
CARGA UNIFORME:

$$P_2 = 6(2)(3) = 36T \downarrow$$

RESULTANTE:

$$R = 12 + 36 = 48T \downarrow$$

Esquemizamos las cargas sobre la platea, tal como se muestra en la figura.



Luego, aplicamos el Teorema de Varignon.

$$M_X^R = \sum M_X^F \Rightarrow -48y = -12(1) + 36(1) \quad \therefore y = -0,5m$$

$$M_Y^R = \sum M_Y^F \Rightarrow 48x = 36(1,5) + 12(1) \quad \therefore x = 1,375m$$

De esta manera, las coordenadas del centro de presión son (1,375; -0,5; 0) m.

3. a) Analizamos el equilibrio de la viga y determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -270 \cos 53^\circ - 360 \cos 75^\circ + H_B = 0$$

$$H_B = 255,17kN \rightarrow$$

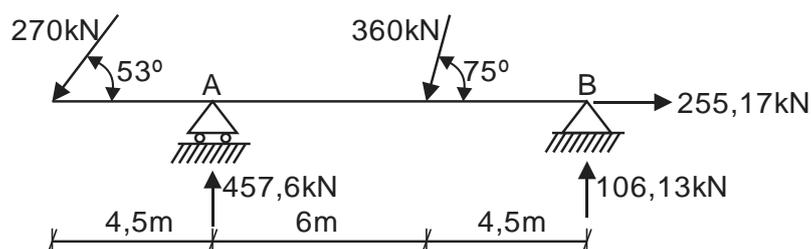
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 270 \sin 53^\circ (15) + 360 \sin 75^\circ (4,5) - V_A (10,5) = 0$$

$$V_A = 457,6kN \uparrow$$

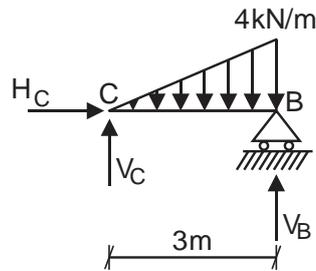
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 457,6 + V_B - 270 \sin 53^\circ - 360 \sin 75^\circ = 0$$

$$V_B = 106,13kN \uparrow$$

Con los resultados obtenidos, esquematizamos las reacciones en la viga, tal como se muestra en la siguiente figura.



b) Efectuamos un corte en la rótula C y analizamos el equilibrio en CB

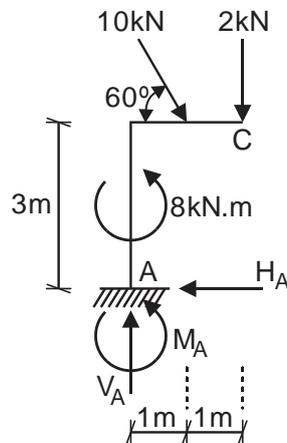


$$\sum M_C = 0 \Rightarrow V_B(3) - \frac{1}{2}(3)(4)(2) = 0 \quad \therefore V_B = 4\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_C = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_C + 4 - \frac{1}{2}(3)(4) = 0 \quad \therefore V_C = 2\text{kN} \uparrow$$

Ahora, analizamos el equilibrio del otro lado de la estructura.



$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 10\cos 60^\circ - H_A = 0 \quad \therefore H_A = 5\text{kN} \leftarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - 10\text{sen}60^\circ - 2 = 0 \quad \therefore V_A = 10,66\text{kN} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 8 - 2(2) - 10\text{sen}60^\circ(1) - 10\cos 60^\circ(3) = 0$$

$$\therefore M_A = 19,66\text{kN.m}$$

El momento M_A va en sentido antihorario.

4. Efectuamos un corte en la rótula y analizamos el tramo derecho a dicho corte, ubicando los pesos de cada tramo, sabiendo que para cada metro lineal es 0,3T

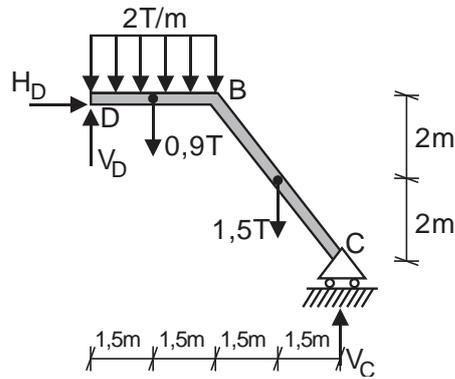
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_D = 0$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow V_C(6) - 0,9(1,5) - 1,5(4,5) - 2(3)(1,5) = 0$$

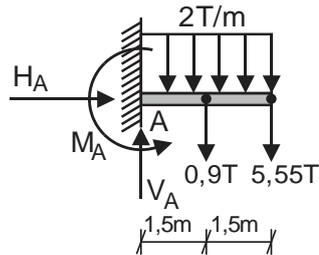
$$\therefore V_C = 2,85\text{T} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_D + 2,85 - 2(3) - 0,9 - 1,5 = 0$$

$$\therefore V_D = 5,55\text{T} \uparrow$$



Ahora, analizamos el lado izquierdo, es decir AD



$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - 0,9 - 5,55 - 2(3) = 0 \quad \therefore V_A = 12,45T \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 0,9(1,5) - 5,55(3) - 2(3)(1,5) = 0$$

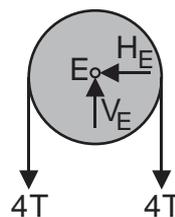
$$\therefore M_A = 27T.m$$

El momento M_A va en sentido antihorario.

5. a) Calculamos las reacciones en el centro E de la polea.

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_E = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_E - 4 - 4 = 0 \quad \therefore V_E = 8T \uparrow$$



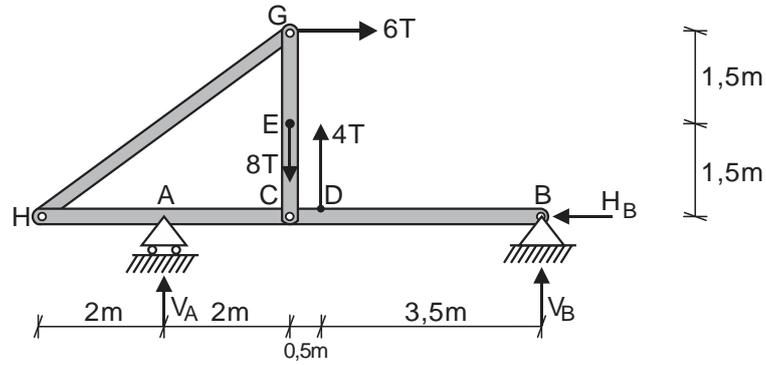
Ahora, analizamos el equilibrio de toda la estructura, esquematizando las cargas y determinando las reacciones en los apoyos A y B

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 6 - H_B = 0 \quad \therefore H_B = 6T \leftarrow$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -6(3) - V_A(6) - 4(3,5) + 8(4) = 0$$

$$\therefore V_A = 0$$

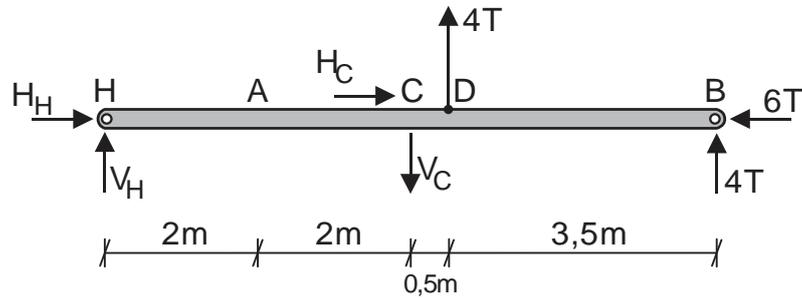
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_B + 4 - 8 = 0 \quad \therefore V_B = 4T \uparrow$$



b) Analizamos el equilibrio de la barra HB

$$\sum M_H = 0 \Rightarrow 4(8) + 4(4,5) - V_C(4) = 0 \quad \therefore V_C = 12,5T \downarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_H + 4 + 4 - 12,5 = 0 \quad \therefore V_H = 4,5T \uparrow$$

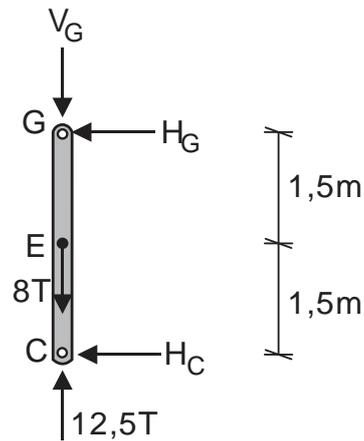


Luego, esquematizamos las cargas en la barra GC y analizamos su equilibrio.

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 12,5 - 8 - V_G = 0 \quad \therefore V_G = 4,5T \downarrow$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow H_G(3) = 0 \quad \therefore H_G = 0$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_C = 0$$



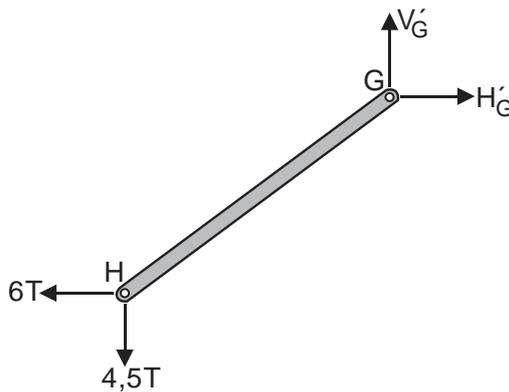
Como ya tenemos el valor de $H_C = 0$, entonces retornamos al equilibrio de la barra HB, obteniendo:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_H - 6 = 0 \quad \therefore H_H = 6T \rightarrow$$

De esta manera, analizamos el equilibrio de la barra HG

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H'_G - 6 = 0 \quad \therefore H'_G = 6T \rightarrow$$

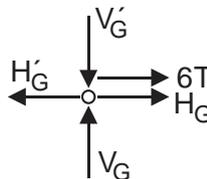
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V'_G - 4,5 = 0 \quad \therefore V'_G = 4,5T \uparrow$$



Con los valores obtenidos, dibujamos el DCL del perno G y comprobamos que existe equilibrio en dicho nudo, lo cual certifica el correcto cálculo.

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 6 + 0 - 6 = 0 \quad (\text{OK})$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 4,5 - 4,5 = 0 \quad (\text{OK})$$



6. a) En la siguiente tabla, se muestran las características geométricas de cada parte del alambre compuesto homogéneo delgado.

TRAMO	L_i (m)	\bar{X}_i	\bar{Y}_i	\bar{Z}_i
OA	2,5	0,75	0	1
ABC	$1,5\pi$	0	0	$2 + 3/\pi$
CD	2	-1,5	0	1
DE	3,9	-0,75	1,8	0

Siendo:

$$L_{OA} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5$$

$$L_{ABC} = \pi R = 1,5\pi$$

$$L_{DE} = \sqrt{1,5^2 + 3,6^2} = 3,9$$

$$\bar{Z}_{ABC} = 2 + \frac{2R}{\pi} = 2 + \frac{2(1,5)}{\pi} = 2 + \frac{3}{\pi}$$

Luego, determinamos las coordenadas del centro de gravedad.

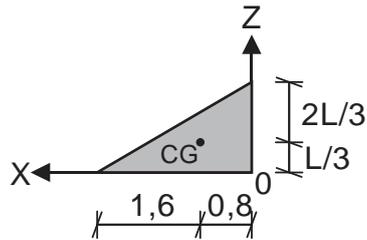
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^4 L_i} = \frac{2,5(0,75) + 1,5\pi(0) + 2(-1,5) + 3,9(-0,75)}{2,5 + 1,5\pi + 2 + 3,9} = -0,309\text{m}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i Y_i}{\sum_{i=1}^4 L_i} = \frac{2,5(0) + 1,5\pi(0) + 2(0) + 3,9(1,8)}{2,5 + 1,5\pi + 2 + 3,9} = 0,535\text{m}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i Z_i}{\sum_{i=1}^4 L_i} = \frac{2,5(1) + 1,5\pi\left(2 + \frac{3}{\pi}\right) + 2(1) + 3,9(0)}{2,5 + 1,5\pi + 2 + 3,9} = 1,405\text{m}$$

b) Determinamos las características geométricas de las 3 figuras

Figura 1: Triángulo



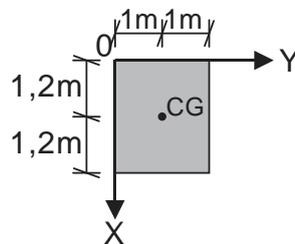
$$A_1 = \frac{1}{2}(2,4)L = 1,2L$$

$$X_1 = 0,8$$

$$Y_1 = 0$$

$$Z_1 = \frac{L}{3}$$

Figura 2: Rectángulo



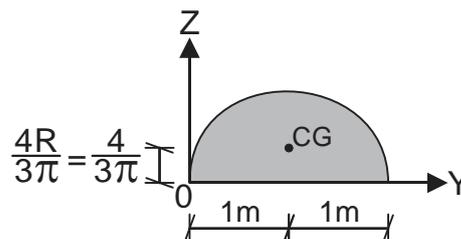
$$A_2 = 2,4 \cdot 2 = 4,8$$

$$X_2 = 1,2$$

$$Y_2 = 1$$

$$Z_2 = 0$$

Figura 3: Semicircunferencia



$$A_3 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(1)^2}{2} = 0,5\pi$$

$$X_3 = 0$$

$$Y_3 = 1$$

$$Z_3 = \frac{4}{3\pi}$$

Por dato del problema:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i Z_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{1,2L\left(\frac{L}{3}\right) + 4,8(0) + 0,5\pi\left(\frac{4}{3\pi}\right)}{1,2L + 4,8 + 0,5\pi} = 0,23 \quad \therefore \quad 0,4L^2 - 0,276L - 0,798 = 0$$

De donde:

$$L = 1,8\text{m}$$

Ahora, determinamos las otras coordenadas del centro de gravedad.

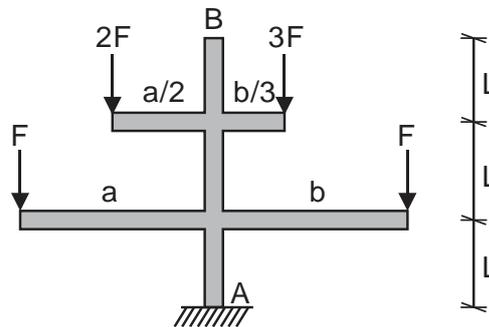
$$X = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i X_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{1,2(1,8)(0,8) + 4,8(1,2) + 0,5\pi(0)}{1,2(1,8) + 4,8 + 0,5\pi} = 0,878\text{m}$$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i Y_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{1,2(1,8)(0) + 4,8(1) + 0,5\pi(1)}{1,2(1,8) + 4,8 + 0,5\pi} = 0,747\text{m}$$

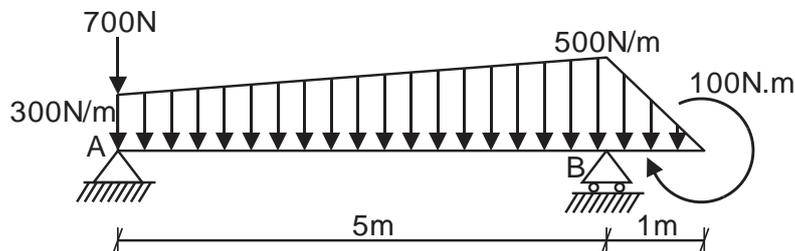
EVALUACIÓN	EXAMEN PARCIAL	SEM. ACADÉMICO	2007 – I
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	120m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

1. Responder las siguientes preguntas justificando su respuesta:

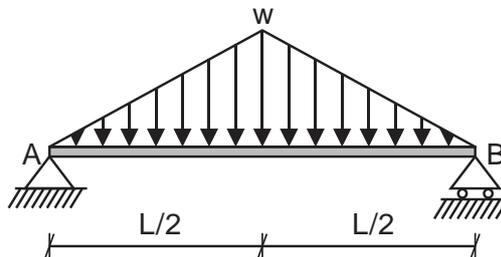
- a) ¿Será correcto afirmar que en una rótula existen dos fuerzas internas y un momento? (0.5 puntos)
 b) Determinar la relación a/b para que el momento en la base A del poste sea nulo. (0.5 puntos)



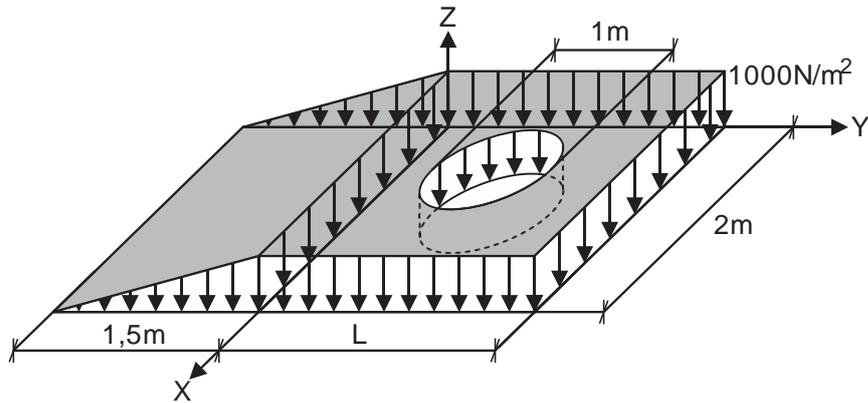
c) Dibuje el diagrama de cuerpo libre (DCL) debidamente acotado para la siguiente viga. (0.5 puntos)



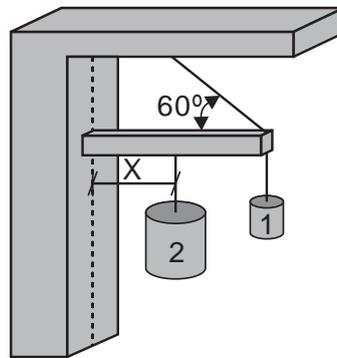
d) Para la viga simplemente apoyada AB, ¿será correcto afirmar que las componentes verticales de reacción en los apoyos A y B es $wL/4$? (0.5 puntos)



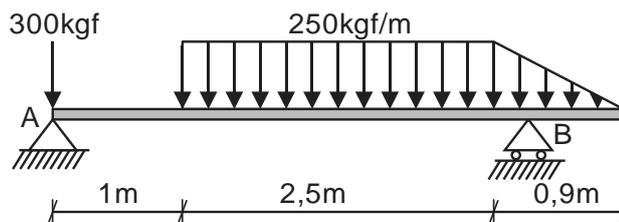
2. Sabiendo que las coordenadas del centro de presión del conjunto de fuerzas distribuidas mostrado es $(1; 1,053; 0)$ m. Determinar la longitud "L" de la platea, si el cilindro circular (hueco) de 1m de diámetro se encuentra en la parte central correspondiente a las fuerzas distribuidas uniforme sobre una superficie de la zona positiva de los ejes X, Y, Z, es decir, en el I octante. (3 puntos)



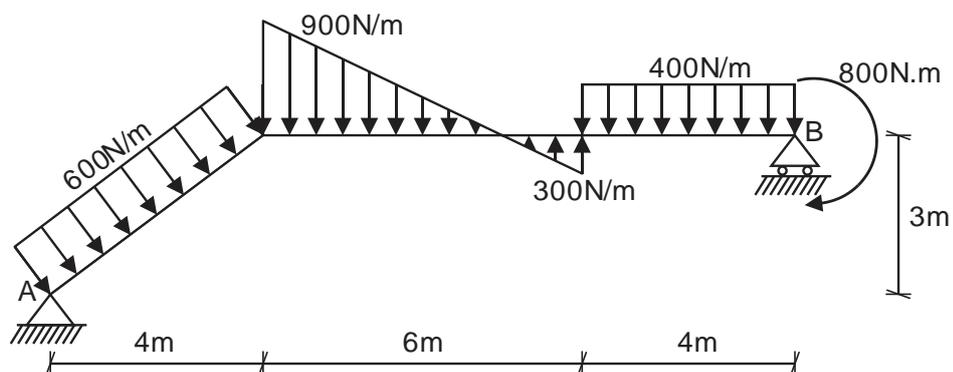
3. a) Un cuerpo de peso $P_1 = 80\text{N}$ cuelga del extremo de una barra de peso 200N y longitud 6m , unida a una pared como se muestra en la figura. Determinar la máxima distancia de la pared a la que es posible colgar un segundo cuerpo de 700N de peso sin que la cuerda se rompa, si esta es capaz de resistir una tensión máxima de 900N (1.5 puntos)



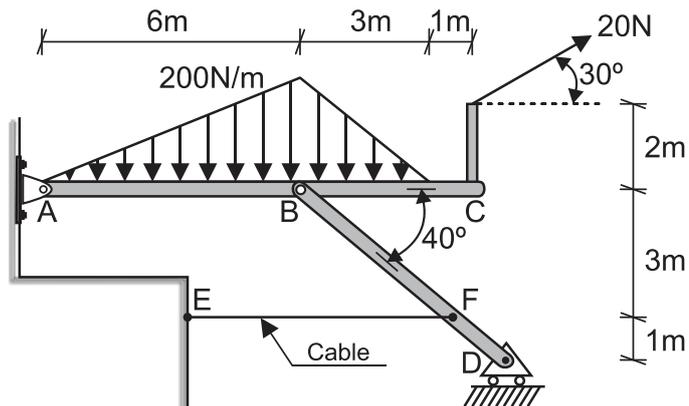
- b) Determinar el peso "w" de la viga y las componentes de reacción en el apoyo A, si la reacción en el apoyo B es $800,5\text{kgf}$ (2.5 puntos)



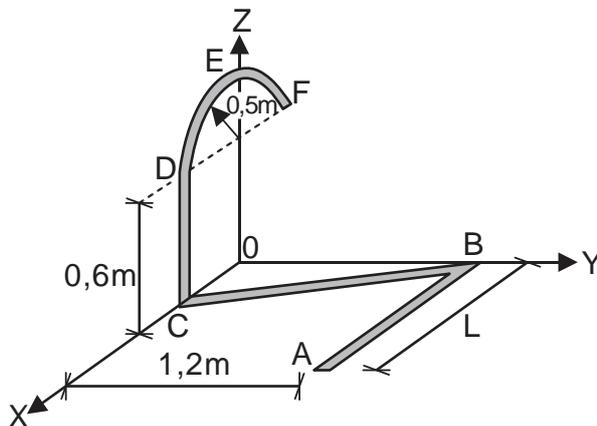
4. Determine las reacciones en los apoyos para la estructura mostrada en la figura. (3 puntos)



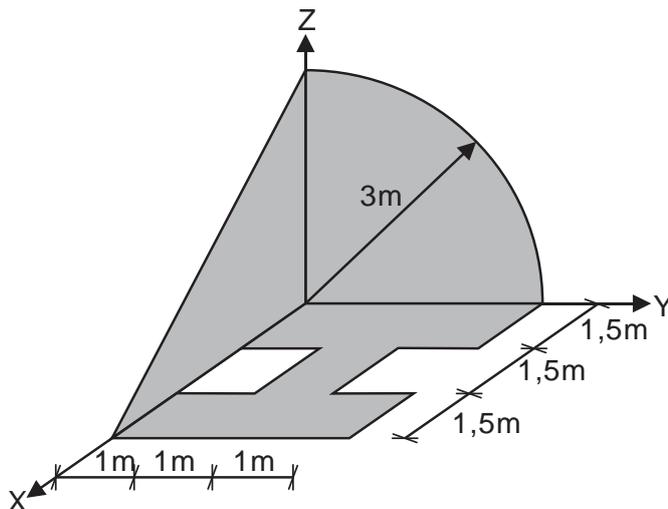
5. Para la estructura mostrada en equilibrio, determine la tensión en el cable, sabiendo que en B existe una articulación. Despreciar el peso de las barras. (4 puntos)



6. a) Determine la dimensión L del siguiente alambre compuesto homogéneo delgado, formado por el tramo recto AB (paralelo al eje X), el tramo BC (contenido en el plano XY), el tramo recto CD (paralelo al eje Z) y el tramo de semicircunferencia DEF (contenido en el plano XZ), si el centro de gravedad es $(0,288; \bar{Y}; \bar{Z})$ m (2 puntos)



- b) Determine las coordenadas del centro de gravedad de la lámina compuesta delgada, la cual está formada por una región de cuarto de círculo, una región triangular y otra región tipo H (2 puntos)



FECHA	La Molina, 23 de Abril del 2007
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL

CICLO 2007 – I

1. a) FALSO. En una rótula solo existen dos fuerzas internas, una vertical y otra horizontal. No existe momento.

b) Por dato del problema:

$$M_A = -3F\left(\frac{b}{3}\right) - Fb + 2F\left(\frac{a}{2}\right) + Fa = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = 1$$

c) Calculamos las resultantes de las cargas distribuidas y su ubicación.

CARGA UNIFORME EN TRAMO AB:

$$R_1 = 300.5 = 1500\text{N} \downarrow \text{ (se ubica en el centro de dicho tramo)}$$

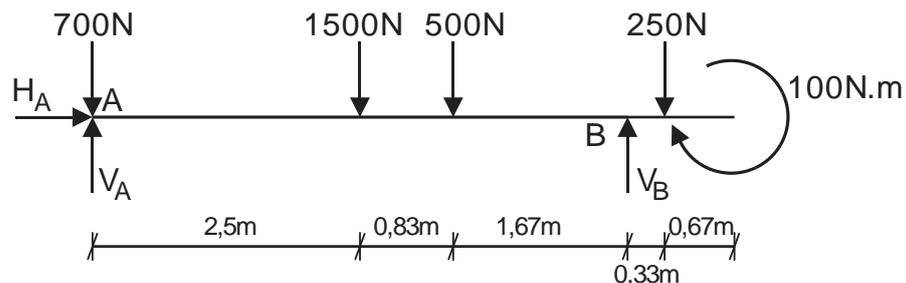
CARGA TRIANGULAR EN TRAMO AB:

$$R_2 = \frac{1}{2}(5)(200) = 500\text{N} \downarrow \text{ (se ubica a la distancia 3,33m del apoyo A)}$$

CARGA TRIANGULAR EN EL VOLADIZO:

$$R_3 = \frac{1}{2}(1)(500) = 250\text{N} \downarrow \text{ (se ubica a la distancia 0,33m del apoyo B)}$$

De esta manera, el DCL de la viga es la mostrada en la figura.



d) VERDADERO. Por simetría tenemos:

$$V_A = V_B = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)(w) = \frac{wL}{4} \uparrow$$

2. Calculamos las resultantes de la acción de las cargas sobre superficie.

CARGA TRIANGULAR:

$$F_1 = \frac{1,5 \cdot 2 \cdot 1000}{2} = 1500 \downarrow$$

CARGA RECTANGULAR CON HUECO:

$$F_2 = 1000(2)(L) - 1000 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1^2 = (2000L - 785,4) \downarrow$$

RESULTANTE:

$$R = F_1 + F_2 = 1500 + 2000L - 785,4 = (714,6 + 2000L) \downarrow$$

Ubicamos las cargas en la platea, tal como se muestra en la figura y luego aplicamos el Teorema de Varignon.

$$a) M_X^R = \sum M_X^{F_i} \Rightarrow -(714,6 + 2000L)(1,053) = 1500(0,5) - (2000L - 785,4)(0,5L)$$

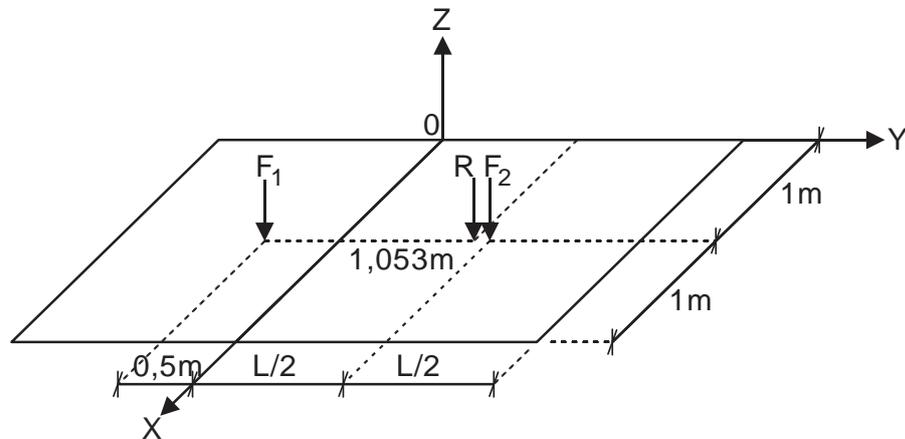
$$1000L^2 - 2498,7L - 1502,47 = 0$$

$$L = 3\text{m}$$

No se considera el valor negativo, debido a que una longitud siempre es positiva.

b) Se comprueba la veracidad del cálculo, a través de la 2da condición del Teorema de Varignon.

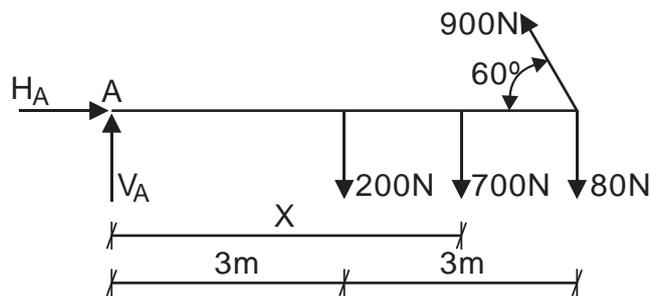
$$M_Y^R = \sum M_Y^{F_i} \Rightarrow 6714,6(1) = 1500(1) + 5214,6(1) \quad \text{OK}$$



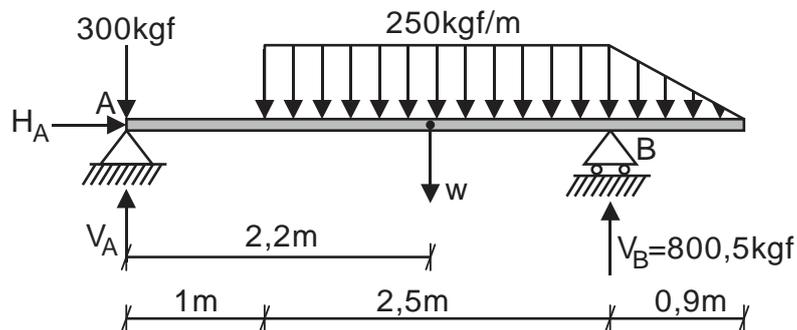
3. a) Efectuamos un corte por el cable y analizamos el equilibrio respecto al apoyo A

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -200(3) - 700(x) - 80(6) + 900\text{sen}60^\circ(6) = 0$$

$$x = 5,138\text{m}$$



b) Esquematizamos las reacciones en los apoyos y el peso de la viga, el cual está ubicado en el centro de la misma.



Analizamos el equilibrio de la viga.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 800,5(3,5) - w(2,2) - 250(2,5)(2,25) - \frac{1}{2}(0,9)(250)(3,8) = 0$$

$$w = 440\text{kgf} \downarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 800,5 - 440 - 300 - 250(2,5) - \frac{1}{2}(0,9)(250) = 0$$

$$V_A = 677 \text{kgf} \uparrow$$

4. Analizamos el equilibrio de la viga, calculando las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$V_B(14) - 600(5)(2,5) - \frac{1}{2}(4,5)(900)(5,5) + \frac{1}{2}(1,5)(300)(9,5) - 400(4)(12) - 800 = 0$$

$$V_B = 2607,14 \text{N} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow$$

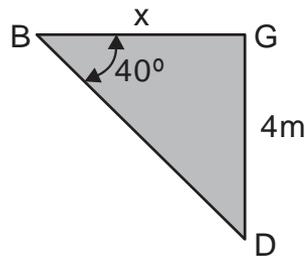
$$V_A + 2607,14 - 600(5) \cos 37^\circ - \frac{1}{2}(4,5)(900) + \frac{1}{2}(1,5)(300) - 400(4) = 0$$

$$V_A = 3192,86 \text{N} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -H_A + 600(5) \sin 37^\circ = 0$$

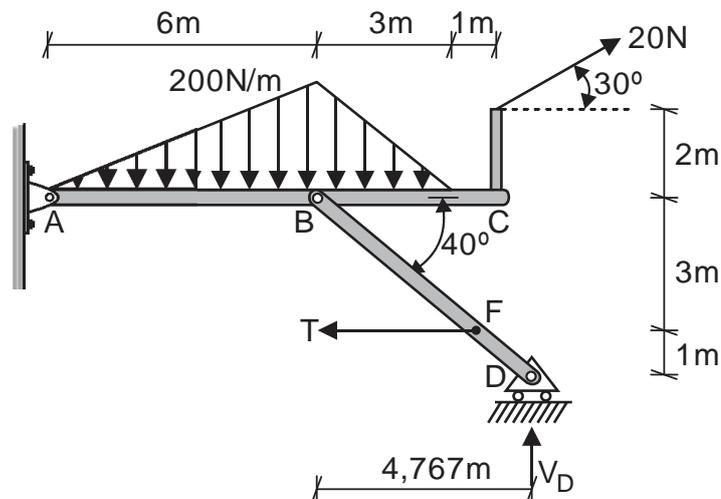
$$H_A = 1800 \text{N} \leftarrow$$

5. Calculamos la distancia horizontal desde el apoyo D hasta la articulación B



$$\text{tg}40^\circ = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 4,767 \text{m}$$

Luego, efectuamos un corte en el cable EF y analizamos el equilibrio del sistema estructural.



$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_D(10,767) - T(3) - \frac{1}{2}(200)(6)(4) - \frac{1}{2}(200)(3)(7) - 20\cos 30^\circ(2) + 20\sin 30^\circ(10) = 0$$

$$10,767V_D - 3T = 4434,64 \quad \dots\dots\dots (a)$$

La segunda ecuación lo obtenemos a partir del equilibrio en forma independiente de la barra BD

$$\sum M_B^{BD} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D(4,767) - 3T = 0$$

$$4,767V_D = 3T \quad \dots\dots\dots (b)$$

Reemplazamos la ecuación (b) en (a), obteniendo:

$$V_D = 739,11\text{N}$$

$$T = 1174,44\text{N}$$

Las orientaciones, son las mismas que las mostradas en la página anterior.

6. a) En la siguiente tabla, se muestran las coordenadas del centro de gravedad de cada tramo.

TRAMO	L_i (m)	\bar{X}_i	\bar{Y}_i	\bar{Z}_i
AB	L	L/2	1,2	0
BC	1,3	0,25	0,6	0
CD	0,6	0,5	0	0,3
DEF	$0,5\pi$	0	0	$0,6+1/\pi$

Luego, determinamos el valor de L

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^4 L_i} = \frac{L\left(\frac{L}{2}\right) + 1,3(0,25) + 0,6(0,5) + 0,5\pi(0)}{L + 1,3 + 0,6 + 0,5\pi} = \frac{0,5L^2 + 0,625}{L + 3,471}$$

Por dato del problema:

$$\frac{0,5L^2 + 0,625}{L + 3,471} = 0,288 \quad \Rightarrow \quad 0,5L^2 - 0,288L - 0,374 = 0 \quad \therefore \quad L = 1,2\text{m}$$

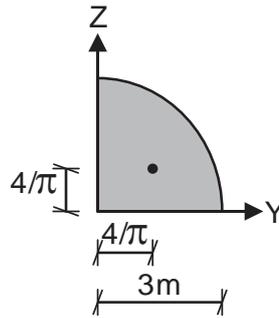
Ahora, determinamos las otras coordenadas del centro de gravedad.

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^4 L_i} = \frac{1,2(1,2) + 1,3(0,6) + 0,6(0) + 0,5\pi(0)}{1,2 + 1,3 + 0,6 + 0,5\pi} = 0,475\text{m}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^4 L_i \bar{Z}_i}{\sum_{i=1}^4 L_i} = \frac{1,2(0) + 1,3(0) + 0,6(0,3) + 0,5\pi\left(0,6 + \frac{1}{\pi}\right)}{1,2 + 1,3 + 0,6 + 0,5\pi} = 0,347\text{m}$$

b) Determinamos las características geométricas de las 5 figuras, incluido las partes huecas

Figura 1: Cuarto de circunferencia



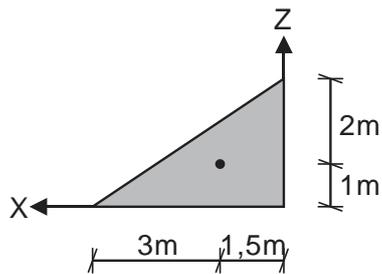
$$A_1 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi(3)^2}{4} = 2,25\pi$$

$$X_1 = 0$$

$$Y_1 = \frac{4}{\pi}$$

$$Z_1 = \frac{4}{\pi}$$

Figura 2: Triángulo



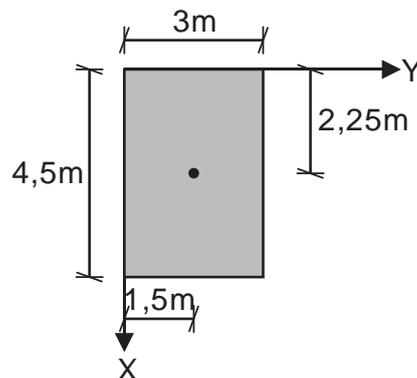
$$A_2 = \frac{1}{2}(4,5)(3) = 6,75$$

$$X_2 = 1,5$$

$$Y_2 = 0$$

$$Z_2 = 1$$

Figura 3: Rectángulo



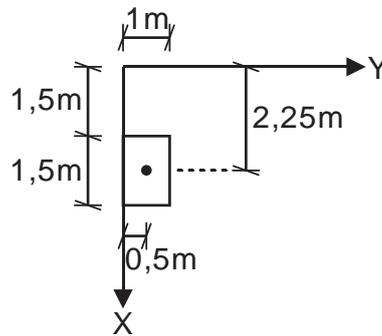
$$A_3 = 3(4,5) = 13,5$$

$$\bar{X}_3 = 2,25$$

$$\bar{Y}_3 = 1,5$$

$$\bar{Z}_3 = 0$$

Figura 4: Sección hueca (rectángulo izquierdo)



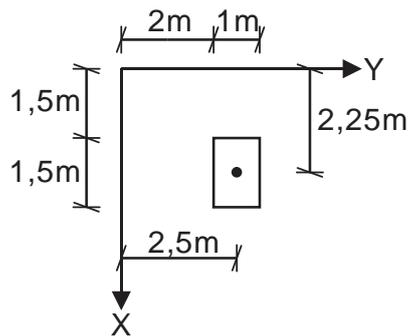
$$A_4 = 1,5(1) = 1,5$$

$$\bar{X}_4 = 2,25$$

$$\bar{Y}_4 = 0,5$$

$$\bar{Z}_4 = 0$$

Figura 5: Sección hueca (rectángulo derecho)



$$A_5 = 1,5(1) = 1,5$$

$$\bar{X}_5 = 2,25$$

$$\bar{Y}_5 = 2,5$$

$$\bar{Z}_5 = 0$$

En la siguiente tabla, se muestran todas las características de cada figura.

FIGURA	A_i (m ²)	\bar{X}_i	\bar{Y}_i	\bar{Z}_i	$A_i \bar{X}_i$	$A_i \bar{Y}_i$	$A_i \bar{Z}_i$
1	$2,25\pi$	0	$4/\pi$	$4/\pi$	0	9	9
2	6,75	1,5	0	1	10,125	0	6,75
3	13,5	2,25	1,5	0	30,375	20,25	0
4	-1,5	2,25	0,5	0	-3,375	-0,75	0
5	-1,5	2,25	2,5	0	-3,375	-3,75	0
Σ	24,318	-	-	-	33,75	24,75	15,75

De esta manera, determinamos las coordenadas del centro de gravedad de toda la figura.

$$X = \frac{\sum A_i X_i}{\sum A_i} = \frac{33,75}{24,318} = 1,388\text{m}$$

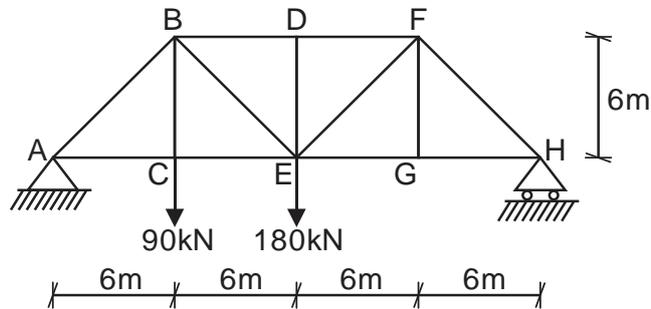
$$Y = \frac{\sum A_i Y_i}{\sum A_i} = \frac{24,75}{24,318} = 1,018\text{m}$$

$$Z = \frac{\sum A_i Z_i}{\sum A_i} = \frac{15,75}{24,318} = 0,648\text{m}$$

EVALUACIÓN	PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2006 – I
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	100m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

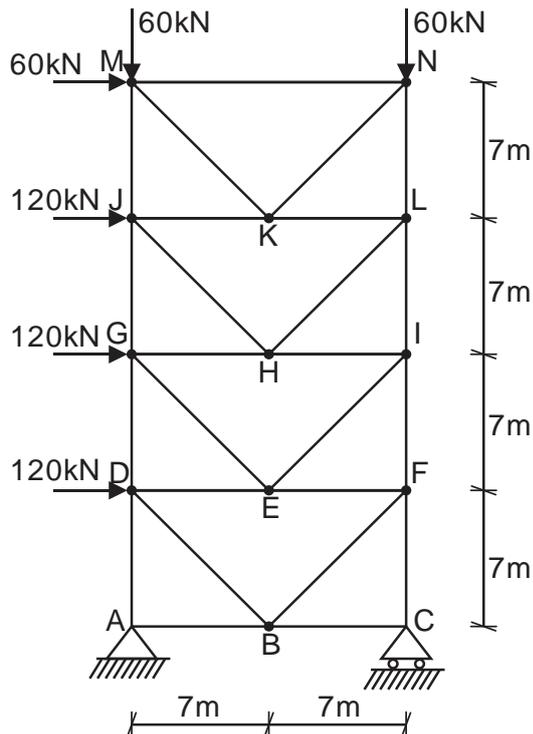
1. Para la siguiente armadura, se pide:

- Calcular las reacciones en los apoyos. (1 punto)
- Indicar las barras que no trabajan. (0.5 puntos)
- Determinar las fuerzas en el resto de barras de la armadura, usando el método de los nudos e indicando en cada caso si las fuerzas son de tracción o compresión. (2.5 puntos)



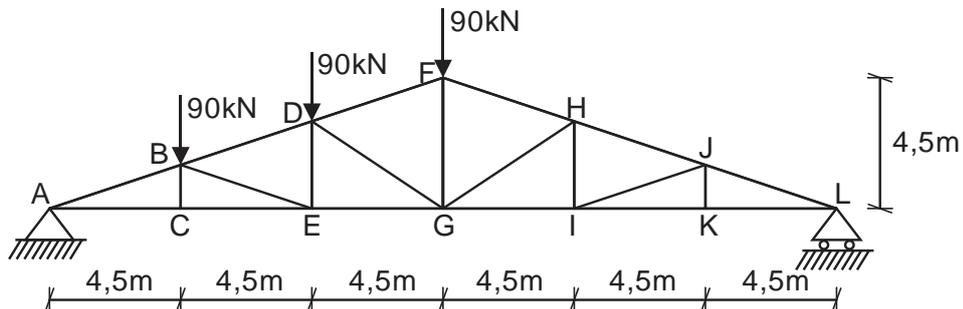
2. Para la armadura mostrada en la figura, se pide:

- Calcular las reacciones en los apoyos. (1 punto)
- Determinar las fuerzas axiales en las barras GJ, LI, JH, HL, GH y HI, a través del método de las secciones. (3 puntos)



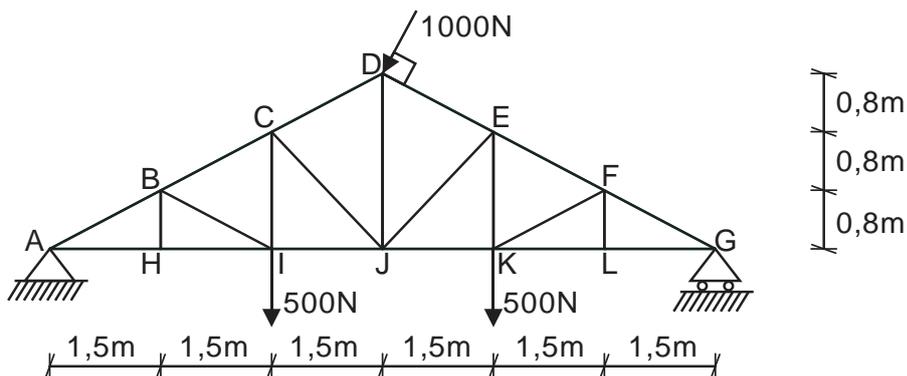
3. Para la armadura mostrada en la figura, se pide calcular:

- a) Las reacciones en los apoyos. (1 punto)
- b) Las fuerzas en las barras BD, FH y GI por el método de las secciones. (2 puntos)
- c) Las fuerzas en las barras FD y FG por el método de los nudos. (1 punto)

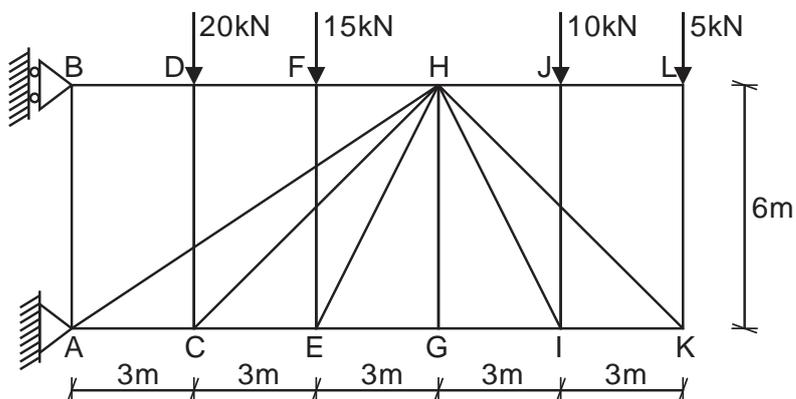


4. Dada la armadura:

- a) Indicar que barras no trabajan. (1 punto)
- b) Usando el método de los cortes, determine la fuerza axial en la barra DE (2 puntos)
- c) Usando el método de los nudos, determine la fuerza axial en las barras CD, DJ, AB y AH (2 puntos)



5. Para la armadura mostrada en la figura, determine la fuerza axial en la barra GE (3 puntos)



FECHA	La Molina, 22 de Mayo del 2006
-------	--------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

CICLO 2006 – I

1. a) Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_H(24) - 90(6) - 180(12) = 0 \quad \therefore V_H = 112,5 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 112,5 - 90 - 180 = 0 \quad \therefore V_A = 157,5 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

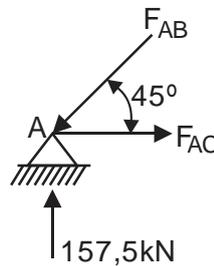
b) Las barras que no trabajan, es decir, barras nulas, son las barras DE y FG

c) Aplicamos el método de los nudos y determinamos las fuerzas internas en el resto de barras.

NUDO "A":

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 157,5 - F_{AB} \sin 45^\circ = 0 \quad \therefore F_{AB} = 222,74 \text{ kN (COMPRESION)}$$

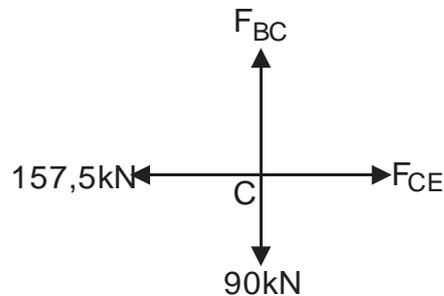
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -222,74 \cos 45^\circ + F_{AC} = 0 \quad \therefore F_{AC} = 157,5 \text{ kN (TRACCION)}$$



NUDO "C":

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{CE} - 157,5 = 0 \quad \therefore F_{CE} = 157,5 \text{ kN (TRACCION)}$$

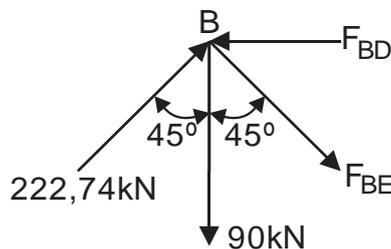
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{BC} - 90 = 0 \quad \therefore F_{BC} = 90 \text{ kN (TRACCION)}$$



NUDO "B":

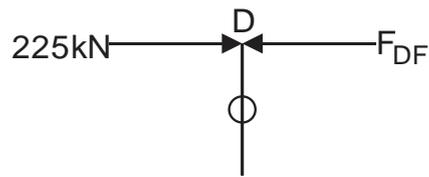
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 222,74 \cos 45^\circ - 90 - F_{BE} \cos 45^\circ = 0 \quad \therefore F_{BE} = 95,46 \text{ kN (TRACCION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -F_{BD} + 95,46 \sin 45^\circ + 222,74 \sin 45^\circ = 0 \quad \therefore F_{BD} = 225 \text{ kN (COMPRESION)}$$



NUDO "D":

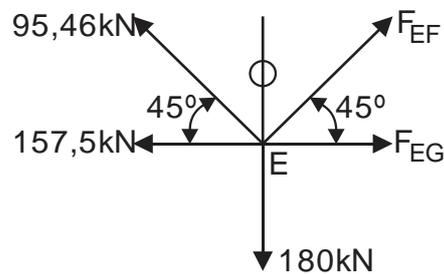
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{DF} + 225 = 0 \quad \therefore F_{DF} = 225\text{kN (COMPRESION)}$$



NUDO "E":

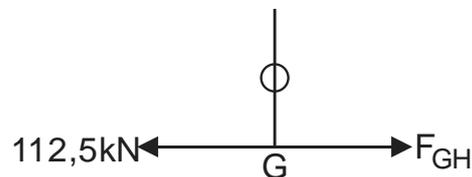
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 95,46\text{sen}45^\circ + F_{EF}\text{sen}45^\circ - 180 = 0$$
$$\therefore F_{EF} = 159,1\text{kN (TRACCION)}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 159,1\text{cos}45^\circ + F_{EG} - 95,46\text{cos}45^\circ - 157,5 = 0$$
$$\therefore F_{EG} = 112,5\text{kN (TRACCION)}$$



NUDO "G":

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{GH} - 112,5 = 0 \quad \therefore F_{GH} = 112,5\text{kN (TRACCION)}$$

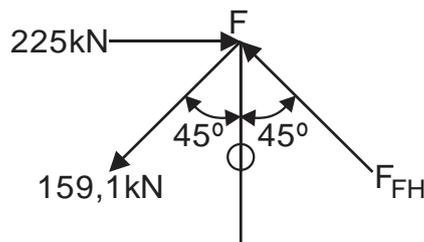


NUDO "F":

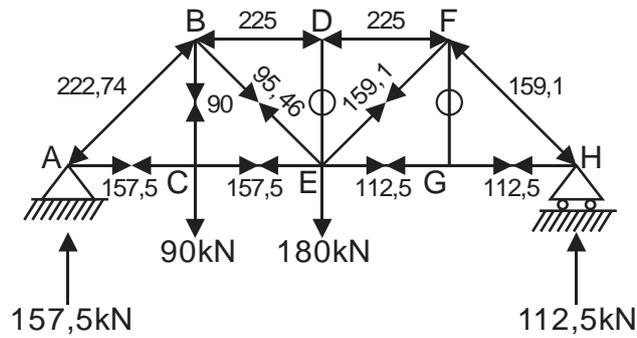
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{FH} \text{cos}45^\circ - 159,1\text{cos}45^\circ = 0$$
$$\therefore F_{FH} = 159,1\text{kN (COMPRESION)}$$

Como comprobación, efectuamos el equilibrio en el eje horizontal.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 225 - 2(159,1\text{sen}45^\circ) = 0$$



De esta manera, la distribución final de fuerzas internas en la armadura es la mostrada en la siguiente figura.



2. a) Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_C(14) - 60(14) - 60(28) - 120(21) - 120(14) - 120(7) = 0$$

$$\therefore V_C = 540\text{kN} \uparrow$$

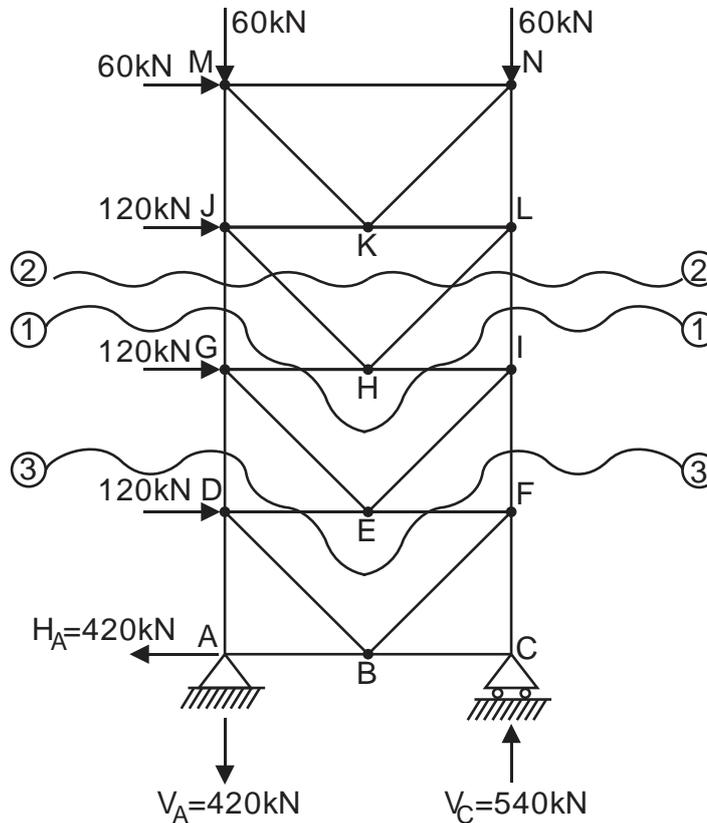
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -V_A + 540 - 60 - 60 = 0$$

$$\therefore V_A = 420\text{kN} \downarrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A - 60 - 3(120) = 0$$

$$\therefore H_A = 420\text{kN} \leftarrow$$

b) En la siguiente armadura, se muestran los cortes a efectuar.



CORTE 1-1:

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow F_{LI}(14) - 60(14) - 60(14) - 120(7) = 0$$

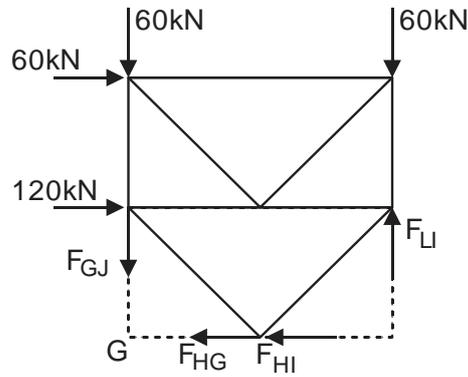
$$\therefore F_{LI} = 180\text{kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 180 - 60 - 60 - F_{GJ} = 0$$

$$\therefore F_{GJ} = 60\text{kN (TRACCION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -F_{HI} + 60 + 120 - F_{HG} = 0$$

$$F_{HG} + F_{HI} = 180 \dots\dots\dots (a)$$



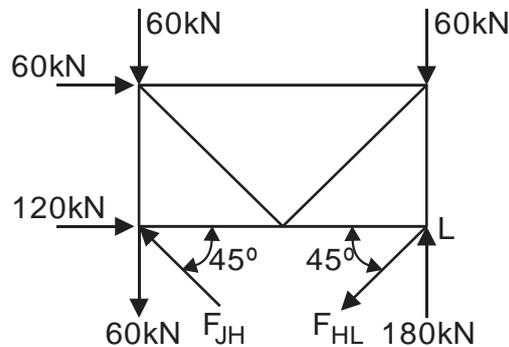
CORTE 2-2:

$$\sum M_L = 0 \Rightarrow 60(14) + 60(14) - 60(7) - F_{JH} \text{sen}45^\circ (14) = 0$$

$$\therefore F_{JH} = 127,28 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 180 - 60(3) + 127,28 \text{sen}45^\circ - F_{HL} \text{sen}45^\circ = 0$$

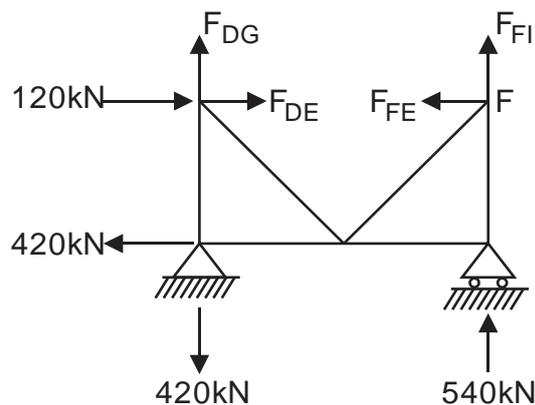
$$\therefore F_{HL} = 127,28 \text{ kN (TRACCION)}$$



CORTE 3-3:

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow -F_{DG}(14) - 420(7) + 420(14) = 0$$

$$\therefore F_{DG} = 210 \text{ kN (TRACCION)}$$

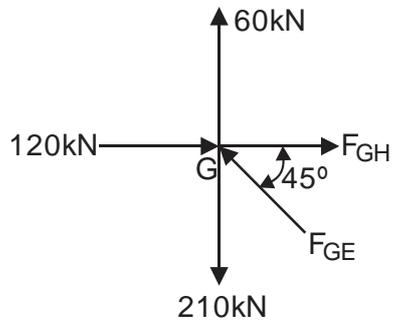


NUDO "G":

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 60 - 210 + F_{GE} \text{sen}45^\circ = 0 \quad \therefore F_{GE} = 212,13 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{GH} + 120 - 212,13 \text{cos}45^\circ = 0$$

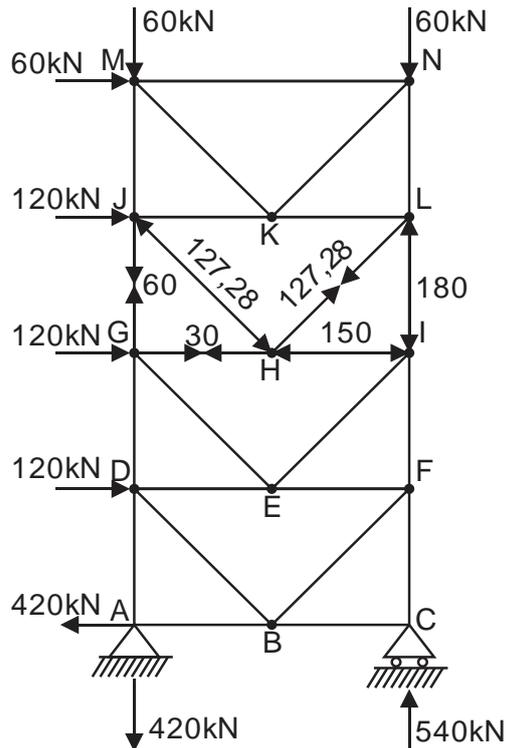
$$\therefore F_{GH} = 30 \text{ kN (TRACCION)}$$



Reemplazamos en la ecuación (a) del corte 1-1 y obtenemos:

$$F_{HI} = 150 \text{ kN (COMPRESION)}$$

Los valores obtenidos lo graficamos en la siguiente armadura.



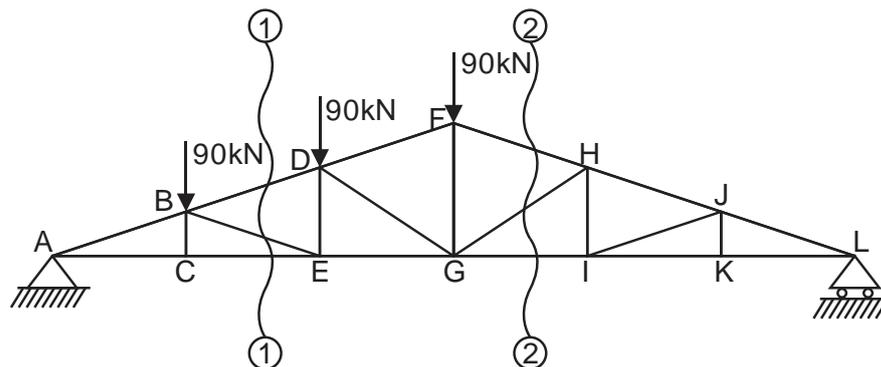
3. a) Calculamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_L(27) - 90(4,5) - 90(9) - 90(13,5) = 0 \quad \therefore V_L = 90 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 90 - 270 = 0 \quad \therefore V_A = 180 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

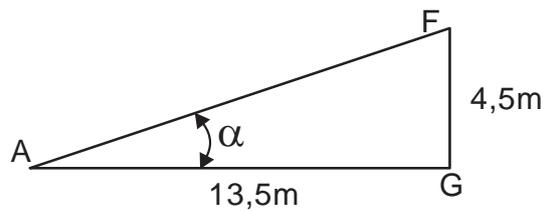
b) Los cortes a efectuar para determinar las fuerzas internas en las barras BD, FH y GI son los mostrados en la figura.



Luego, analizamos cada uno de los cortes.

CORTE 1-1:

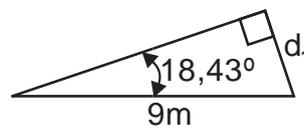
Antes de efectuar el corte 1-1, determinamos el valor del ángulo α



$$\alpha = \arctg\left(\frac{4,5}{13,5}\right) = 18,43^\circ$$

Ahora, calculamos la distancia d_1 del corte 1-1

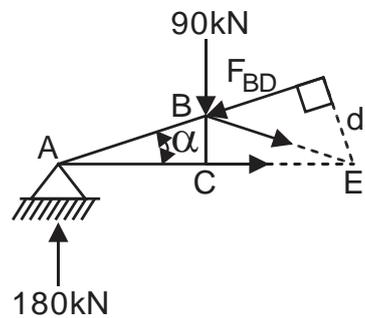
$$\text{sen}18,43^\circ = \frac{d_1}{9} \quad \Rightarrow \quad d_1 = 2,85\text{m}$$



Efectuamos el corte 1-1 y analizamos su equilibrio.

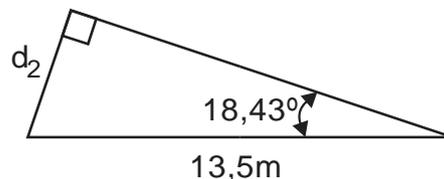
$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad -180(9) + 90(4,5) + F_{BD}(2,85) = 0$$

$$F_{BD} = 426,31\text{kN (COMPRESION)}$$



CORTE 2-2:

Previo a su análisis, determinamos el valor de la distancia d_2

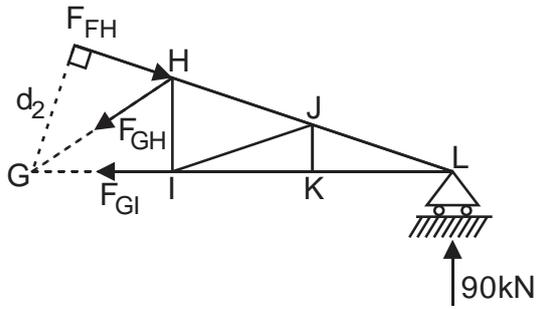


$$\text{sen}18,43^\circ = \frac{d_2}{13,5} \quad \Rightarrow \quad d_2 = 4,27\text{m}$$

Ahora, efectuamos el corte 2-2 y analizamos su equilibrio.

$$\sum M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad 90(13,5) - F_{FH}(4,27) = 0 \quad \therefore \quad F_{FH} = 284,54\text{kN (COMPRESION)}$$

$$\sum M_H = 0 \quad \Rightarrow \quad 90(9) - F_{GI}(3) = 0 \quad \therefore \quad F_{GI} = 270\text{kN (TRACCION)}$$



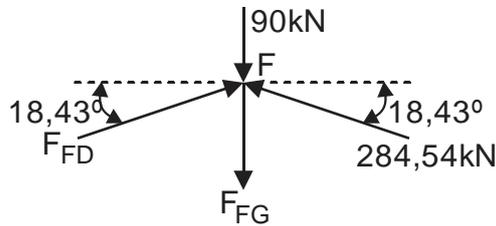
c) Analizamos el equilibrio del nudo F, usando el método de los nudos.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{FD} \cos 18,43^\circ - 284,54 \cos 18,43^\circ = 0$$

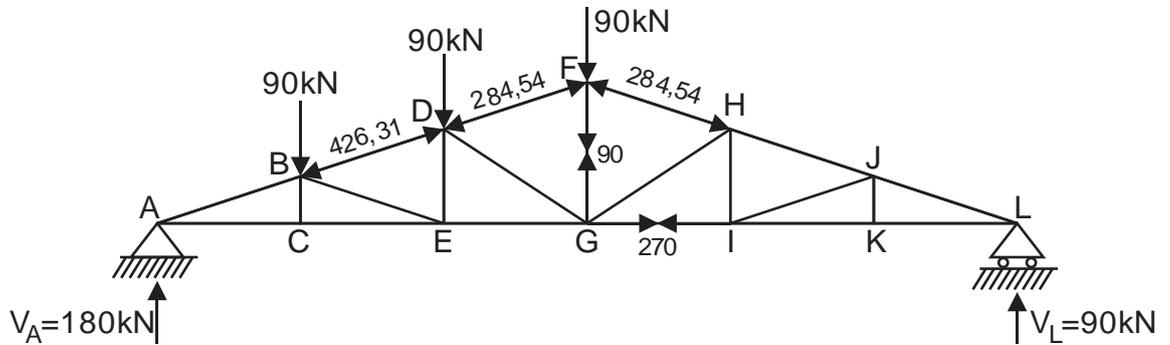
$$F_{FD} = 284,54 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (284,54 \sin 18,43^\circ)(2) - 90 - F_{FG} = 0$$

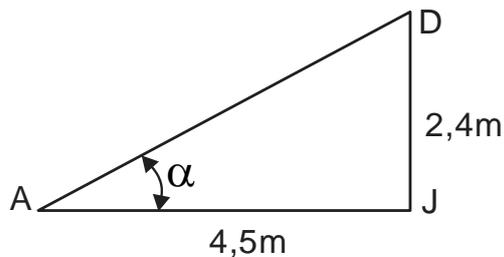
$$F_{FG} = 90 \text{ kN (TRACCION)}$$



De esta manera, las fuerzas internas finales en las barras solicitadas, son las mostradas en la figura.



4. a) No trabajan las barras BH, BI, FL, FK, debido a que su fuerza axial es cero.
- b) Determinamos el valor del ángulo α .



$$\text{tg} \alpha = \frac{2,4}{4,5} \Rightarrow \alpha = \text{arctg} \left(\frac{2,4}{4,5} \right) = 28,07^\circ$$

Ahora, calculamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$V_G(9) - 500(3) - 500(6) - 1000 \cos 28,07^\circ (4,5) + 1000 \sin 28,07^\circ (2,4) = 0$$

$$V_G = 815,70 \text{ N } \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - 1000 \sin 28,07^\circ = 0$$

$$H_A = 470,55 \text{ N } \rightarrow$$

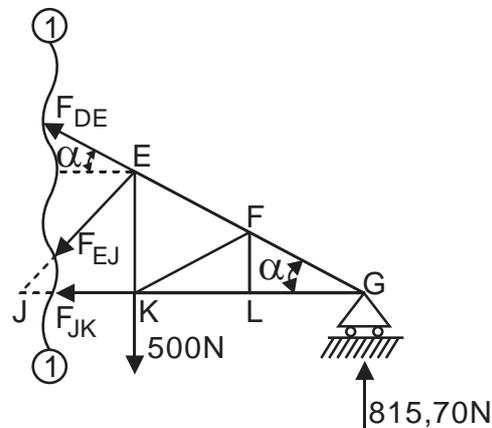
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + 815,70 - 500 - 500 - 1000 \cos 28,07^\circ = 0$$

$$V_A = 1066,67 \text{ N } \uparrow$$

Efectuamos el corte 1-1 y analizamos el equilibrio del lado derecho de la armadura.

$$\sum M_J = 0 \Rightarrow 815,70(4,5) - 500(1,5) + F_{DE} \cos 28,07^\circ (1,6) + F_{DE} \sin 28,07^\circ (1,5) = 0$$

$$F_{DE} = -1379,21 \text{ N (COMPRESION)}$$



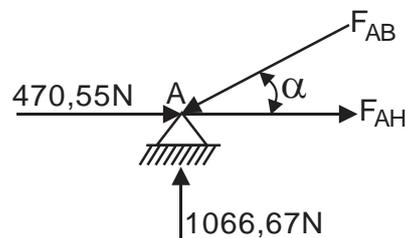
c) NUDO "A":

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1066,67 - F_{AB} \sin 28,07^\circ = 0$$

$$F_{AB} = 2266,85 \text{ N (COMPRESION)}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 470,55 - 2266,85 \cos 28,07^\circ + F_{AH} = 0$$

$$F_{AH} = 1529,66 \text{ N (TRACCION)}$$



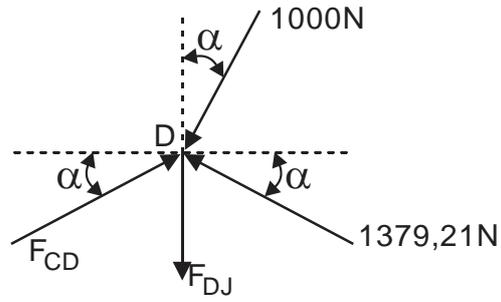
NUDO "D":

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} \cos 28,07^\circ - 1379,21 \cos 28,07^\circ - 1000 \sin 28,07^\circ = 0$$

$$F_{CD} = 1912,49 \text{ N (COMPRESION)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1912,49 \sin 28,07^\circ + 1379,21 \sin 28,07^\circ - 1000 \cos 28,07^\circ - F_{DJ} = 0$$

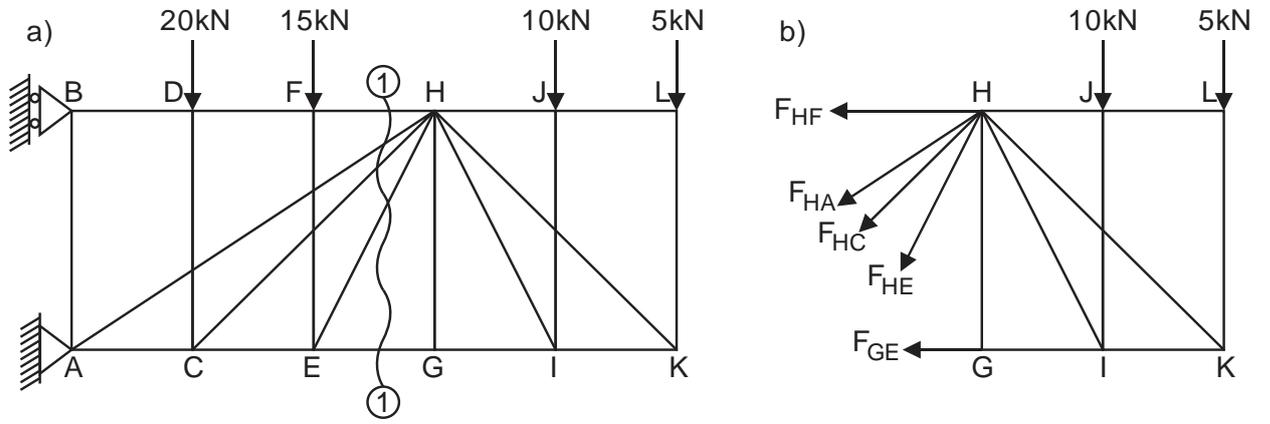
$$F_{DJ} = 666,53 \text{ N (TRACCION)}$$



5. Efectuamos el corte 1-1 (figura a) y analizamos el equilibrio de la parte derecha de dicho corte (figura b), obteniendo la fuerza axial en la barra GE

$$\sum M_H^{der} = 0 \quad \Rightarrow \quad -10(3) - 5(6) - F_{GE}(6) = 0$$

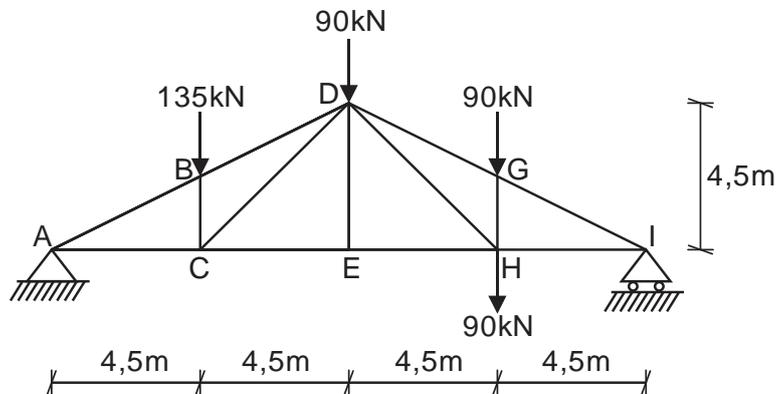
$$F_{GE} = -10\text{kN (COMPRESION)}$$



EVALUACIÓN	PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2006 – II
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	100m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

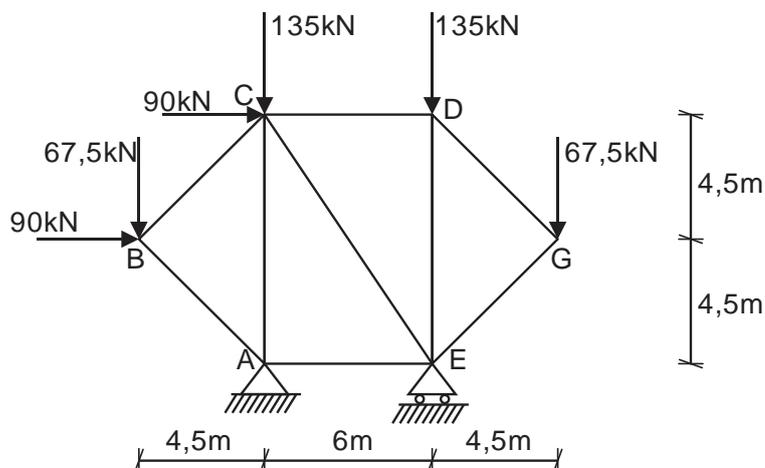
1. Para la siguiente armadura, se pide:

- Calcular las reacciones en los apoyos. (1 punto)
- Indicar la barra que no trabaja. (0.5 puntos)
- Determinar las fuerzas en el resto de barras de la armadura, usando el método de los nudos e indicando en cada caso si las fuerzas son de tracción o compresión. (3.5 puntos)



2. Para la armadura mostrada en la figura, se pide:

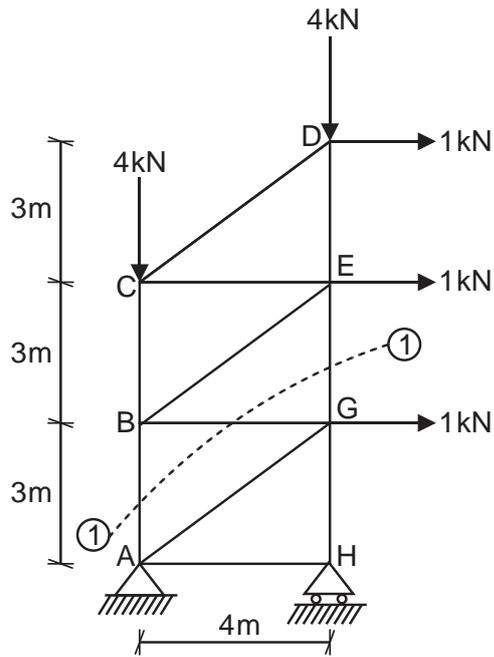
- Calcular las reacciones en los apoyos. (1 punto)
- Determinar las fuerzas axiales en las barras BC, CD y CE, a través del método de las secciones. (3 puntos)



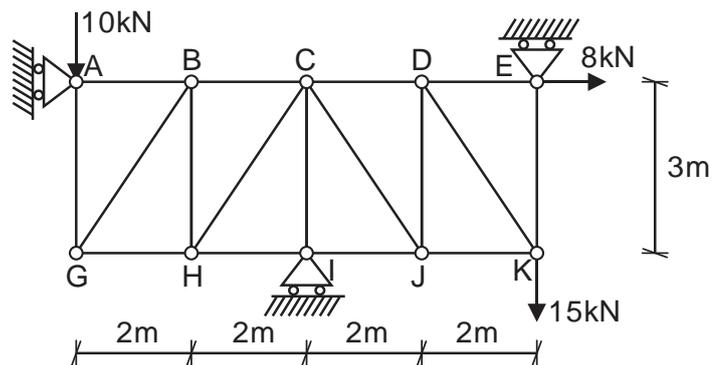
3. Dada la siguiente armadura:

- Usando el corte 1-1, determine las fuerzas axiales en las barras AB, BG y EG, indicando si están en tracción o compresión. (2 puntos)

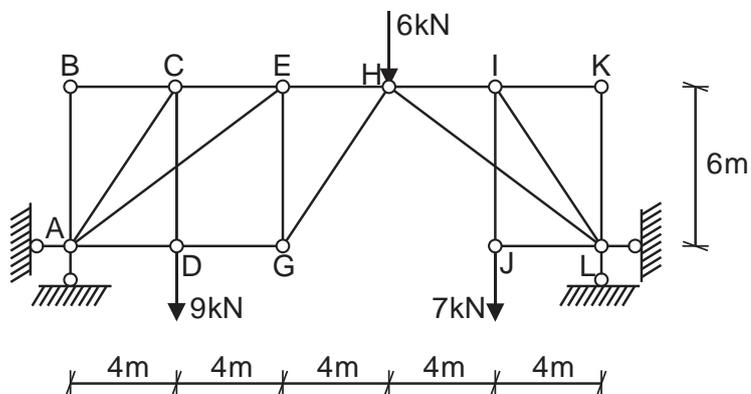
- b) Analizando los nudos H y A, determine que barra no trabaja y cuál es la fuerza axial en la barra AG (1 punto)



4. Para la armadura mostrada en la figura, determine las fuerzas axiales en las barras AG, AB, BG, GH, CD, CJ e IJ, indicando si están trabajando en tracción o compresión. (4 puntos)



5. Para la armadura mostrada en la figura, determine las fuerzas axiales en las barras AE, EG y HL, indicando si están trabajando en tracción o compresión. (4 puntos)



FECHA	La Molina, 23 de Octubre del 2006
-------	-----------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

CICLO 2006 – II

1. a) Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_I(18) - 135(4,5) - 90(9) - 90(13,5)(2) = 0 \quad \therefore V_I = 213,75 \text{ kN } \uparrow$$

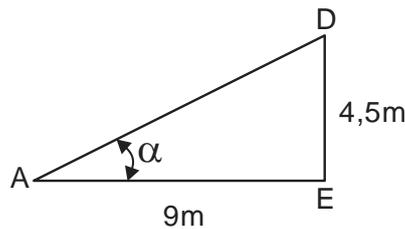
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 213,75 - 135 - 90(3) = 0 \quad \therefore V_A = 191,25 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

b) La única barra que no trabaja es la barra DE

c) Determinamos el valor del ángulo α

$$\text{tg} \alpha = \frac{4,5}{9} \Rightarrow \alpha = \text{arctg} 0,5 = 26,56^\circ$$

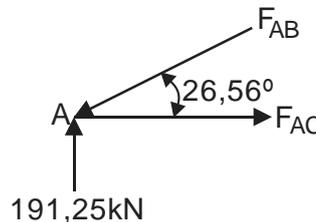


Ahora, aplicamos el método de los nudos y determinamos las fuerzas internas en el resto de barras.

NUDO "A":

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 191,25 - F_{AB} \text{sen} 26,56^\circ = 0 \quad \therefore F_{AB} = 427,72 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -427,72 \cos 26,56^\circ + F_{AC} = 0 \quad \therefore F_{AC} = 382,58 \text{ kN (TRACCION)}$$



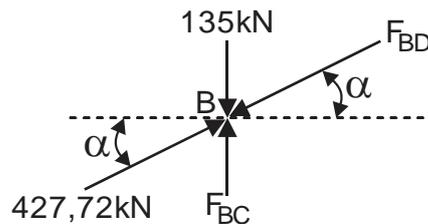
NUDO "B":

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 427,72 \cos 26,56^\circ - F_{BD} \cos 26,56^\circ = 0$$

$$\therefore F_{BD} = 427,72 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{BC} - 135 - 427,72 \text{sen} 26,56^\circ + 427,72 \text{sen} 26,56^\circ = 0$$

$$\therefore F_{BC} = 135 \text{ kN (COMPRESION)}$$

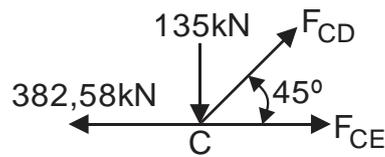


NUDO "C":

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{CD} \text{sen} 45^\circ - 135 = 0 \quad \therefore F_{CD} = 190,92 \text{ kN (TRACCION)}$$

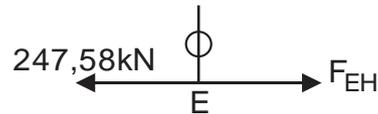
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -382,58 + 190,92 \cos 45^\circ + F_{CE} = 0$$

$$\therefore F_{CE} = 247,58 \text{ kN (TRACCION)}$$



NUDO "E":

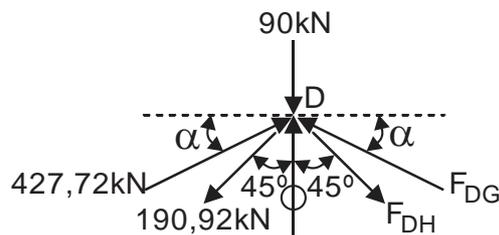
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{EH} - 247,58 = 0 \quad \therefore F_{EH} = 247,58 \text{ kN (TRACCION)}$$



NUDO "D":

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \Rightarrow 427,72 \cos 26,56^\circ - 190,92 \sin 45^\circ + F_{DH} \sin 45^\circ - F_{DG} \cos 26,56^\circ &= 0 \\ -0,707 F_{DH} + 0,894 F_{DG} &= 247,58 \quad \dots\dots\dots (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \Rightarrow -90 + 427,72 \sin 26,56^\circ - 190,92 \cos 45^\circ - F_{DH} \cos 45^\circ + F_{DG} \sin 26,56^\circ &= 0 \\ -0,707 F_{DH} + 0,447 F_{DG} &= 33,75 \quad \dots\dots\dots (b) \end{aligned}$$



Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$F_{DG} = 478,37 \text{ kN (COMPRESION)}$$

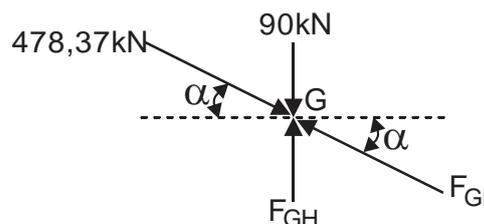
$$F_{DH} = 254,71 \text{ kN (TRACCION)}$$

NUDO "G":

Como las fuerzas están orientadas a lo largo de una misma línea, se tendrá un caso análogo al nudo B, obteniéndose por equilibrio las fuerzas internas:

$$F_{GI} = 478,37 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$F_{GH} = 90 \text{ kN (COMPRESION)}$$



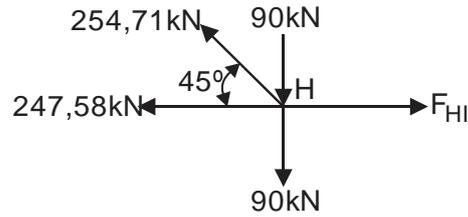
NUDO "H":

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{HI} - 254,71 \cos 45^\circ - 247,58 = 0$$

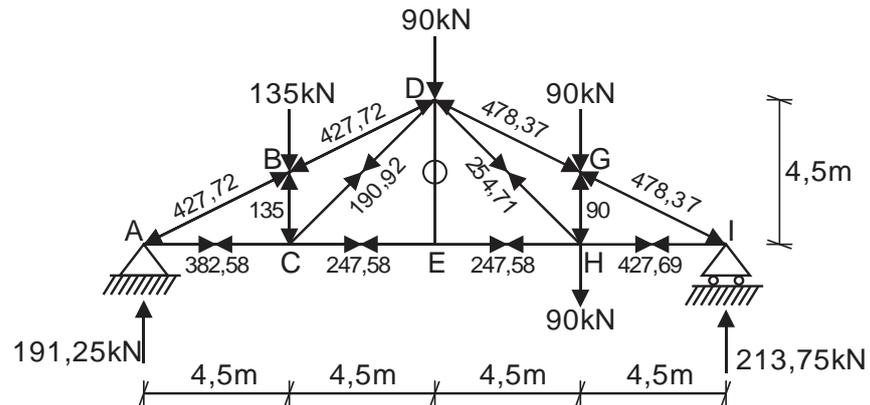
$$\therefore F_{HI} = 427,69 \text{ kN (TRACCION)}$$

Como comprobación, efectuamos el equilibrio en el eje vertical.

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -90 + 254,71 \text{sen} 45^\circ - 90 = 0$$



De esta manera, la distribución final de fuerzas internas en la armadura es la mostrada en la siguiente figura.



2. a) Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_E(6) - 90(4,5) + 67,5(4,5) - 90(9) - 135(6) - 67,5(10,5) = 0$$

$$\therefore V_E = 405 \text{ kN } \uparrow$$

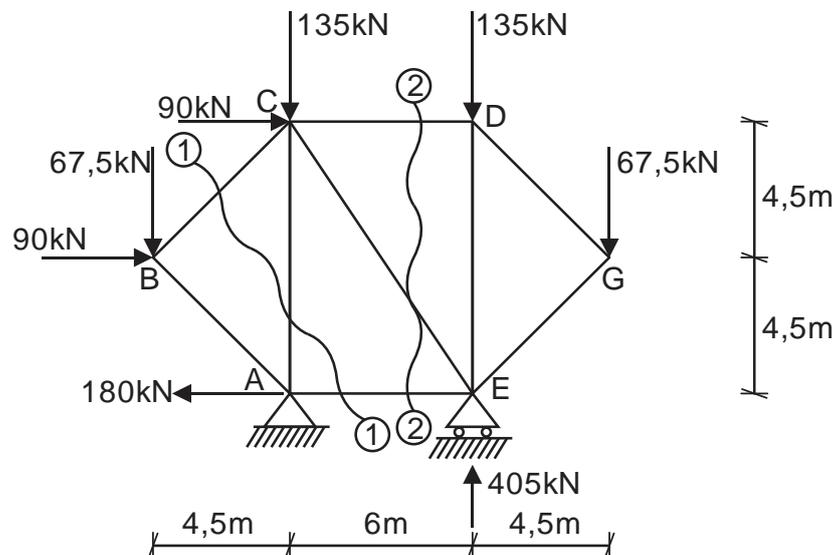
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 405 - 67,5(2) - 135(2) = 0$$

$$\therefore V_A = 0$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 90(2) - H_A = 0$$

$$\therefore H_A = 180 \text{ kN } \leftarrow$$

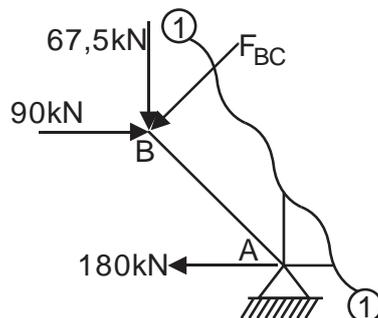
b) En la siguiente armadura, se muestran los cortes a efectuar.



CORTE 1-1:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -90(4,5) + 67,5(4,5) + F_{BC}(4,5\sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore F_{BC} = 15,91 \text{ kN (COMPRESION)}$$



CORTE 2-2:

Determinamos el valor del ángulo β

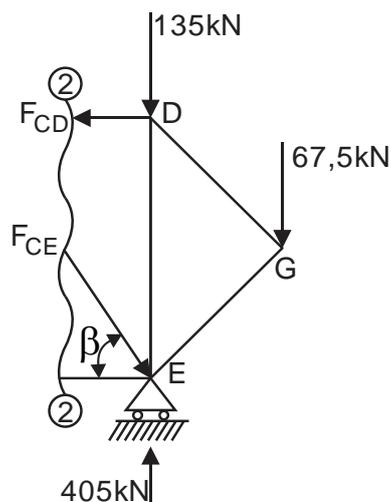
$$\beta = \arctg(9/6) = 56,31^\circ$$

Luego, analizamos el equilibrio del corte.

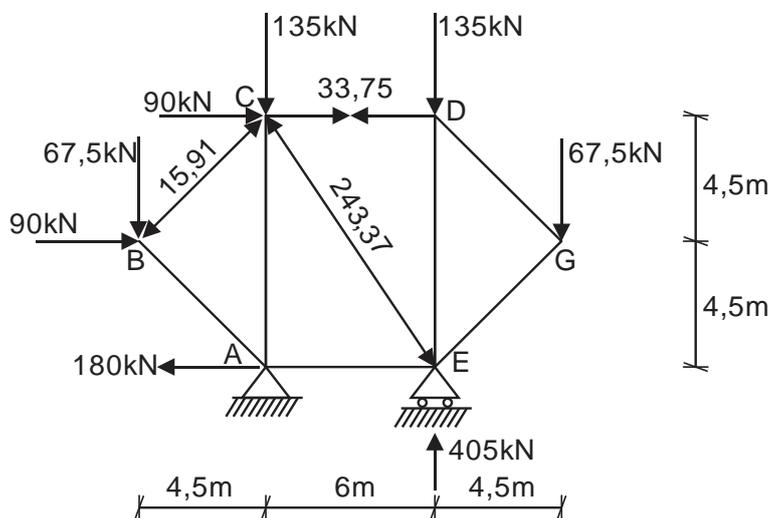
$$\sum M_E = 0 \Rightarrow F_{CD}(9) - 67,5(4,5) = 0 \quad \therefore F_{CD} = 33,75 \text{ kN (TRACCION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -F_{CE} \text{sen}56,31^\circ + 405 - 67,5 - 135 = 0$$

$$\therefore F_{CE} = 243,37 \text{ kN (COMPRESION)}$$



Los valores obtenidos lo graficamos en la siguiente armadura.



3. a) Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_H(4) - 1(3) - 1(6) - 1(9) - 4(4) = 0 \quad \therefore V_H = 8,5\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -V_A + 8,5 - 4 - 4 = 0 \quad \therefore V_A = 0,5\text{kN} \downarrow$$

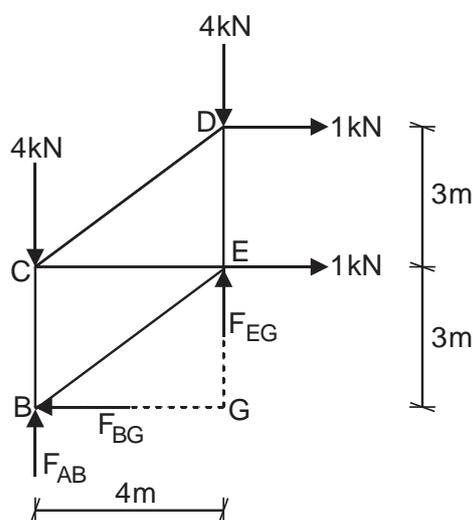
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 1(3) - H_A = 0 \quad \therefore H_A = 3\text{kN} \leftarrow$$

Analizamos el equilibrio del corte.

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow -1(3) - 1(6) + 4(4) - F_{AB}(4) = 0 \quad \therefore F_{AB} = 1,75\text{kN (COMPRESION)}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -4(4) + F_{EG}(4) - 1(3) - 1(6) = 0 \quad \therefore F_{EG} = 6,25\text{kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -F_{BG} + 1 + 1 = 0 \quad \therefore F_{BG} = 2\text{kN (COMPRESION)}$$

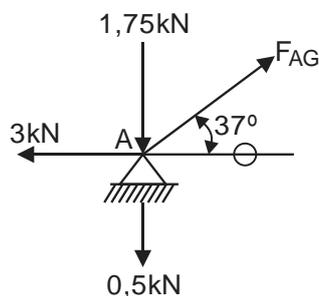


b) Si analizamos el equilibrio del nudo H, nos daremos cuenta que la barra AG no trabaja.

Ahora, analizamos el equilibrio del nudo A

NUDO "A":

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{AG} \cos 37^\circ - 3 = 0 \quad \therefore F_{AG} = 3,75\text{kN (TRACCION)}$$



4. Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 10(8) - V_I(4) = 0 \quad \therefore V_I = 20\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -10 + 20 - 15 + V_E = 0 \quad \therefore V_E = 5\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -H_A + 8 = 0 \quad \therefore H_A = 8\text{kN} \leftarrow$$

Si analizamos el nudo A, tenemos que las fuerzas están orientadas a lo largo de una misma línea, lo cual es un caso notable, siendo las fuerzas internas:

$$F_{AB} = 8\text{kN (TRACCION)}$$

$$F_{AG} = 10\text{kN (COMPRESION)}$$

Para determinar el resto de fuerzas internas, efectuamos los siguientes cortes.

CORTE 1-1:

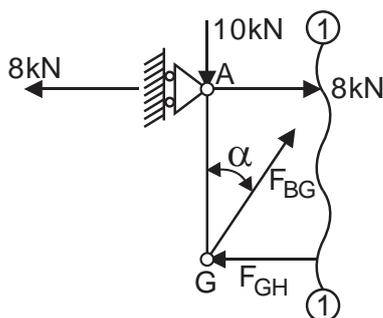
Determinamos el valor del ángulo α

$$\alpha = \arctg(2/3) = 33,69^\circ$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -10 + F_{BG} \cos 33,69^\circ = 0 \quad \therefore F_{BG} = 12,02\text{kN (TRACCION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 8 - 8 + 12,02 \sin 33,69^\circ - F_{GH} = 0$$

$$\therefore F_{GH} = 6,67\text{kN (COMPRESION)}$$



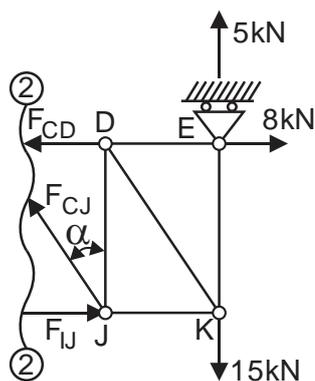
CORTE 2-2:

$$\sum M_J = 0 \Rightarrow 5(2) - 15(2) - 8(3) + F_{CD}(3) = 0$$

$$\therefore F_{CD} = 14,67\text{kN (TRACCION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{CJ} \cos 33,69^\circ + 5 - 15 = 0 \quad \therefore F_{CJ} = 12,02\text{kN (TRACCION)}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow F_{IJ}(3) + 5(4) - 15(4) = 0 \quad \therefore F_{IJ} = 13,33\text{kN (COMPRESION)}$$



5. Determinamos las reacciones en los apoyos.

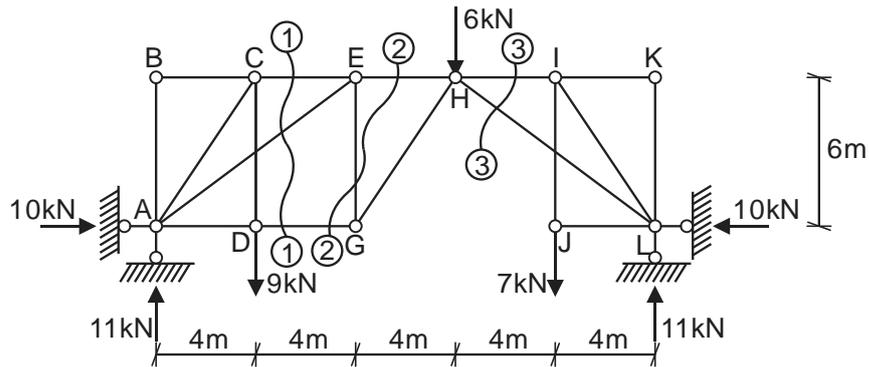
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_L(20) - 9(4) - 6(12) - 7(16) = 0 \quad \therefore V_L = 11\text{kN } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - 9 - 6 - 7 + 11 = 0 \quad \therefore V_A = 11\text{kN } \uparrow$$

$$\sum M_H^{der} = 0 \Rightarrow -7(4) + 11(8) - H_L(6) = 0 \quad \therefore H_L = 10\text{kN } \leftarrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A - 10 = 0 \quad \therefore H_A = 10\text{kN } \rightarrow$$

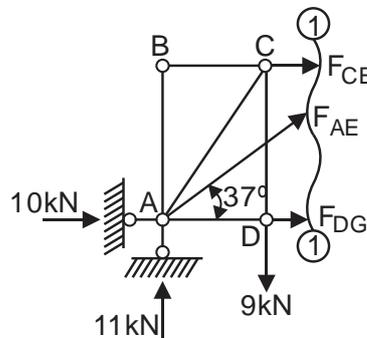
Para determinar las fuerzas internas en las barras AE, EG y HL, efectuamos los cortes mostrados en la siguiente figura.



Como no sabemos las orientaciones de las fuerzas internas, asumiremos en todos los cortes como si fueran de tracción, lo cual se corroborará o corregirá de acuerdo al resultado final.

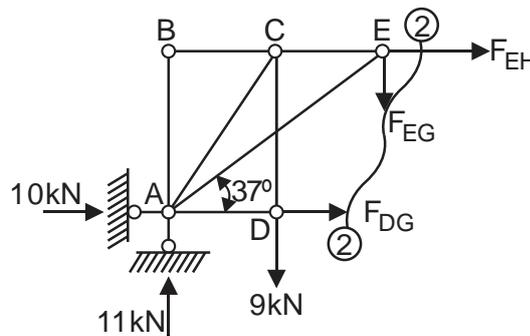
CORTE 1-1:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AE} \sin 37^\circ + 11 - 9 = 0 \quad \therefore \quad F_{AE} = -3,33 \text{ kN (COMPRESION)}$$



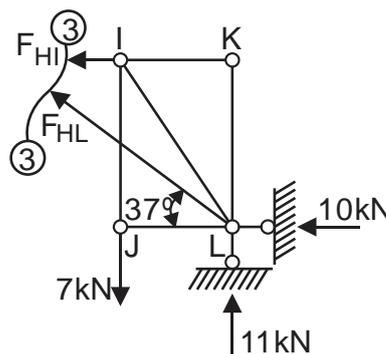
CORTE 2-2:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 11 - 9 - F_{EG} = 0 \quad \therefore \quad F_{EG} = 2 \text{ kN (TRACCION)}$$



CORTE 3-3:

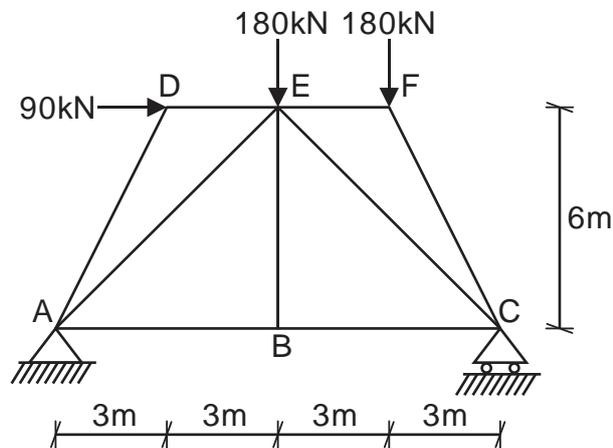
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 11 - 7 + F_{HL} \sin 37^\circ = 0 \quad \therefore \quad F_{HL} = -6,67 \text{ kN (COMPRESION)}$$



EVALUACIÓN	PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2	SEM. ACADÉMICO	2007 – I
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	100m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

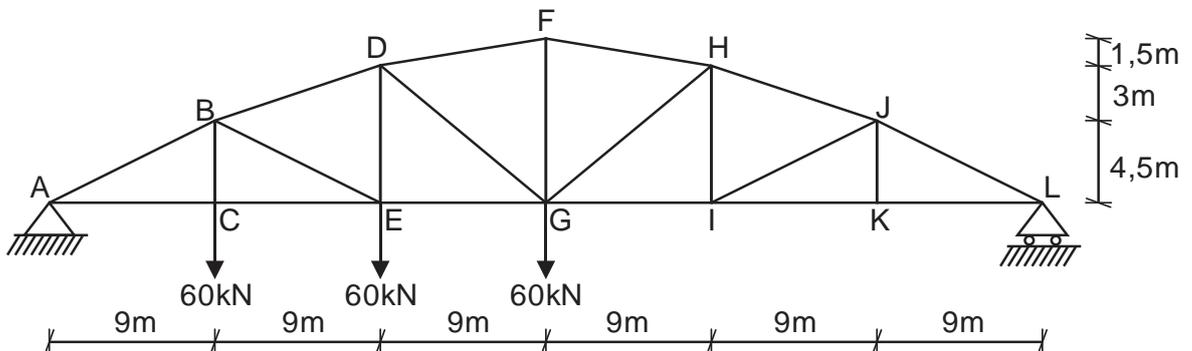
1. Para la siguiente armadura, se pide:

- Calcular las reacciones en los apoyos. (1 punto)
- Indicar las barras que no trabajan. (0.5 puntos)
- Determinar las fuerzas en el resto de barras de la armadura, usando el método de los nudos e indicando en cada caso si las fuerzas son de tracción o compresión. (2.5 puntos)



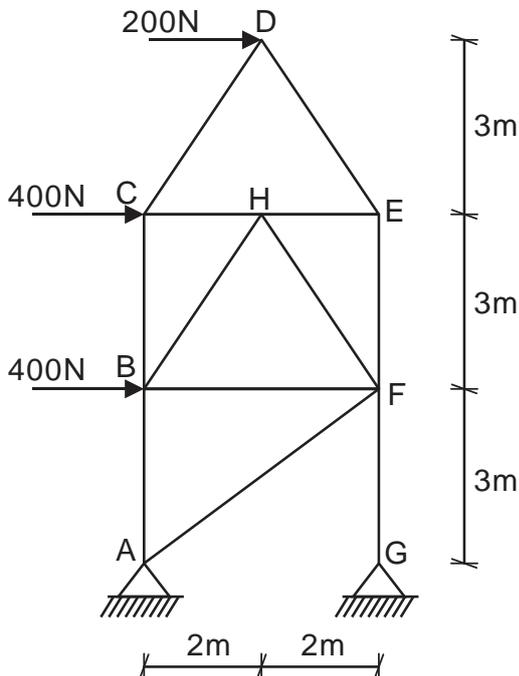
2. Para la armadura mostrada en la figura, se pide:

- Calcular las reacciones en los apoyos. (1 punto)
- Determinar las fuerzas axiales en las barras DE, GI, HI, a través del método de las secciones. (3 puntos)



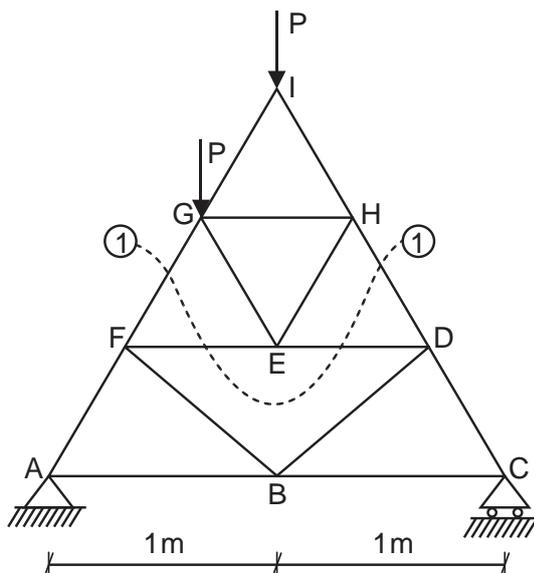
3. Para la armadura mostrada en la figura, se pide calcular:

- a) Las reacciones en los apoyos. (1 punto)
- b) Las fuerzas en las barras AB, AF y FG por el método de los nudos. (1 punto)
- c) Las fuerzas en las barras BC y EF por el método de las secciones. (1 punto)



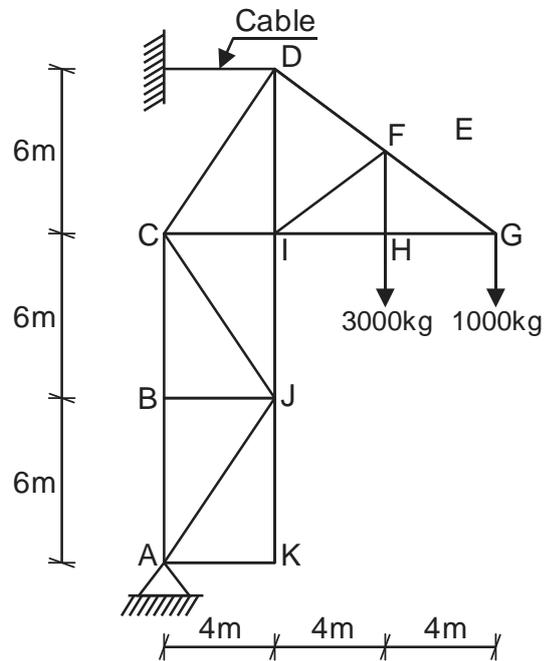
4. En la armadura mostrada en la figura, todos los triángulos que la conforman son equiláteros. Sabiendo que la fuerza axial en la barra HD es $600\sqrt{3}\text{kgf}$ en compresión, se pide:

- a) Determinar el módulo de la fuerza P (2 puntos)
- b) Calcular las componentes de reacción en los apoyos. (2 puntos)



5. Para la siguiente armadura, se pide:

- a) Determinar la tensión en el cable DE (1 punto)
- b) Calcular las reacciones en el apoyo A (1 punto)
- c) Usando el método de las secciones, determinar las fuerzas internas en las barras FD, FI, HI, CI, JC e indicar si son de tracción o compresión. (3 puntos)



FECHA	La Molina, 21 de Mayo del 2007
-------	--------------------------------

SOLUCIONARIO DE PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2

CICLO 2007 – I

1. a) Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_C(12) - 90(6) - 180(6) - 180(9) = 0 \quad \therefore V_C = 270\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 270 - 180 - 180 = 0 \quad \therefore V_A = 90\text{kN} \uparrow$$

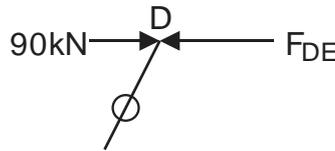
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 90 - H_A = 0 \quad \therefore H_A = 90\text{kN} \leftarrow$$

b) Las barras que no trabajan, es decir, barras nulas, son las barras AD y BE

c) Aplicamos el método de los nudos y determinamos las fuerzas internas en el resto de barras.

NUDO "D":

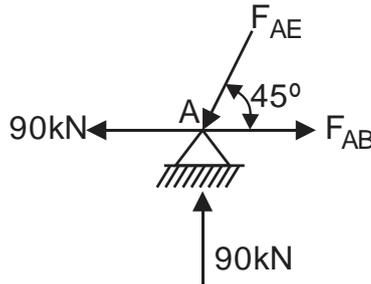
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 90 - F_{DE} = 0 \quad \therefore F_{DE} = 90\text{kN} \text{ (COMPRESION)}$$



NUDO "A":

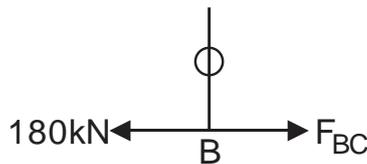
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 90 - F_{AE} \sin 45^\circ = 0 \quad \therefore F_{AE} = 127,28\text{kN} \text{ (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -90 - 127,28 \cos 45^\circ + F_{AB} = 0 \quad \therefore F_{AB} = 180\text{kN} \text{ (TRACCION)}$$



NUDO "B":

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{BC} - 180 = 0 \quad \therefore F_{BC} = 180\text{kN} \text{ (TRACCION)}$$

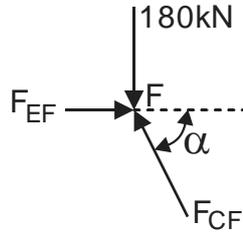


NUDO "F":

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{3} \Rightarrow \alpha = 63,43^\circ$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{CF} \sin 63,43^\circ - 180 = 0 \quad \therefore F_{CF} = 201,25\text{kN} \text{ (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{EF} - 201,25 \cos 63,43^\circ = 0 \quad \therefore F_{EF} = 90\text{kN} \text{ (COMPRESION)}$$



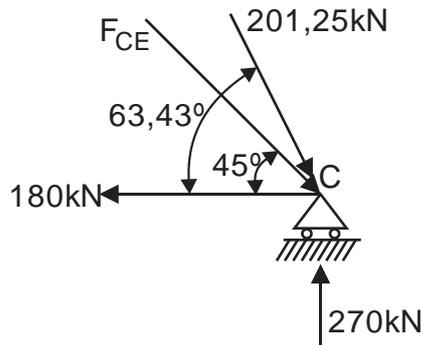
NUDO "C":

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 270 - F_{CE} \sin 45^\circ - 201,25 \sin 63,43^\circ = 0$$

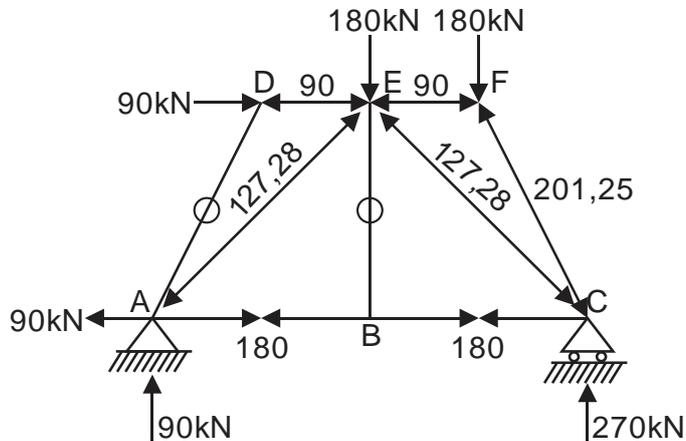
$$\therefore F_{CE} = 127,28 \text{ kN (COMPRESION)}$$

Comprobamos los resultados obtenidos, analizando el equilibrio en el eje "X"

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -180 + 127,28 \cos 45^\circ + 201,25 \cos 63,43^\circ = 0 \quad \text{OK}$$



De esta manera, la distribución final de fuerzas internas en la armadura es la mostrada en la siguiente figura.



2. a) Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_L (54) - 60(9) - 60(18) - 60(27) = 0 \quad \therefore V_L = 60 \text{ kN } \uparrow$$

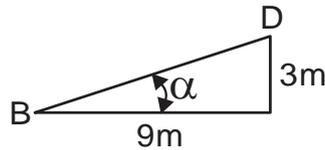
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 60 - 60 - 60 - 60 = 0 \quad \therefore V_A = 120 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

b) CORTE 1-1:

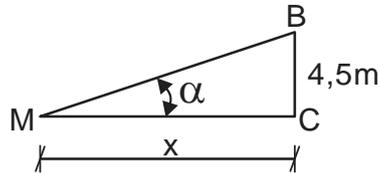
Calculamos el valor del ángulo α , que forma la barra BD con la horizontal.

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{9} \Rightarrow \alpha = 18,43^\circ$$



Ahora, calculamos la distancia en la horizontal de M a C

$$\operatorname{tg} 18,43^\circ = \frac{4,5}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 13,5\text{m}$$

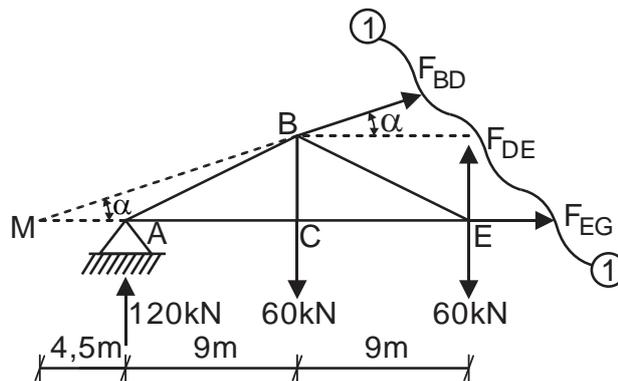


En consecuencia, la distancia $\overline{MA} = 4,5\text{m}$

Con los datos obtenidos esquematizamos el corte 1-1 y calculamos la fuerza interna en la barra DE

$$\sum M_M = 0 \quad \Rightarrow \quad 120(4,5) - 60(13,5) - 60(22,5) + F_{DE}(22,5) = 0$$

$$F_{DE} = 72\text{kN (TRACCION)}$$

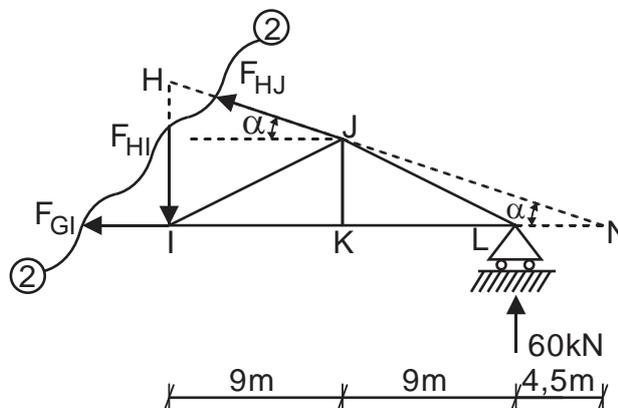


CORTE 2-2:

Efectuamos el corte 2-2 para determinar las fuerzas internas en las barras HI y GI

$$\sum M_N = 0 \quad \Rightarrow \quad -60(4,5) + F_{HI}(22,5) = 0 \quad \therefore \quad F_{HI} = 12\text{kN (COMPRESION)}$$

$$\sum M_H = 0 \quad \Rightarrow \quad 60(18) - F_{GI}(7,5) = 0 \quad \therefore \quad F_{GI} = 144\text{kN (TRACCION)}$$



3. a) Calculamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_G(4) - 400(3) - 400(6) - 200(9) = 0 \quad \therefore V_G = 1350\text{N} \uparrow$$

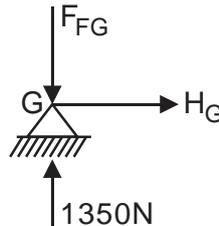
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -V_A + 1350 = 0 \quad \therefore V_A = 1350\text{N} \downarrow$$

NUDO "G":

Calculamos la reacción horizontal en G y la fuerza en la barra FG, analizando el equilibrio en el apoyo G, por el método de los nudos.

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_G = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 1350 - F_{FG} = 0 \quad \therefore F_{FG} = 1350\text{N (COMPRESION)}$$



Retornamos a la armadura original, analizando su equilibrio total.

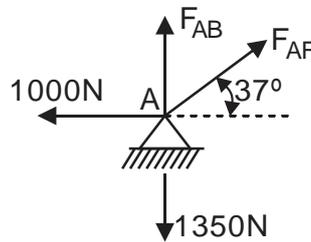
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 400 + 400 + 200 - H_A = 0 \quad \therefore H_A = 1000\text{N} \leftarrow$$

b) NUDO "A":

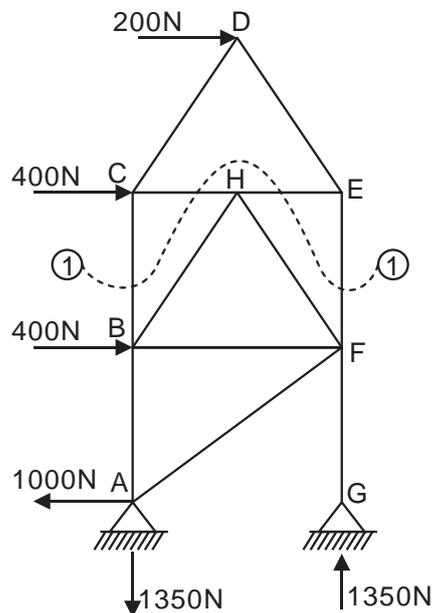
Analizamos el equilibrio en el apoyo A de la armadura.

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{AF} \cos 37^\circ - 1000 = 0 \quad \therefore F_{AF} = 1250\text{N (TRACCION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{AB} + 1250 \sin 37^\circ - 1350 = 0 \quad \therefore F_{AB} = 600\text{N (TRACCION)}$$



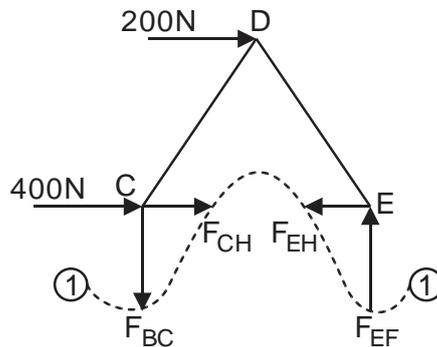
c) Efectuamos el corte 1-1, tal como se muestra en la siguiente figura.



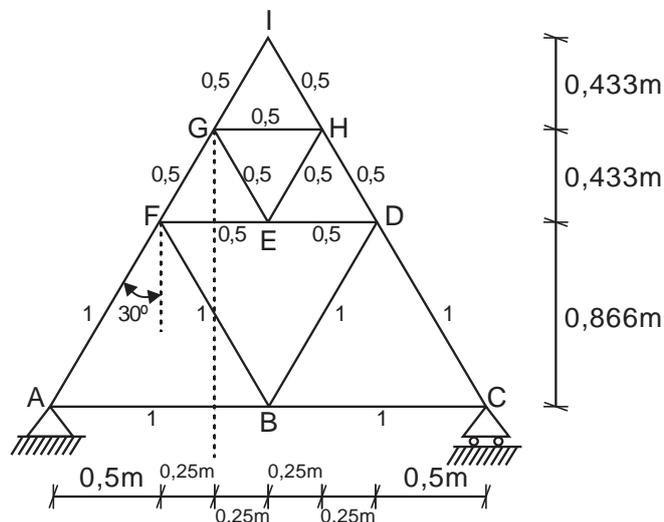
Ahora, analizamos el equilibrio de la parte superior al corte 1-1

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -200(3) + F_{BC}(4) = 0 \quad \therefore F_{BC} = 150\text{N (TRACCION)}$$

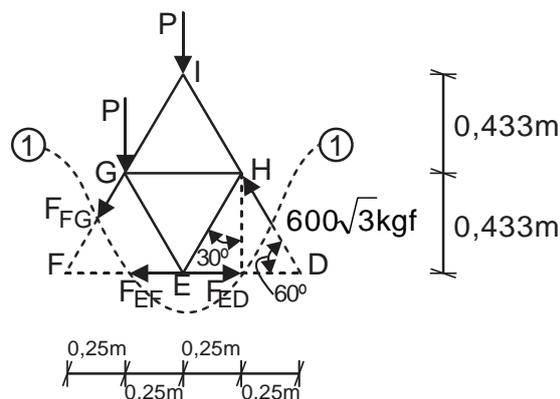
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{EF} - 150 = 0 \quad \therefore F_{EF} = 150\text{N (COMPRESION)}$$



4. a) Distribuimos las distancias y longitudes de las barras de la armadura, sabiendo que un triángulo equilátero es aquel cuyos lados son iguales y los ángulos internos son de 60° cada uno.



Ahora, efectuamos el corte 1-1 y analizamos el equilibrio de la parte superior de la armadura.



$$\sum M_F = 0 \Rightarrow 600\sqrt{3} \cos 30^\circ (0,75) + 600\sqrt{3} \text{sen} 30^\circ (0,433) - P(0,25) - P(0,5) = 0$$

$$P = 1200\text{kgf}$$

- b) Calculamos las reacciones en los apoyos, analizando toda la armadura.

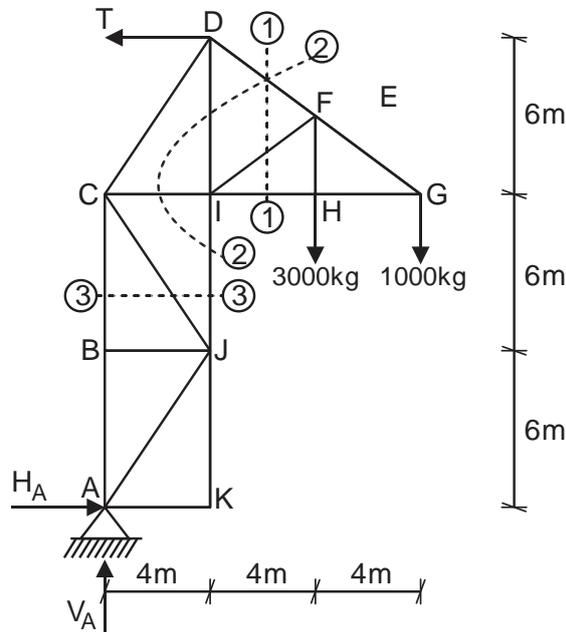
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_C(2) - 1200(0,75) - 1200(1) = 0 \quad \therefore V_C = 1050\text{kgf} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 1050 - 2(1200) = 0 \quad \therefore V_A = 1350 \text{kgf} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

5. a) Efectuamos un corte en el cable y analizamos el equilibrio de toda la estructura, determinando la fuerza interna en el cable, denotado como T

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -3000(8) - 1000(12) + T(18) = 0 \quad \therefore T = 2000 \text{kg}$$



- b) Efectuamos el cálculo de reacciones, utilizando el mismo corte.

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A - 2000 = 0 \quad \therefore H_A = 2000 \text{kg} \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - 3000 - 1000 = 0 \quad \therefore V_A = 4000 \text{kg} \uparrow$$

- c) Aplicamos el método de las secciones para determinar las fuerzas internas en las barras requeridas.

CORTE 1-1:

Efectuamos el corte 1-1, determinando las fuerzas internas en las barras FD, FI y HI

$$\sum M_I = 0 \Rightarrow -3000(4) - 1000(8) + F_{FD} \sin 37^\circ (4) + F_{FD} \cos 37^\circ (3) = 0$$

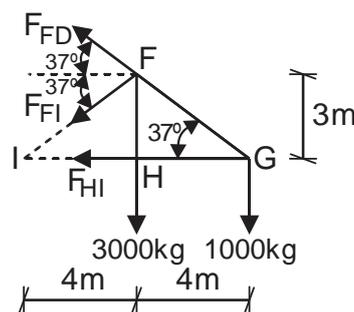
$$F_{FD} = 4166,67 \text{kg (TRACCION)}$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow 3000(4) + F_{FI} \sin 37^\circ (4) + F_{FI} \cos 37^\circ (3) = 0$$

$$F_{FI} = -2500 \text{kg (COMPRESION)}$$

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow -1000(4) - F_{HI} (3) = 0$$

$$F_{HI} = -1333,33 \text{kg (COMPRESION)}$$

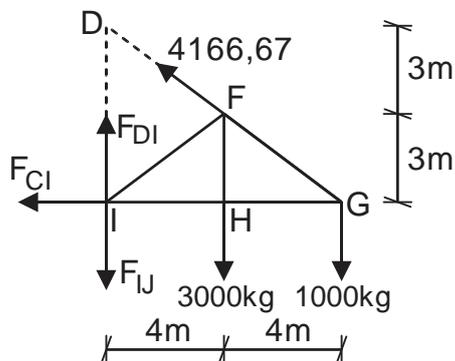


CORTE 2-2:

Analizamos el corte 2-2, determinando la fuerza interna en la barra CI

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -3000(4) - 1000(8) - F_{CI}(6) = 0$$

$$F_{CI} = -3333,33\text{kg (COMPRESION)}$$



CORTE 3-3:

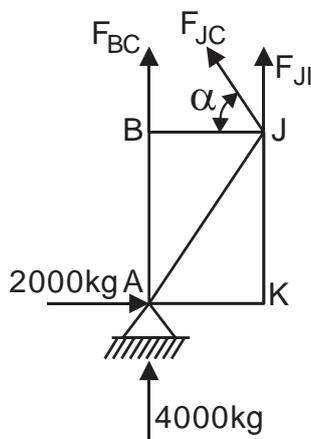
Calculamos el ángulo que forma la barra JC con la barra JB, denotado como α

$$\text{tg}\alpha = \frac{6}{4} \Rightarrow \alpha = 56,31^\circ$$

Efectuamos el equilibrio de las fuerzas en el eje horizontal.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 2000 - F_{JC} \cos 56,31^\circ = 0$$

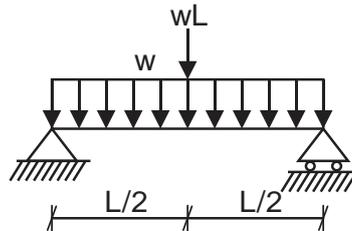
$$F_{JC} = 3605,56\text{kg (TRACCION)}$$



EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2006 – I
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	120m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

1. Responda las siguientes preguntas justificando su respuesta:

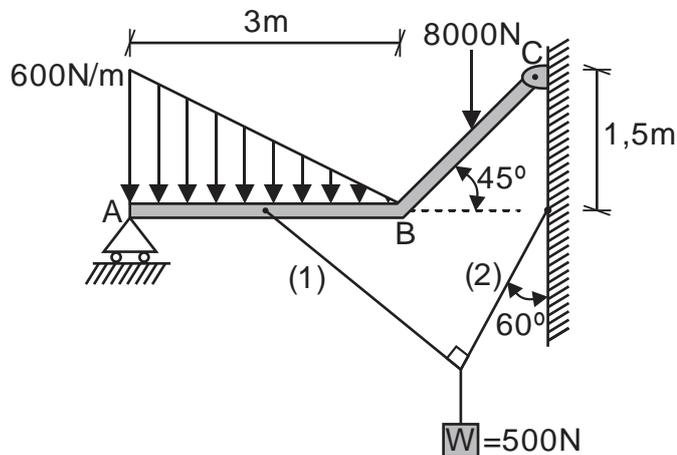
- ¿Si en una rótula actúa una carga puntual P , entonces será correcto afirmar que en dicha rótula el momento es diferente de cero? (0.5 puntos)
- ¿Será correcto afirmar, que si en un tramo de una viga, su diagrama de fuerza cortante es constante, entonces en dicho tramo su diagrama de momento flector será una línea recta inclinada? De un ejemplo. (0.5 puntos)
- Para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura, determine el momento en el centro de la luz. (1 punto)



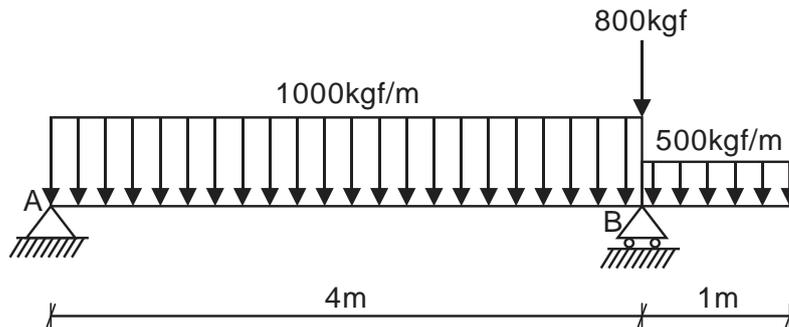
2. En la figura se muestra una barra quebrada ABC de peso despreciable, sobre la cual actúa un cable (1) en el punto medio de AB, una fuerza de 8000N en el punto medio de BC y una carga distribuida en forma triangular.

Sabiendo que el sistema está en equilibrio, se pide determinar:

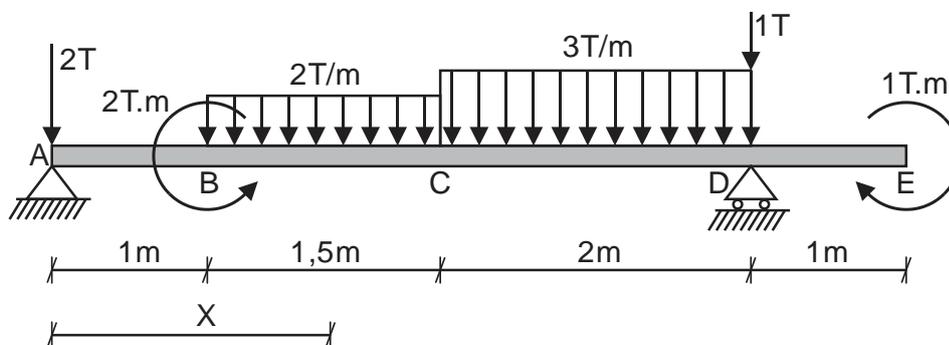
- Las tensiones en los cables (1) y (2) (1 punto)
- Las componentes de reacción en los apoyos A y C (2 puntos)
- La fuerza axial, fuerza cortante y momento flector a 2m a la derecha del apoyo A (2 puntos)



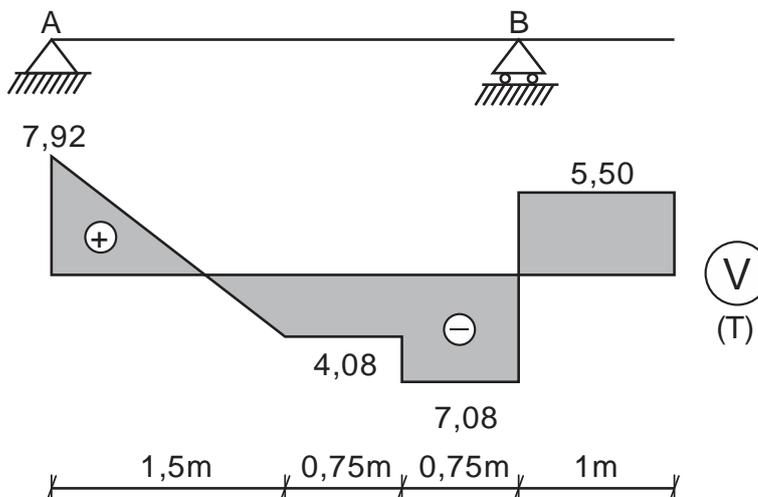
3. Dada la siguiente viga, graficar los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, debidamente acotados. (3 puntos)



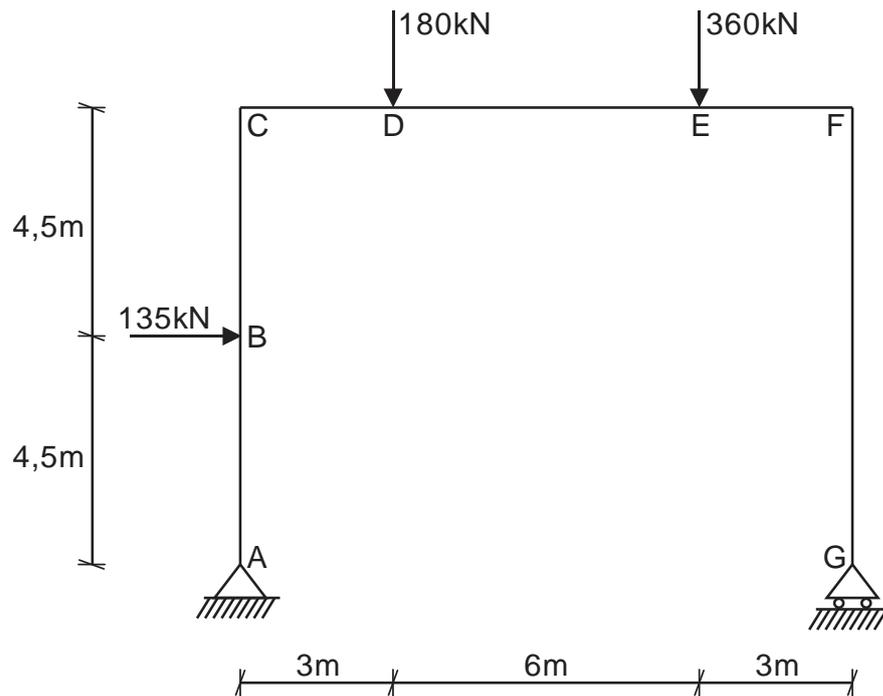
4. Para la viga mostrada en la figura, se pide:
- Determinar las ecuaciones de la fuerza cortante V y el momento flector M para el tramo BC en términos de "X", considerando el origen en A (2 puntos)
 - Graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector debidamente acotados. (2 puntos)



5. La viga mostrada en la figura está sometida únicamente a la acción de cargas puntuales y carga distribuida. Se pide:
- Esquematizar las cargas en la viga y reacciones en los apoyos. (1.5 puntos)
 - Graficar los diagramas de momento flector y refuerzo. (1.5 puntos)



6. Calcular las reacciones en los apoyos y graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura. (3 puntos)



FECHA	La Molina, 19 de Junio del 2006
--------------	---------------------------------

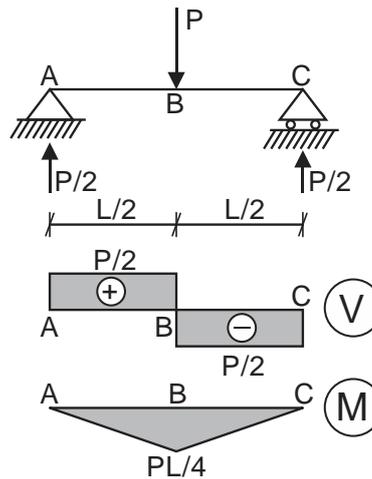
SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

CICLO 2006 – I

1. a) FALSO. El momento en la rótula siempre es cero.
 b) VERDADERO. Debido a que en dicho tramo la ecuación de la fuerza cortante es una constante, entonces la ecuación del momento será de una recta.

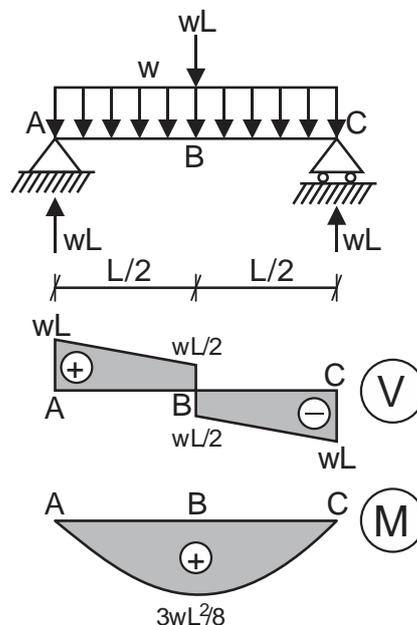
Siempre se debe de cumplir $M_{(x)} = \int V_{(x)} dx$

Como ejemplo, en la siguiente figura podemos observar que en los tramos AB y BC el diagrama de fuerza cortante es constante y el diagrama de momento flector una recta inclinada.



- c) Por simetría determinamos las reacciones en los apoyos.

$$V_A = V_C = \frac{wL + wL}{2} = wL \uparrow$$



Luego, calculamos el momento en el centro de la viga, por ecuaciones y método de las áreas.

ECUACIONES:

$$M_B = wL \left(\frac{L}{2} \right) - w \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{3wL^2}{8}$$

METODO DE LAS AREAS:

$$M_B = \frac{\left(wL + \frac{wL}{2} \right) \left(\frac{L}{2} \right)}{2} = \frac{3wL^2}{8}$$

Como podremos apreciar los resultados son los mismos.

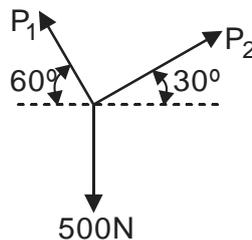
Ahora, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, que se muestran en la figura de la página anterior.

2. a) Analizamos el equilibrio del nudo donde actúa la carga $W = 500N$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P_1 \cos 60^\circ + P_2 \cos 30^\circ = 0 \quad \therefore P_1 = 1,732P_2$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_1 \sin 60^\circ + P_2 \sin 30^\circ - 500 = 0 \quad \therefore P_2 = 250N \text{ (TRACCION)}$$

$$P_1 = 433N \text{ (TRACCION)}$$



- b) Aplicamos la carga $P_1 = 433N$ a la barra de eje quebrado y analizamos su equilibrio.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow$$

$$8000(0,75) + \frac{1}{2}(3)(600)(3,5) + 433 \cos 60^\circ (1,5) + 433 \sin 60^\circ (3) - V_A (4,5) = 0$$

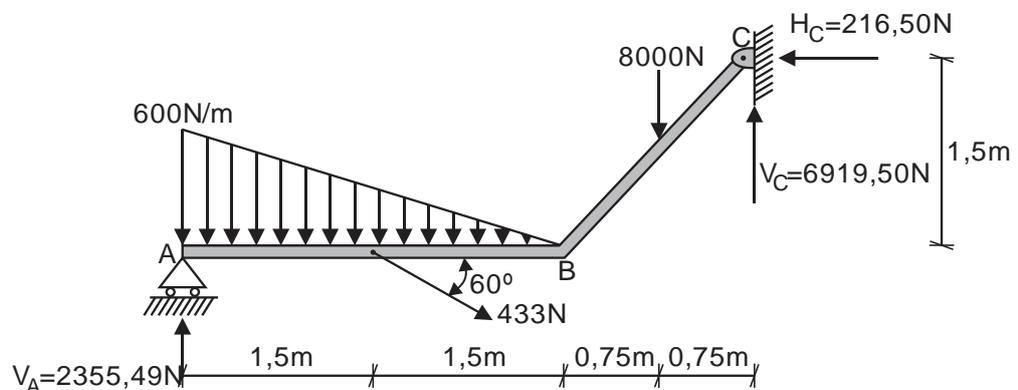
$$V_A = 2355,49N \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2355,49 + V_C - \frac{1}{2}(3)(600) - 8000 - 433 \sin 60^\circ = 0$$

$$V_C = 6919,50N \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 433 \cos 60^\circ - H_C = 0$$

$$H_C = 216,50N \leftarrow$$



- c) Identificamos como D el punto ubicado a 2m a la derecha del apoyo A y efectuamos un corte, orientando en forma positiva las fuerzas internas, analizando su equilibrio.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_D + 433 \cos 60^\circ = 0$$

$$N_D = -216,50 \text{ N (COMPRESION)}$$

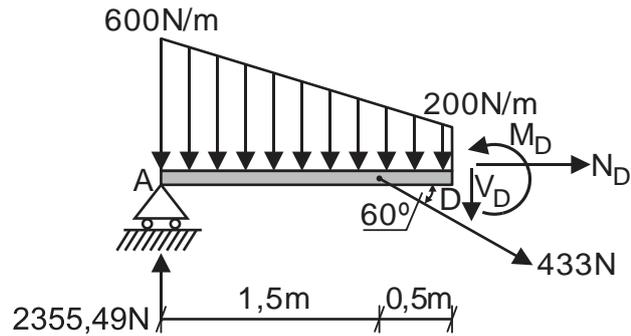
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 2355,49 - \frac{(600 + 200) \cdot 2}{2} - 433 \sin 60^\circ - V_D = 0$$

$$V_D = 1180,50 \text{ N}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow$$

$$-2355,49(2) + 433 \sin 60^\circ (0,5) + 200(2)(1) + \frac{1}{2}(2)(400) \left(\frac{2}{3} \cdot 2 \right) + M_D = 0$$

$$M_D = 3590,15 \text{ N.m}$$



3. Determinamos las reacciones en los apoyos.

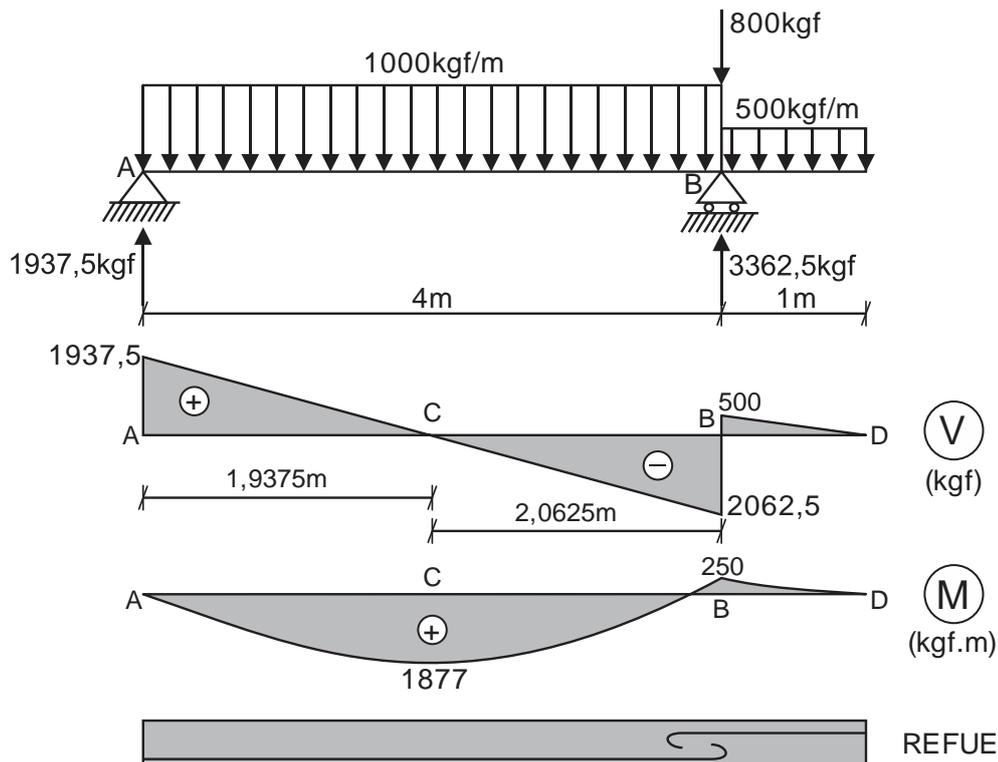
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B(4) - 1000(4)(2) - 800(4) - 500(1)(4,5) = 0$$

$$V_B = 3362,5 \text{ kgf } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 3362,5 - 1000(4) - 800 - 500(1) = 0$$

$$V_A = 1937,5 \text{ kgf } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$



Con los valores obtenidos graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, efectuando este último por el método de las áreas.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_C = \frac{1}{2}(1,9375)(1937,5) = 1877 \text{kgf} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 1877 - \frac{1}{2}(2,0625)(2062,5) = -250 \text{kgf} \cdot \text{m}$$

$$M_D = -250 + \frac{1}{2}(1)(500) = 0$$

El diagrama de refuerzo lo realizamos de acuerdo al signo del diagrama de momento flector.

4. a) Calculamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_D(4,5) + 2 - 2(1,5)(1,75) - 3(2)(3,5) - 1(4,5) = 0$$

$$V_D = 6,61T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 6,61 - 2 - 2(1,5) - 3(2) - 1 = 0$$

$$V_A = 5,39T \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Efectuamos un corte a una distancia "X" del apoyo A, perteneciente al tramo BC, es decir, en un nuevo punto F, analizando su equilibrio.

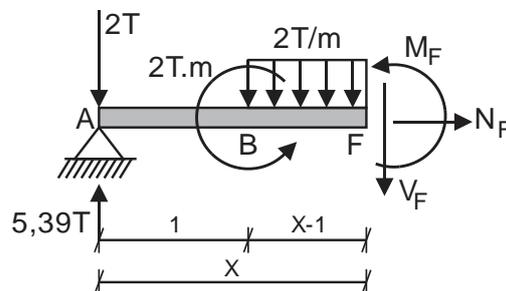
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_F = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 5,39 - 2 - 2(X-1) - V_F = 0$$

$$V_F = 5,39 - 2X$$

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow -5,39X + 2X + 2 + 2 \frac{(X-1)^2}{2} + M_F = 0$$

$$M_F = -X^2 + 5,39X - 3$$



- b) Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, aplicando el método de las áreas para este último, quedando a criterio del lector la comprobación de los resultados para el tramo BC, a través de las fórmulas obtenidas.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_B^{\text{antes}} = 3,39(1) = 3,39T \cdot \text{m}$$

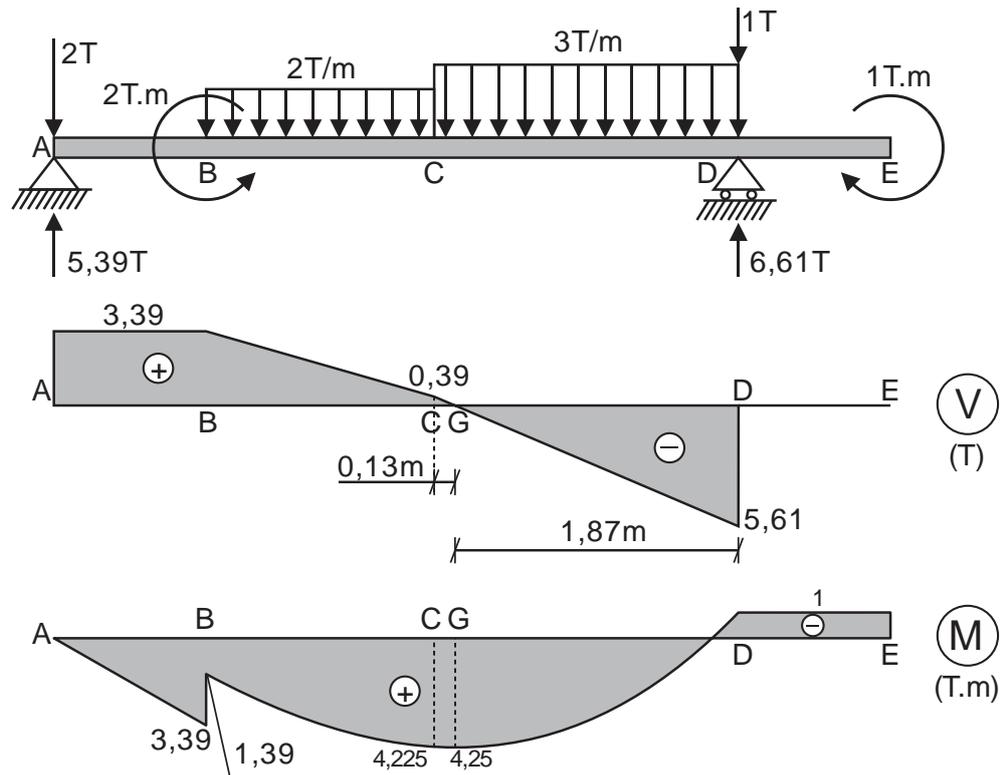
$$M_B^{\text{después}} = 3,39 - 2 = 1,39T.m$$

$$M_C = 1,39 + \frac{(0,39 + 3,39) \cdot 1,5}{2} = 4,225T.m$$

$$M_G = 4,225 + \frac{1}{2}(0,13)(0,39) = 4,25T.m$$

$$M_D = 4,25 - \frac{1}{2}(1,87)(5,61) = -1T.m$$

$$M_E = -1 + 1 = 0$$



5. a) En función del diagrama de fuerza cortante, se obtienen las reacciones en los apoyos y cargas aplicadas sobre la viga, tal como se muestra en la figura de la siguiente página.
- b) Graficamos el diagrama de momento flector, a través del método de las áreas.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_C = \frac{1}{2}(0,99)(7,92) = 3,92T.m$$

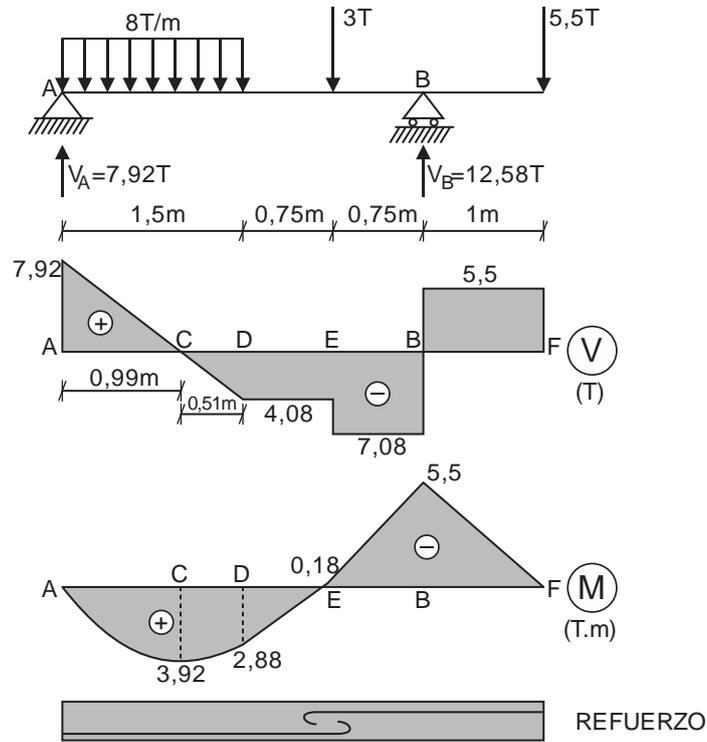
$$M_D = 3,92 - \frac{1}{2}(0,51)(4,08) = 2,88T.m$$

$$M_E = 2,88 - 4,08(0,75) = -0,18T.m$$

$$M_B = -0,18 - 7,08(0,75) = -5,5T.m$$

$$M_F = -5,5 + 5,5(1) = 0$$

El diagrama de refuerzo lo efectuamos de acuerdo al signo del diagrama de momento flector.



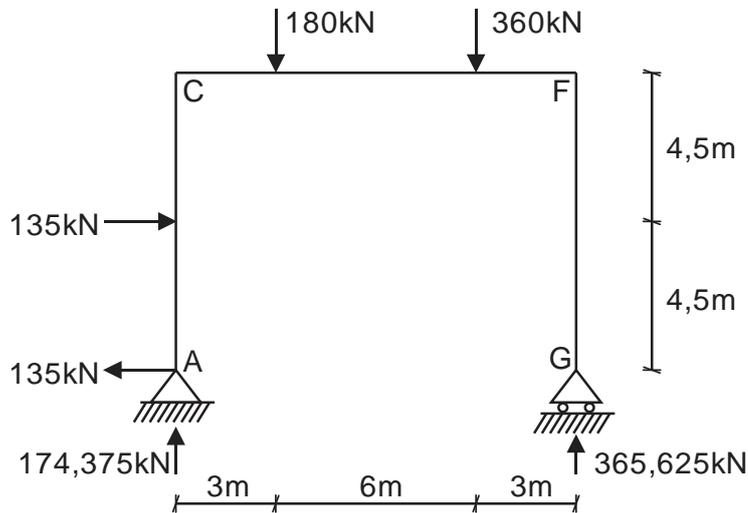
6. Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_G(12) - 135(4,5) - 180(3) - 360(9) = 0 \quad \therefore V_G = 365,625 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 365,625 - 180 - 360 = 0 \quad \therefore V_A = 174,375 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 135 - H_A = 0 \quad \therefore H_A = 135 \text{ kN} \leftarrow$$

En la siguiente figura se muestran las reacciones en los apoyos.



Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "N":

$$N_{AC} = -174,375 \text{ kN} \quad (\text{COMPRESIÓN})$$

$$N_{FG} = -365,625 \text{ kN} \quad (\text{COMPRESIÓN})$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la siguiente figura.

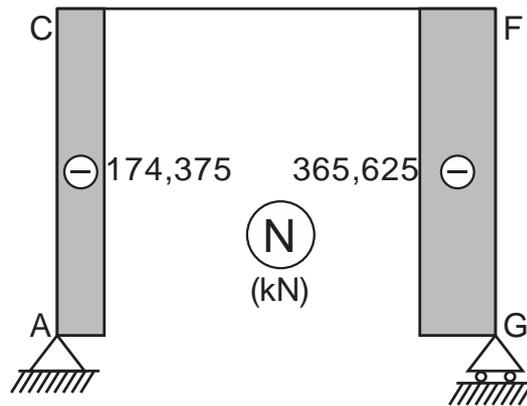


DIAGRAMA "V":

$$V_{AB} = 135\text{kN}$$

$$V_{BC} = 0$$

$$V_{CD} = 174,375\text{kN}$$

$$V_{DE} = 174,375 - 180 = -5,625\text{kN}$$

$$V_{EF} = -5,625 - 360 = -365,625\text{kN}$$

$$V_{FG} = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la siguiente figura.

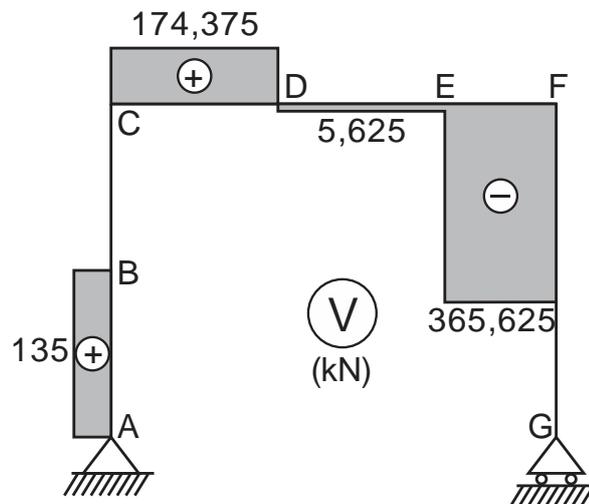


DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_B = 135(4,5) = 607,5\text{kN.m}$$

$$M_C = 607,5 + 0 = 607,5\text{kN.m}$$

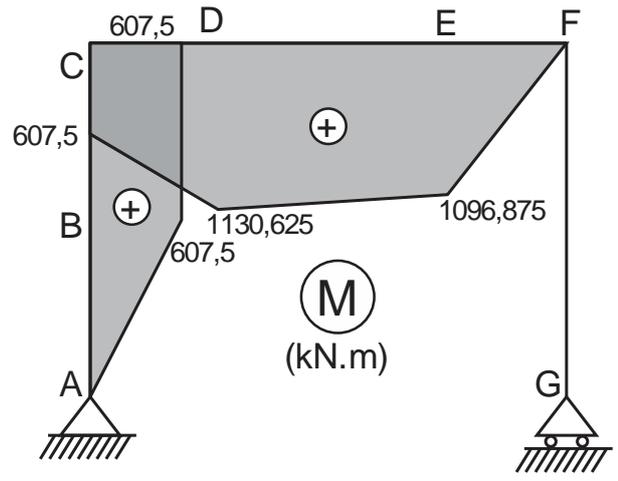
$$M_D = 607,5 + 174,375(3) = 1130,625\text{kN.m}$$

$$M_E = 1130,625 - 5,625(6) = 1096,875\text{kN.m}$$

$$M_F = 1096,875 - 365,625(3) = 0$$

$$M_G = 0$$

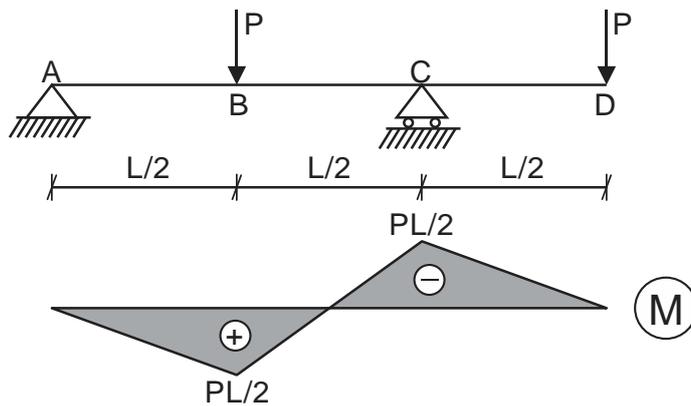
Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la siguiente figura.



EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2006 – II
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	120m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

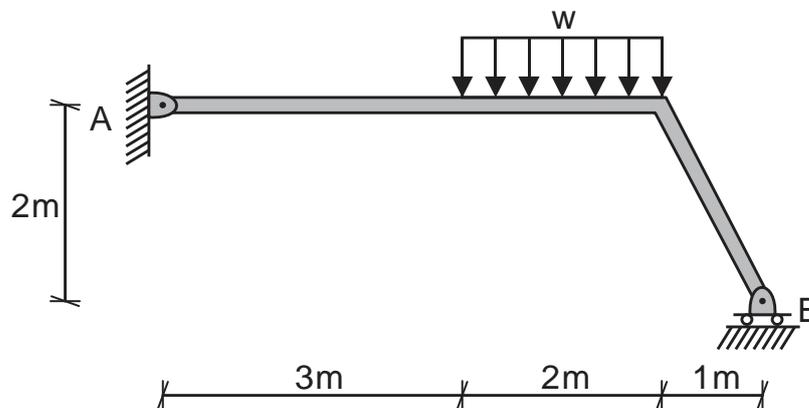
1. Responda las siguientes preguntas justificando su respuesta:

- Si la expresión de la fuerza cortante $V_{(x)}$ es de grado 2, ¿de qué grado será la expresión de su momento flector $M_{(x)}$? (0.5 puntos)
- Se tiene una viga de concreto armado de sección transversal rectangular de ancho B, altura 50cm y 5,20m de longitud; sabiendo que dicho elemento estructural pesa 1560kgf, calcule el ancho B de la viga, si el peso específico del concreto armado es de 2400kgf/m³ (0.5 puntos)
- ¿El diagrama de momento flector corresponde a la viga o no? (1 punto)

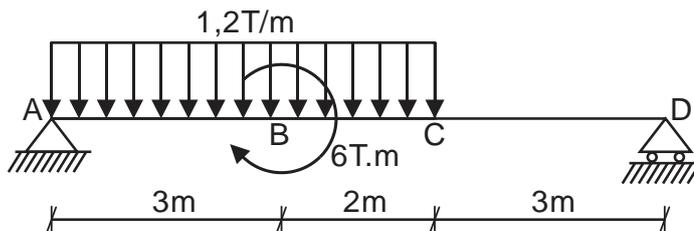


2. En la siguiente estructura en equilibrio se tiene una barra doblada AB, donde la reacción en el apoyo B es 300kgf, determine:

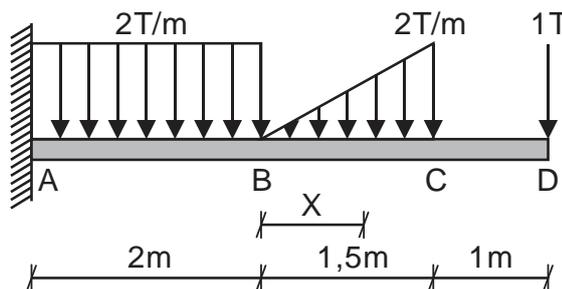
- El valor de "w" (1 punto)
- Las fuerzas internas a 2m a la derecha del apoyo A (1 punto)



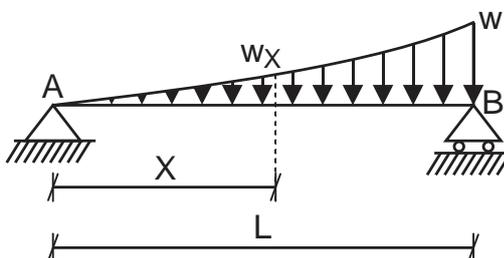
3. Para la viga mostrada en la figura, graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector, debidamente acotados. (3 puntos)



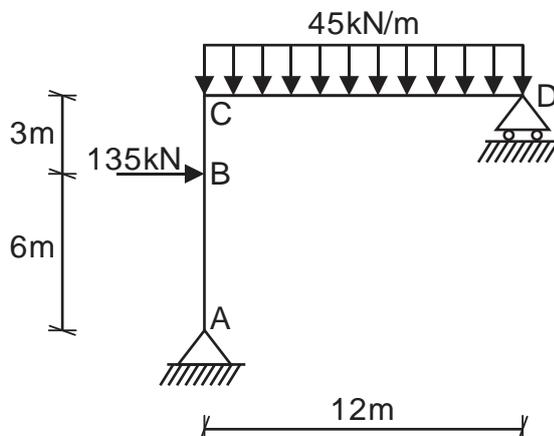
4. Para la viga en voladizo con empotramiento en A, se pide:
- Determinar las ecuaciones de la fuerza cortante V y el momento flector M para el tramo BC en términos de "X", considerando el origen en B (2 puntos)
 - Graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector debidamente acotados. (3 puntos)



5. Para la viga mostrada en la figura, graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector, si la carga distribuida varía por una dependencia cuadrática $w_x = w\left(\frac{X}{L}\right)^2$ (5 puntos)



6. Calcular las reacciones en los apoyos y graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura. (3 puntos)



SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

CICLO 2006 – II

1. a) Como:

$$V = \frac{dM}{dx} \Rightarrow M = \int V dx$$

En consecuencia, si la ecuación de la cortante V es de grado 2, entonces la ecuación del momento M será de grado 3

Para que se produzca esto, en dicho tramo, debe de existir carga triangular.

b) Por dato del problema:

$$1560 = 2400(B)(0,5)(5,2) \Rightarrow B = 0,25m = 25cm$$

c) Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_C(L) - P\left(\frac{L}{2}\right) - P\left(\frac{3L}{2}\right) = 0 \quad \therefore V_C = 2P \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - P + 2P - P = 0 \quad \therefore V_A = 0$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, aplicando para este último el método de las áreas.

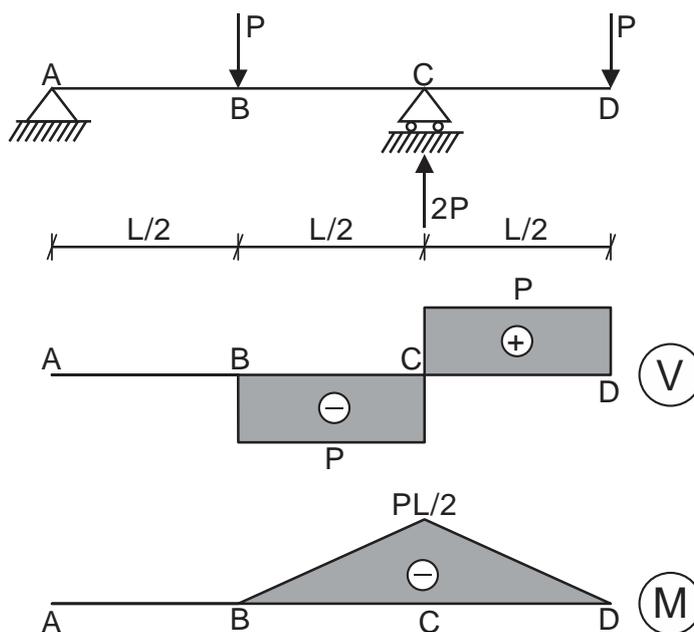
DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_B = 0$$

$$M_C = -P\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL}{2}$$

$$M_D = -\frac{PL}{2} + P\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$



De esta manera, se concluye que es FALSO, porque dicho diagrama de momento M no corresponde con el del enunciado del problema.

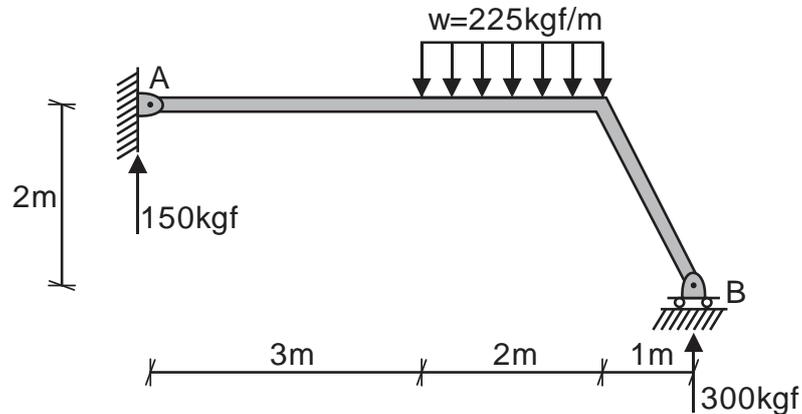
2. a) Aplicamos las ecuaciones de equilibrio para determinar el valor de "w" y las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 300(6) - w(2)(4) = 0 \quad \therefore w = 225 \text{kgf/m}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 300 - 225(2) = 0 \quad \therefore V_A = 150 \text{kgf} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

De esta manera, los valores de la carga y reacciones son las mostradas en la siguiente figura.

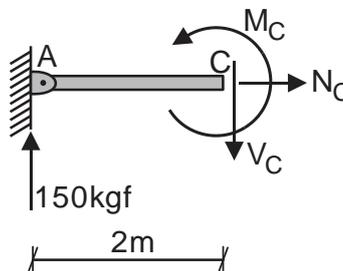


- b) Efectuamos un corte a 2m a la derecha del apoyo A y lo denotamos como C

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_C = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 150 - V_C = 0 \quad \therefore V_C = 150 \text{kgf}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -150(2) + M_C = 0 \quad \therefore M_C = 300 \text{kgf.m}$$



3. Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_D(8) - 1,2(5)(2,5) - 6 = 0 \quad \therefore V_D = 2,625 \text{T} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 2,625 - 1,2(5) = 0 \quad \therefore V_A = 3,375 \text{T} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Con los valores obtenidos graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, efectuando este último, por el método de las áreas.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

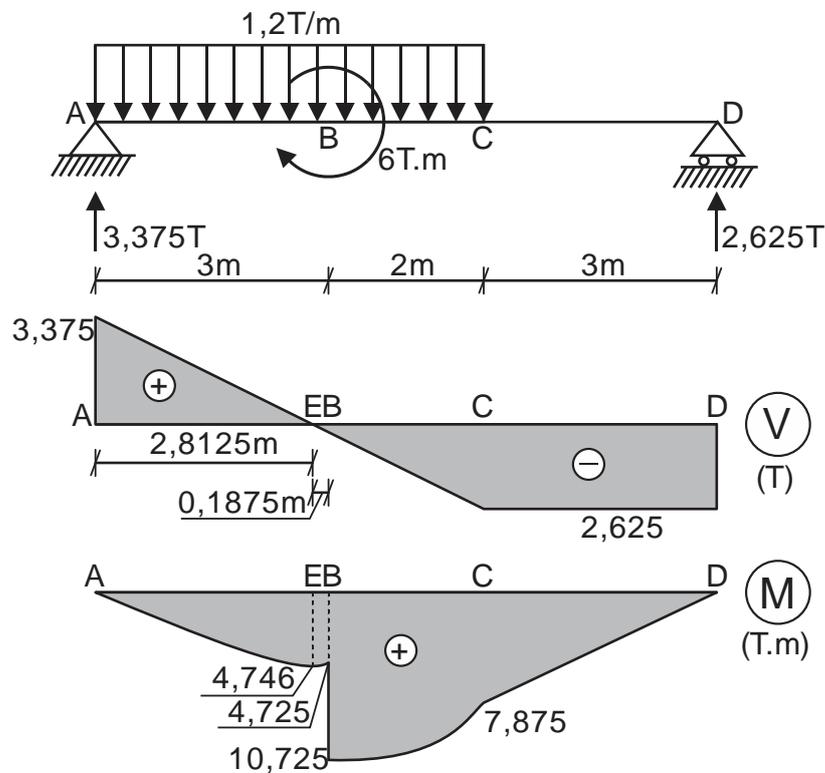
$$M_E = \frac{1}{2}(2,8125)(3,375) = 4,746 \text{T.m}$$

$$M_B^{\text{antes}} = 4,746 - \frac{1}{2}(0,1875)(0,225) = 4,725 \text{T.m}$$

$$M_B^{\text{después}} = 4,725 + 6 = 10,725 \text{T.m}$$

$$M_C = 10,725 - \frac{(2,625 + 0,225) \cdot 2}{2} = 7,875 \text{T.m}$$

$$M_D = 7,875 - 2,625(3) = 0$$



4. a) Calculamos las reacciones en el empotramiento.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 2(2) - \frac{1}{2}(1,5)(2) - 1 = 0 \quad \therefore V_A = 6,5 \text{T} \uparrow$$

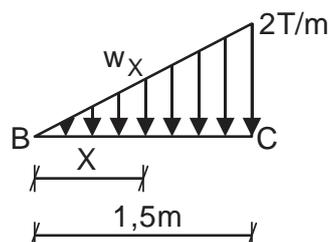
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 2(2)(1) - \frac{1}{2}(1,5)(2)(3) - 1(4,5) = 0$$

$$\therefore M_A = 13 \text{T.m}$$

El momento en A va en sentido antihorario.

Luego, obtenemos el valor de w_x para el tramo BC

$$\frac{w_x}{X} = \frac{2}{1,5} \Rightarrow w_x = 1,333X$$



Efectuamos un corte en el tramo BC y analizamos su equilibrio.

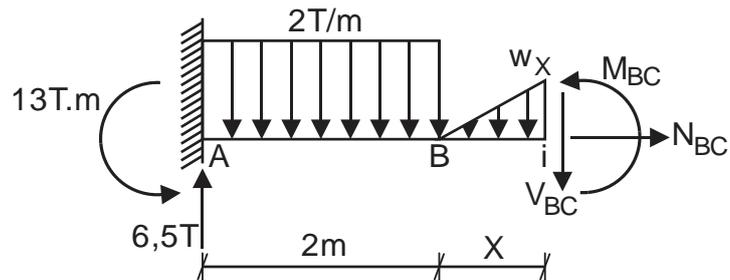
$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_{BC} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 6,5 - 2(2) - \frac{1}{2}(X)(1,333X) - V_{BC} = 0$$

$$V_{BC} = -0,667X^2 + 2,5$$

$$\sum M_i = 0 \Rightarrow -6,5(2 + X) + 13 + 2(2)(1 + X) + \frac{1}{2}(X)(1,333X)\left(\frac{X}{3}\right) + M_{BC} = 0$$

$$M_{BC} = -0,222X^3 + 2,5X - 4$$



- b) Con las ecuaciones obtenidas, determinamos los valores de la fuerza cortante y momento flector en el tramo BC

TRAMO BC			
PUNTO	X (m)	V (T)	M (T.m)
B	0	2,5	-4
F	0,75	2,125	-2,219
C	1,5	1	-1

Para el resto de puntos, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector por los métodos conocidos.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = -13T.m$$

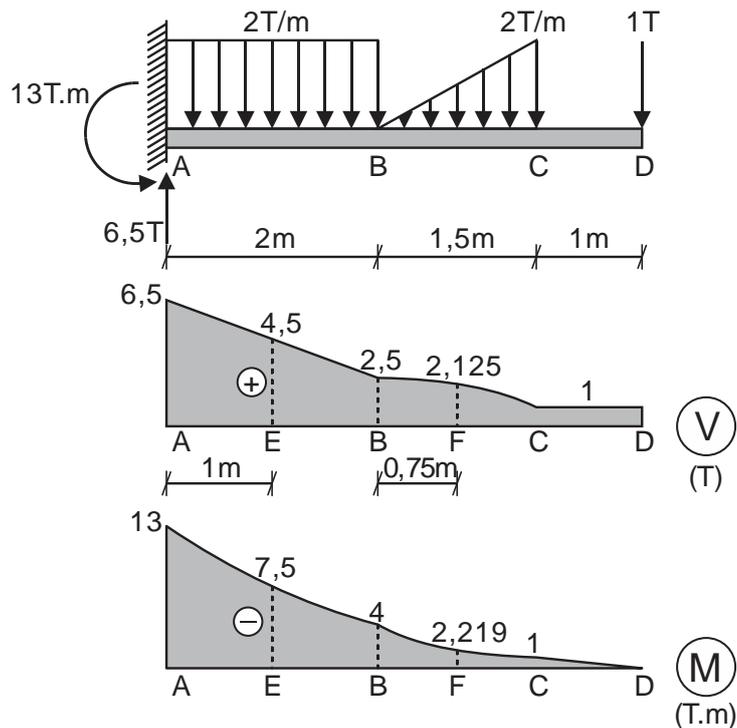
$$M_E = -13 + \frac{(6,5 + 4,5) \cdot 1}{2} = -7,5T.m$$

$$M_B = -7,5 + \frac{(4,5 + 2,5) \cdot 1}{2} = -4T.m$$

$$M_D = -1 + 1(1) = 0$$

De esta manera, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

TRAMO	V	M
AB	Línea recta	Parábola cuadrática
BC	Parábola cuadrática	Parábola cúbica
CD	Constante	Línea recta



5. Para obtener las ecuaciones de la cortante y del momento, aplicamos la siguiente relación diferencial.

$$\frac{d^2M}{dX^2} = -w_x = -w\left(\frac{X}{L}\right)^2$$

Integramos en forma consecutiva dos veces y obtenemos:

$$\frac{dM}{dX} = V = -\frac{wX^3}{3L^2} + C_1$$

$$M = -\frac{wX^4}{12L^2} + C_1X + C_2$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 , lo determinamos a través de las condiciones de borde o extremos.

a) Si $X = 0 \Rightarrow M_{X=0} = 0 \quad \therefore C_2 = 0$

b) Si $X = L \Rightarrow M_{X=L} = 0 \quad \therefore C_1 = \frac{wL}{12}$

De esta manera, las ecuaciones resultantes de la fuerza cortante y momento flector son:

$$V_{(X)} = -\frac{wX^3}{3L^2} + \frac{wL}{12}$$

$$M_{(X)} = -\frac{wX^4}{12L^2} + \frac{wLX}{12}$$

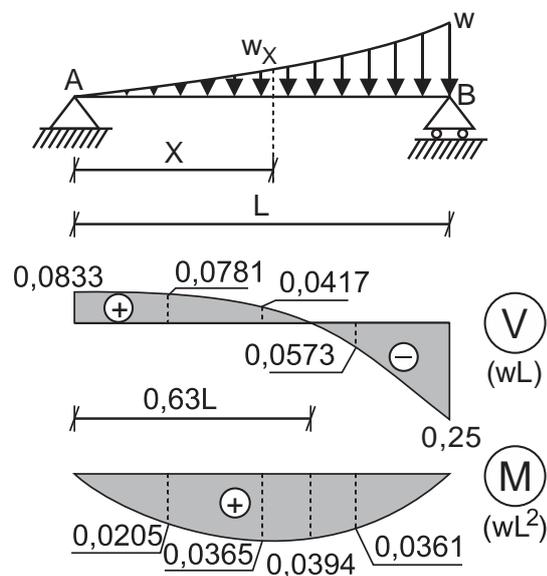
Como sabemos, donde la fuerza cortante es cero, el momento será máximo, para ello, igualamos a cero la ecuación de la fuerza cortante.

$$-\frac{wX^3}{3L^2} + \frac{wL}{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0,63L$$

Para tener una mejor forma del diagrama, lo efectuamos a través de la siguiente tabla.

X (L)	V (wL)	M (wL ²)
0	0,0833	0
0,25	0,0781	0,0205
0,5	0,0417	0,0365
0,63	0	0,0394
0,75	-0,0573	0,0361
1	-0,25	0

Con los valores obtenidos, graficamos los diagramas finales de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la siguiente figura.



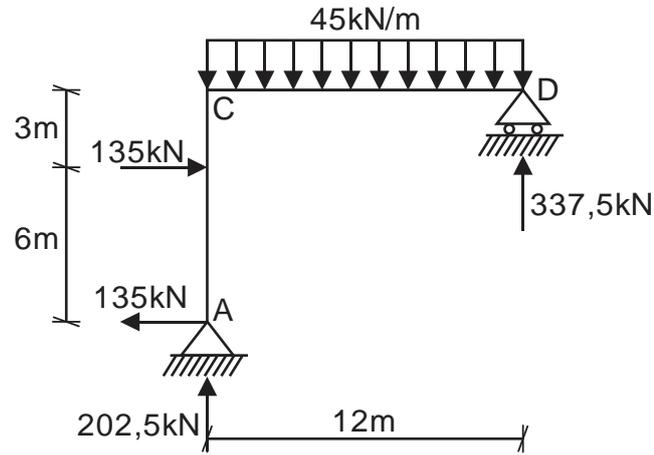
6. Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_D(12) - 135(6) - 45(12)(6) = 0 \quad \therefore V_D = 337,50 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 337,50 - 45(12) = 0 \quad \therefore V_A = 202,50 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 135 - H_A = 0 \quad \therefore H_A = 135 \text{ kN} \leftarrow$$

En la siguiente figura se muestran las reacciones en los apoyos.



Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "N":

$$N_{AC} = -202,5\text{kN} \quad (\text{COMPRESIÓN})$$

$$N_{CD} = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la siguiente figura.

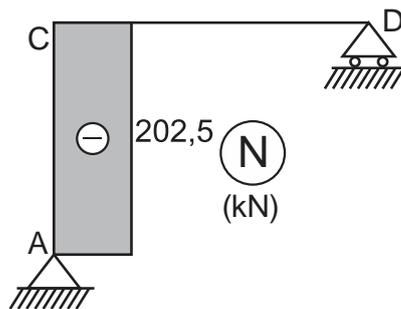


DIAGRAMA "V":

$$V_{AB} = 135\text{kN}$$

$$V_{BC} = 0$$

$$V_C^{CD} = 202,5\text{kN}$$

$$V_E^{CD} = 202,5 - 45(4,5) = 0$$

$$V_D^{CD} = 0 - 45(7,5) = -337,5\text{kN}$$

$$V_D = -337,5 + 337,5 = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la siguiente figura.

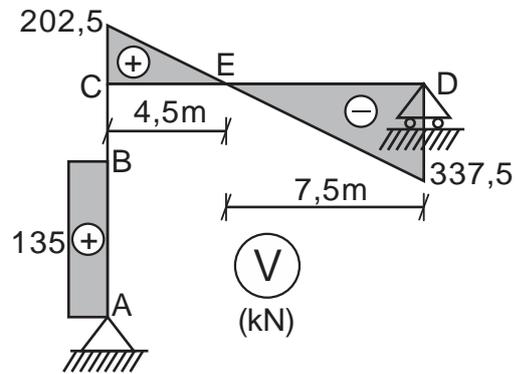


DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

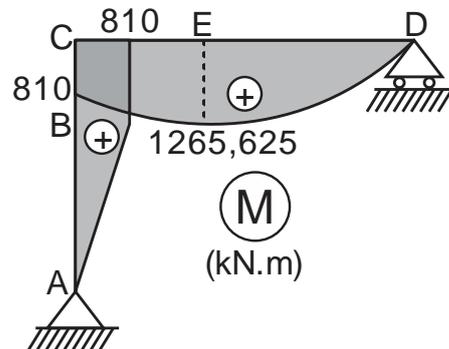
$$M_B = 135(6) = 810 \text{ kN.m}$$

$$M_C = 810 + 0 = 810 \text{ kN.m}$$

$$M_E = 810 + \frac{1}{2}(202,5)(4,5) = 1265,625 \text{ kN.m}$$

$$M_D = 1265,625 - \frac{1}{2}(337,5)(7,5) = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la siguiente figura.

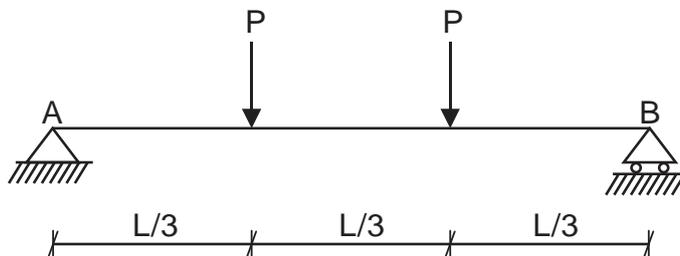




EVALUACIÓN	EXAMEN FINAL	SEM. ACADÉMICO	2007 – I
CURSO	ESTÁTICA	SECCIÓN	29D
PROFESOR	Ph.D. GENNER VILLARREAL CASTRO	DURACIÓN	120m
ESCUELA	INGENIERIA CIVIL	CICLO	IV

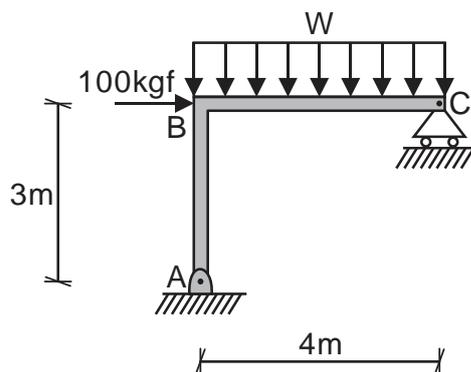
1. Responda las siguientes preguntas justificando su respuesta:

- ¿Será correcto afirmar que en una estructura, si su fuerza cortante es cero y cruza del positivo al negativo, entonces su momento flector en dicho punto también es cero? (0.5 puntos)
- Una viga simplemente apoyada de 6m de longitud pesa 2 toneladas, ¿será correcto afirmar que el momento flector máximo ocurre en el centro de la viga y vale $3T.m$? (1 punto)
- ¿Será correcto afirmar que el momento flector máximo de la viga mostrada es $PL/3$? (0.5 puntos)

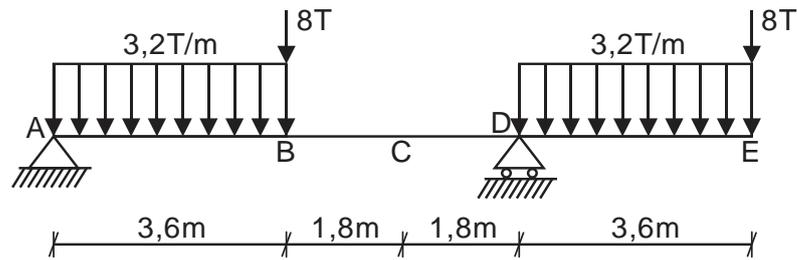


2. En el sistema homogéneo mostrado en la figura, se tiene una barra rígida doblada ABC de 140kgf de peso, donde la componente de reacción en el apoyo C es 1115kgf, se pide:

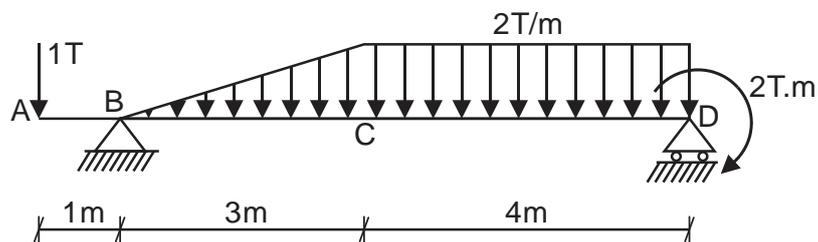
- Determinar el valor de la carga W (1.5 puntos)
- Calcular la fuerza axial o normal, fuerza cortante y momento flector a 1m a la derecha de B (1.5 puntos)



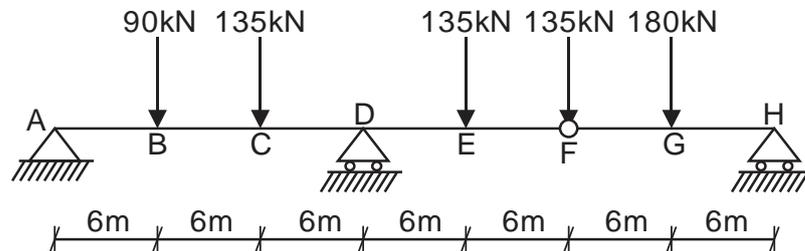
3. Para la viga mostrada en la figura, se pide:
- Calcular las reacciones en los apoyos. (1 punto)
 - Determinar las fuerzas internas en el punto C (1 punto)
 - Graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector debidamente acotados. (2 puntos)



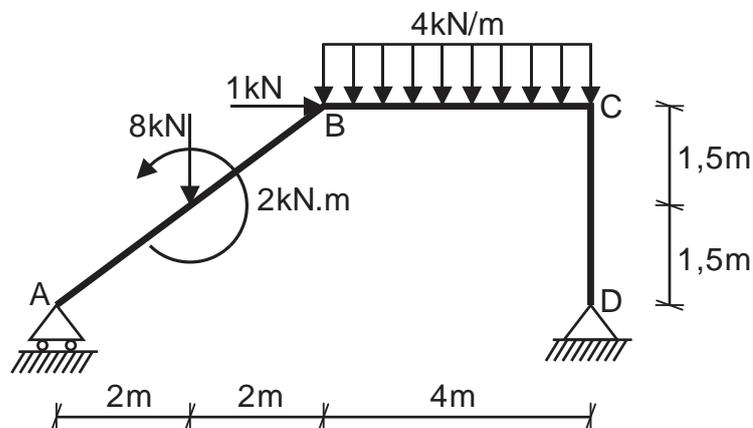
4. Para la viga mostrada en la figura, se pide:
- Determinar las ecuaciones de la fuerza cortante V y el momento flector M para el tramo BC en términos de "X", considerando el origen en B, es decir $0 \leq X \leq 3m$ (1.5 puntos)



- Graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector debidamente acotados. (2.5 puntos)
5. Para la viga mostrada en la figura, se pide:
- Calcular las reacciones en los apoyos. (1 punto)
 - Graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector debidamente acotados. (3 puntos)



6. Calcular las reacciones en los apoyos y graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura. (3 puntos)



FECHA	La Molina, 18 de Junio del 2007
-------	---------------------------------

SOLUCIONARIO DE EXAMEN FINAL

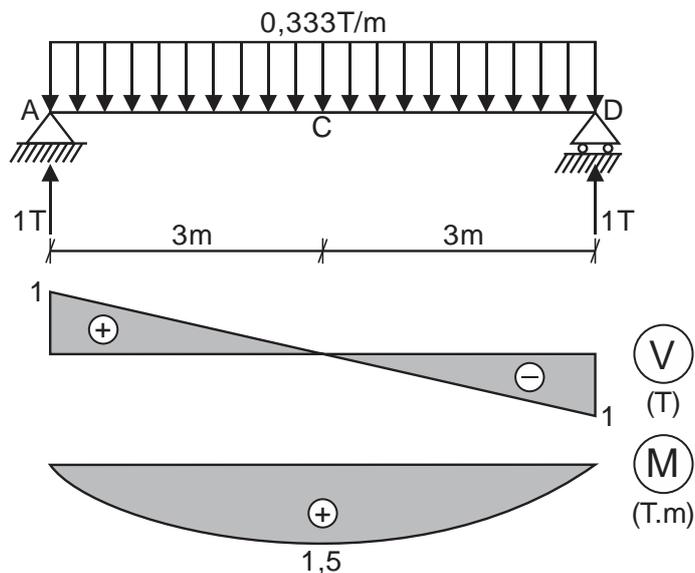
CICLO 2007 – I

1. a) FALSO. Si la fuerza cortante es cero, el momento flector será diferente de cero y máximo en dicho tramo.
- b) Calculamos el valor de la carga uniformemente distribuida (forma de representación del peso de una estructura), dividiendo el peso total entre la longitud de la viga.

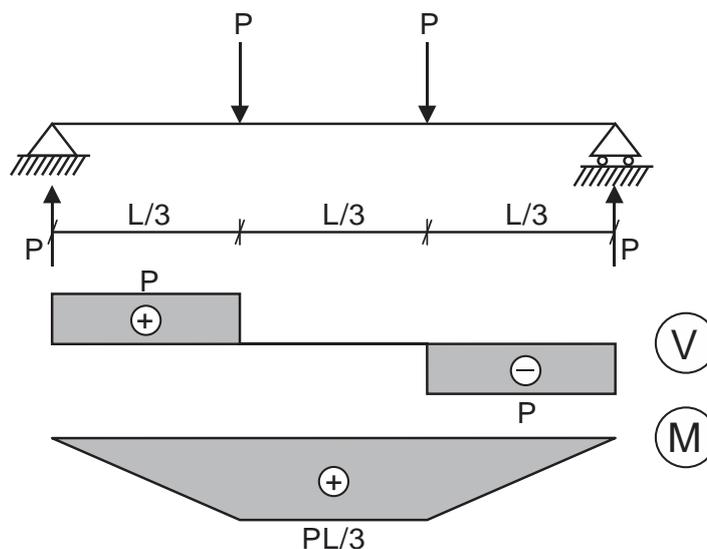
$$w = \frac{2T}{6m} = 0,333T/m$$

Esquematizamos la carga en la viga y graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, ocurriendo el momento máximo en el centro de la viga y su valor es:

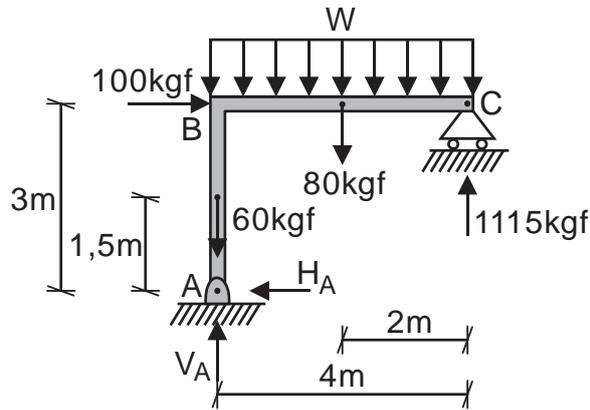
$$M_{\text{máx}} = M_c = \frac{wL^2}{8} = \frac{0,333 \cdot 6^2}{8} = 1,5T \cdot m$$



- c) VERDADERO. Como la viga es simétrica, entonces sus reacciones son iguales a P y graficamos sus diagramas de fuerza cortante y momento flector, siendo su momento máximo PL/3, tal como se muestra en la siguiente figura.



2. a) Esquematizamos los pesos, distribuidos de acuerdo a su longitud y calculamos el valor de la carga distribuida W, así como las reacciones en el apoyo A

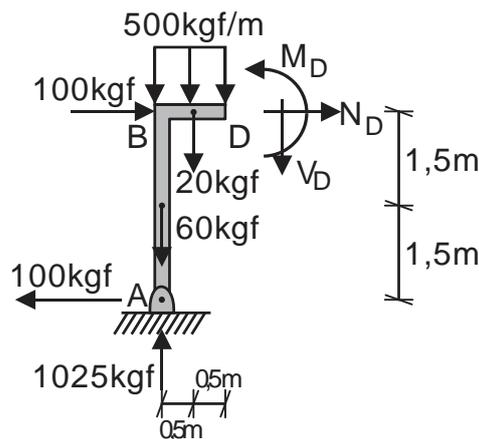


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 1115(4) - 80(2) - 100(3) - W(4)(2) = 0 \quad \therefore W = 500 \text{ kgf / m}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 100 - H_A = 0 \quad \therefore H_A = 100 \text{ kgf} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + 1115 - 60 - 80 - 500(4) = 0 \quad \therefore V_A = 1025 \text{ kgf} \uparrow$$

b) Analizamos el equilibrio a 1m a la derecha de B, efectuando un corte en dicho punto y obteniendo las fuerzas internas requeridas.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_D + 100 - 100 = 0 \quad \therefore N_D = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1025 - 60 - 20 - 500(1) - V_D = 0 \quad \therefore V_D = 445 \text{ kgf}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -1025(1) - 100(3) + 60(1) + 20(0,5) + 500(1)(0,5) + M_D = 0$$

$$\therefore M_D = 1005 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

3. a) Calculamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_D(7,2) - 3,2(3,6)(1,8) - 8(3,6) - 3,2(3,6)(9) - 8(10,8) = 0$$

$$V_D = 33,28 \text{ T} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + 33,28 - 3,2(3,6) - 8 - 3,2(3,6) - 8 = 0$$

$$V_A = 5,76 \text{ T} \uparrow$$

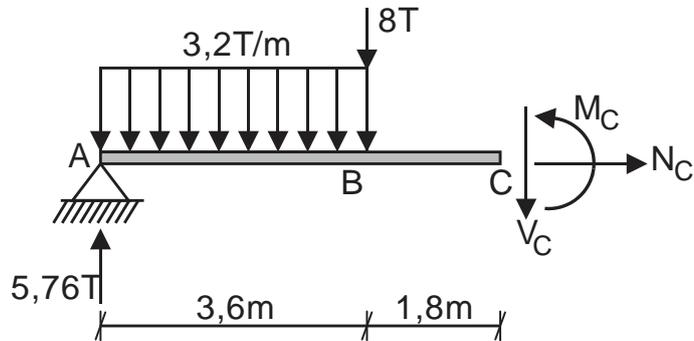
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

b) Analizamos el equilibrio de la viga en el tramo AC, determinando las fuerzas internas en C

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_C = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 5,76 - 3,2(3,6) - 8 - V_C = 0 \quad \therefore V_C = -13,76T$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C + 3,2(3,6)(3,6) + 8(1,8) - 5,76(5,4) = 0 \quad \therefore M_C = -24,768T.m$$



c) Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, efectuando este último por el método de las áreas.

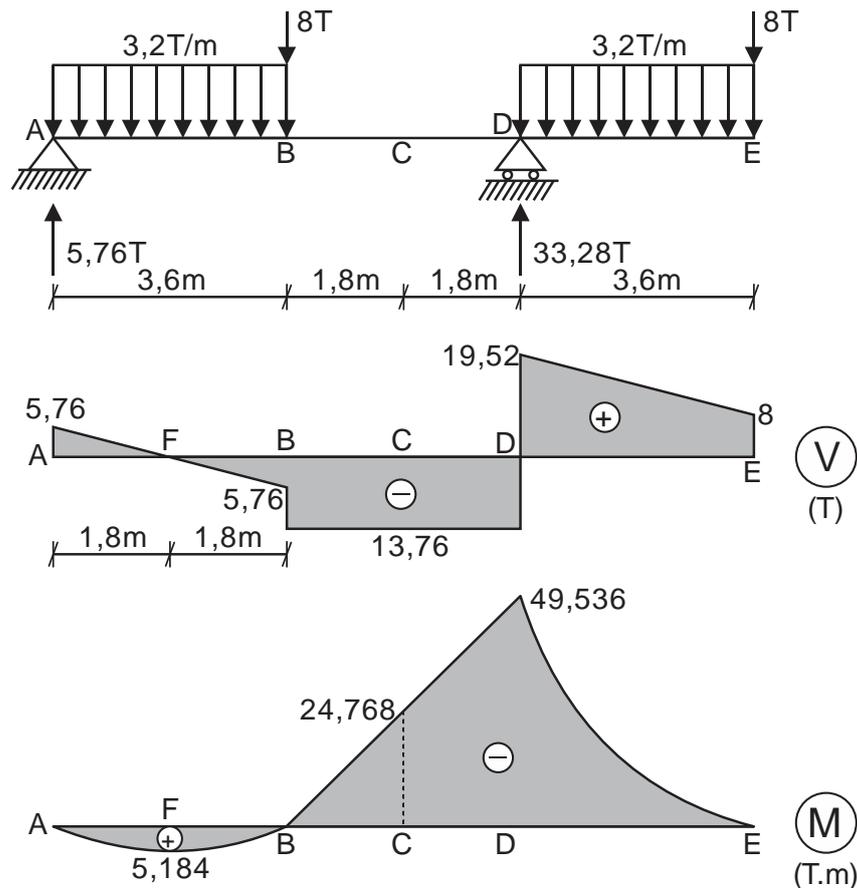


DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_F = \frac{1}{2}(1,8)(5,76) = 5,184T.m$$

$$M_B = 5,184 - \frac{1}{2}(1,8)(5,76) = 0$$

$$M_C = -13,76(1,8) = -24,768 \text{ T.m}$$

$$M_D = -24,768 - 13,76(1,8) = -49,536 \text{ T.m}$$

$$M_E = -49,536 + \frac{(19,52 + 8) \cdot 3,6}{2} = 0$$

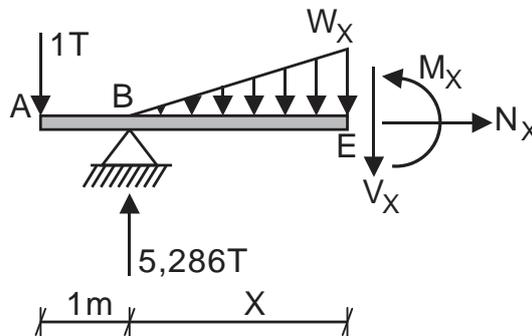
4. a) Calculamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_D(7) + 1(1) - \frac{1}{2}(3)(2)(2) - 2(4)(5) - 2 = 0 \quad \therefore V_D = 6,714 \text{ T} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_B + 6,714 - \frac{1}{2}(3)(2) - 2(4) - 1 = 0 \quad \therefore V_B = 5,286 \text{ T} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_B = 0$$

Analizamos el equilibrio de la viga del lado izquierdo, efectuando un corte a una distancia "X" de B hacia C, es decir, en un nuevo punto E



Por relación de triángulos tenemos:

$$\frac{W_x}{X} = \frac{2}{3} \Rightarrow W_x = \frac{2X}{3}$$

Luego:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -1 + 5,286 - \frac{1}{2}(X)\left(\frac{2X}{3}\right) - V_x = 0$$

$$V_x = 4,286 - \frac{X^2}{3}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow M_x + 1(1 + X) - 5,286X + \frac{1}{2}(X)\left(\frac{2X}{3}\right)\left(\frac{X}{3}\right) = 0$$

$$M_x = 4,286X - \frac{X^3}{9} - 1$$

b) Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, aplicando las ecuaciones obtenidas para el tramo BC y para el resto de tramos, los métodos conocidos.

Para ello, en forma independiente analizamos el tramo BC, obteniendo 3 valores para describir la curvatura de las parábolas cuadrática y cúbica, siendo estos al inicio, centro y final del tramo.

TRAMO BC		
X	$V_{BC} = 4,286 - \frac{X^2}{3}$	$M_{BC} = 4,286X - \frac{X^3}{9} - 1$
0	4,286	-1
1,5	3,536	5,054
3	1,286	8,858

Como se podrá verificar, se cumple con la relación $V = \frac{dM}{dX}$

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_B = -1(1) = -1T.m$$

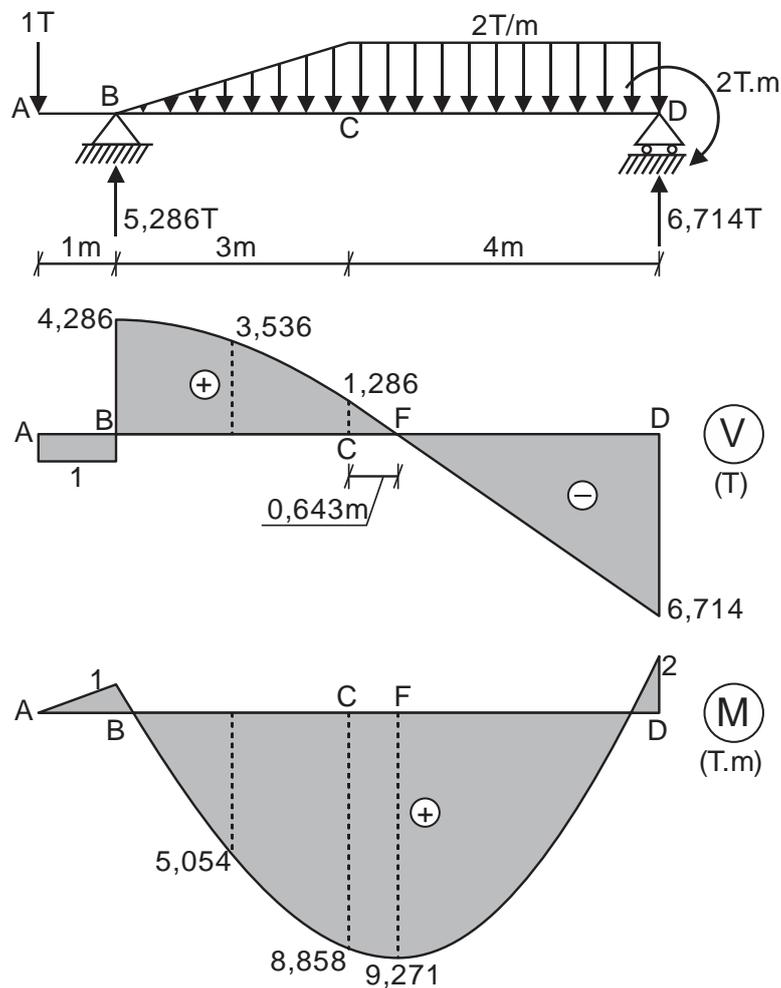
Luego, continuamos graficando con los valores obtenidos por la ecuación de momento flector en el tramo BC

$$M_C = 8,858T.m$$

$$M_F = 8,858 + \frac{1}{2}(0,643)(1,286) = 9,271T.m$$

$$M_D^{\text{antes}} = 9,271 - \frac{1}{2}(3,357)(6,714) = -2T.m$$

$$M_D^{\text{después}} = -2 + 2 = 0$$



5. a) Calculamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_F^{\text{der}} = 0 \Rightarrow V_H(12) - 180(6) = 0 \quad \therefore V_H = 90\text{kN} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_D(18) + 90(42) - 90(6) - 135(12) - 135(24) - 135(30) - 180(36) = 0$$

$$\therefore V_D = 675\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -V_A + 675 + 90 - 90 - 135(3) - 180 = 0 \quad \therefore V_A = 90\text{kN} \downarrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

b) Con los valores obtenidos graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector por los métodos conocidos.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_B = -90(6) = -540\text{kN.m}$$

$$M_C = -540 - 180(6) = -1620\text{kN.m}$$

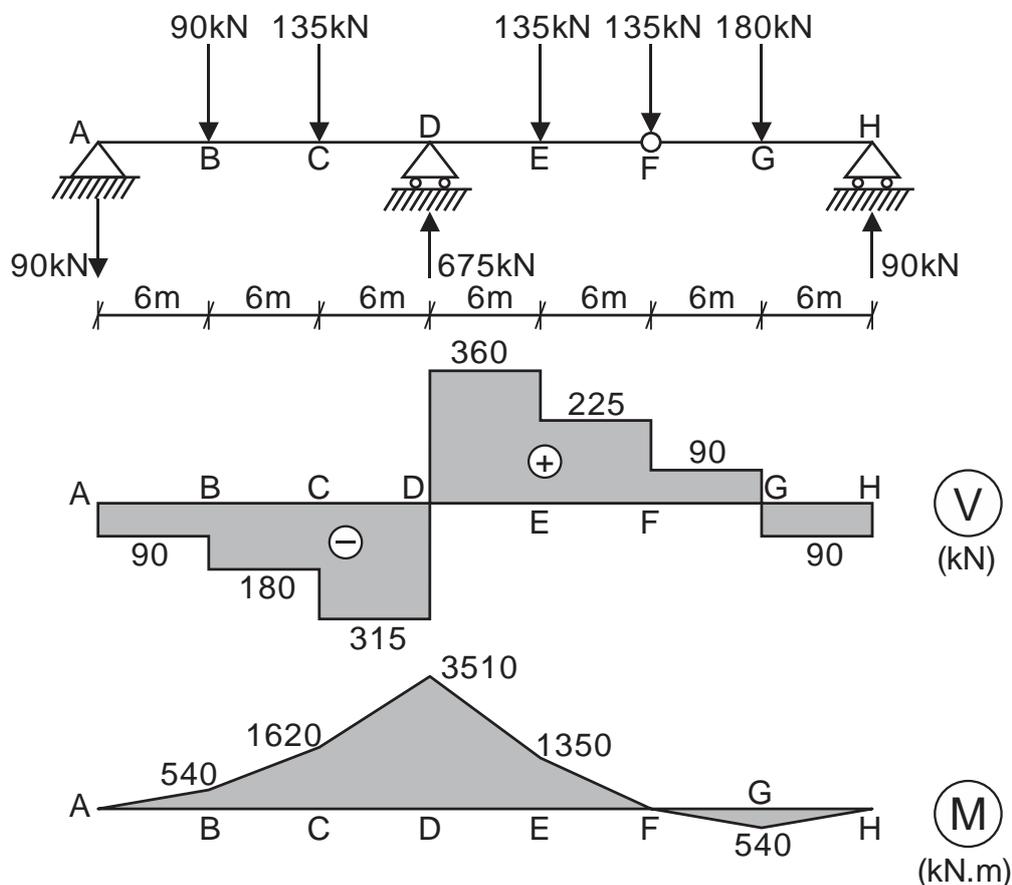
$$M_D = -1620 - 315(6) = -3510\text{kN.m}$$

$$M_E = -3510 + 360(6) = -1350\text{kN.m}$$

$$M_F = -1350 + 225(6) = 0 \text{ (Rótula en F)}$$

$$M_G = 90(6) = 540\text{kN.m}$$

$$M_H = 540 - 90(6) = 0$$



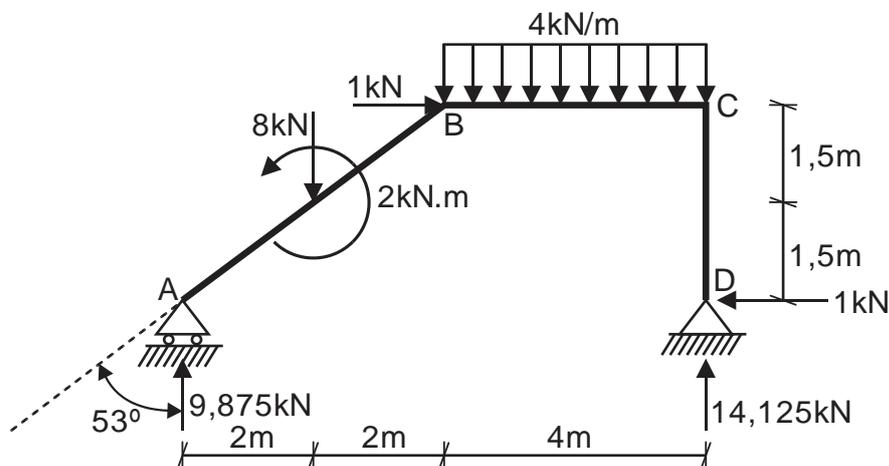
6. Determinamos las reacciones en los apoyos.

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow V_A(8) - 8(6) - 2 + 1(3) - 4(4)(2) = 0 \therefore V_A = 9,875 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 9,875 + V_D - 8 - 4(4) = 0 \therefore V_D = 14,125 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 1 - H_D = 0 \therefore H_D = 1 \text{ kN } \leftarrow$$

En la siguiente figura se muestran las reacciones en los apoyos.



Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, agregando para ello el punto E, que es donde se aplica el momento puntual y el punto F, donde la fuerza cortante es cero.

DIAGRAMA "N":

$$N_{AE} = -9,875 \cos 53^\circ = -5,925 \text{ kN} \quad (\text{COMPRESIÓN})$$

$$N_{EB} = -5,925 + 8 \cos 53^\circ = -1,125 \text{ kN} \quad (\text{COMPRESIÓN})$$

$$N_{BC} = -1 \text{ kN} \quad (\text{COMPRESIÓN})$$

$$N_{CD} = -14,125 \text{ kN} \quad (\text{COMPRESIÓN})$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la siguiente figura.

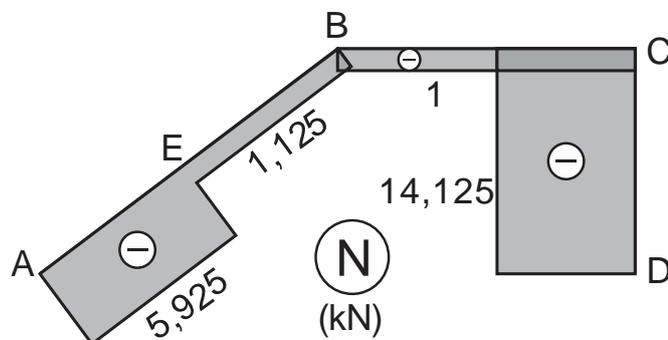


DIAGRAMA "V":

$$V_{AE} = 9,875 \text{sen} 53^\circ = 7,9 \text{ kN}$$

$$V_{EB} = 7,9 - 8 \text{sen} 53^\circ = 1,5 \text{ kN}$$

$$V_B^{BC} = 9,875 - 8 = 1,875 \text{ kN}$$

$$V_C^{BC} = 1,875 - 4(4) = -14,125 \text{ kN}$$

$$V_{CD} = 1 \text{ kN}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la siguiente figura.

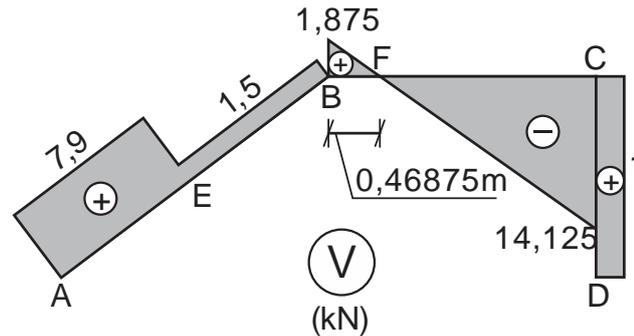


DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_E^{\text{antes}} = 7,9(2,5) = 19,75 \text{ kN.m}$$

$$M_E^{\text{después}} = 19,75 - 2 = 17,75 \text{ kN.m}$$

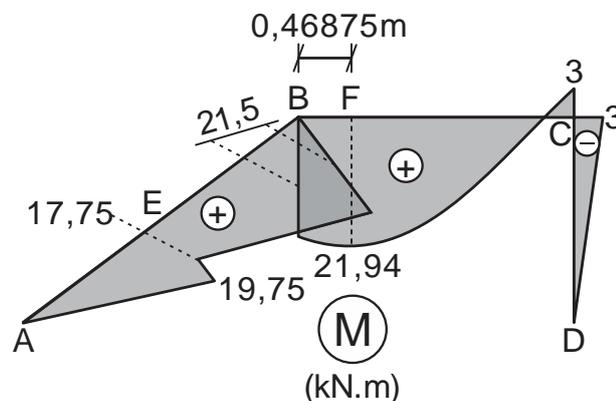
$$M_B = 17,75 + 1,5(2,5) = 21,5 \text{ kN.m}$$

$$M_F = 21,5 + \frac{1}{2}(0,46875)(1,875) = 21,94 \text{ kN.m}$$

$$M_C = 21,94 - \frac{1}{2}(3,53125)(14,125) = -3 \text{ kN.m}$$

$$M_D = -3 + 1(3) = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la siguiente figura.



BIBLIOGRAFÍA

1. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con zapatas aisladas. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2006. – 125p.
2. **Villarreal Castro Genner.** Análisis de estructuras con el programa LIRA 9.0. Lima, 2006. – 115p.
3. **Villarreal Castro Genner.** Interacción suelo-estructura en edificios altos. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2007. – 142p.
4. **Villarreal Castro Genner.** Análisis estructural. Lima, 2008. – 335p.
5. **Villarreal Castro Genner – Oviedo Sarmiento Ricardo.** Edificaciones con disipadores de energía. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2009. – 159p.
6. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales. Lima, 2009. – 336p.
7. **Villarreal Castro Genner.** Estática: Problemas resueltos. Lima, 2011. – 227p.
8. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales I: Prácticas y exámenes USMP. Lima, 2012. – 206p.
9. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales II: Prácticas y exámenes USMP. Lima, 2013. – 199p.
10. **Villarreal Castro Genner.** Ingeniería sismo-resistente: Prácticas y exámenes UPC. Lima, 2013. – 100p.
11. **Villarreal Castro Genner.** Mecánica de materiales: Prácticas y exámenes UPC. Lima, 2015. – 195p.
12. **Villarreal Castro Genner.** Diseño sísmico de edificaciones: Problemas resueltos. Lima, 2015. – 96p.

ÍNDICE

PROLOGO.....	03
PRÁCTICA CALIFICADA Nº 1.....	04
EXAMEN PARCIAL.....	24
PRÁCTICA CALIFICADA Nº 2.....	56
EXAMEN FINAL.....	86
BIBLIOGRAFÍA.....	117